# 24. О спеціальныхъ кругахъ и шарахъ.

**Е. С. Федорова.**

(Доложено 19 сентября).

Къ своей статьѣ о системѣ шаровъ [1]) я самымъ подробнымъ образомъ изложилъ ихъ линейныя и сферическія совокупности, коллинеарное и реципрочное преобразованіе этихъ совокупностей, но совершенно не коснулся спеціальныхъ круговъ, имѣющихся въ каждой ихъ линейной примѣ. Подразумѣвалось только, что посреди всѣхъ круговъ такой примы имѣется кругъ безконечно большого радіуса, и такой кругъ есть прямая линія, составляющая радикальную ось примы.

Какъ бы въ противоположность этому, въ научной литературѣ, начиная со Штейнера, подразумѣвается, что въ линейной примѣ круговъ спеціальнымъ является не прямая, а пара прямыхъ, изъ которыхъ одна и есть радикальная ось, а другая есть безконечно-удаленная прямая; но мнѣ неизвѣстно, чтобы гдѣ-нибудь спеціально былъ разобранъ вопросъ о спеціальныхъ кругахъ [2]).

Настоящею замѣткою я имѣю въ виду заполнить этотъ пробѣлъ.

Для рѣшенія вопросовъ такого рода, прежде всего нужно дать точное опредѣленіе основныхъ понятій, изъ которыхъ мы исходимъ въ своемъ изслѣдованіи. Какъ это ни странно для столь простого геометрическаго образа какъ кругъ, однако мнѣ кажется, что вообще такого строго-обоснованнаго единичнаго опредѣленія дано не было, а въ элементарныхъ курсахъ всегда (по моимъ свѣдѣніямъ) дается неправильное [3]) опредѣленіе, будто кругъ есть совокупность точекъ, одинаково отстоящихъ отъ одной, называющейся центромъ круга; и только въ моихъ работахъ всякая сфероприма опредѣляется тремя произвольно взятыми элементами однозначно и вполнѣ; кругъ же есть только сфероприма точекъ.

Въ этомъ состоитъ особое преимущество новой геометріи, что при изслѣдованіяхъ въ ея области мы принуждены руководствоваться единственно правильными опредѣленіями, и этимъ устранять всякую сбивчивость и самопротиворѣчіе. Ясно, что мы не можемъ сохранить оба приведенныя опредѣленія безразлично, какъ опредѣленія самопротиворѣчивыя.

При моемъ опредѣленіи всякія три точки на плоскости и при всякомъ ихъ положеніи опредѣляютъ вполнѣ и однозначно одинъ единственный кругъ. Понятно, что при особомъ спеціальномъ положеніи этихъ точекъ и круги получатся спеціальные.

Теперь мы и начнемъ съ того, что переберемъ всѣ возможные спеціальные круги.

Въ числѣ этихъ условій заключается и то, что въ немъ есть точки безконечно-удаленныя.

Начнемъ съ такихъ круговъ, въ опредѣленіе которыхъ мы не вводимъ присутствія безконечно-удаленныхъ точекъ, то есть сначала опредѣлимъ кругъ тремя точками, не находящимися въ безконечномъ удаленіи.

Двѣ точки мы можемъ взять произвольно, а третью брать во всѣхъ возможныхъ положеніяхъ кромѣ безконечно-удаленныхъ.

Тогда мы до тѣхъ поръ получаемъ круги общаго характера, пока третья точка не попадетъ на прямую, опредѣляемую первыми двумя точками. Уже это будетъ спеціальный случай, который мы можемъ особо охарактеризовать; для опредѣленія взяты три точки, находящіяся на одной

---

[1]) Этюды по геометріи шаровъ. Эти Записки I 102.

[2]) Объ этомъ нѣтъ даже въ такомъ спеціальномъ изслѣдованіи круговъ и шаровъ, какъ Synthetische Geometrie der Kugeln проф. Reye.

[3]) Спеціальное объясненіе неправильности этого опредѣленія дано въ концѣ замѣтки.

прямой. Но если уже первыя двѣ точки вполнѣ и однозначно опредѣляютъ эту прямую, а третья точка входитъ въ составъ той же совокупности, то значитъ такая совокупность, опредѣляемая и тремя, и вообще какимъ-угодно числомъ точекъ, все таки будетъ та же прямая, которая, слѣдовательно и, будетъ спеціальнымъ видомъ круга, и уже такая совокупность содержитъ въ себѣ одну безконечно-удаленную точку.

Первыя двѣ точки мы взяли произвольнаго и общаго положенія, но мы можемъ взять лишь одну точку произвольнаго и общаго положенія, а другой придавать всевозможныя положенія на плоскости; ясно, что изъ всѣхъ этихъ положеній, опредѣляющихъ съ первою прямыя, будетъ лишь одно спеціальное, а именно когда точка совпадетъ съ первою. Въ этомъ случаѣ мы получаемъ спеціальную прямую, которую мы назовемъ точечною прямою.

Ясно, что если изъ двухъ точекъ такой прямой и третьей, произвольно-взятой точки мы составимъ кругъ, то всякій такой кругъ будетъ спеціальнымъ и въ то же время по своему происхожденію не отличается отъ прямой линіи и значитъ содержитъ безконечно-удаленную точку. Спеціальное условіе, создающее такой кругъ, можетъ быть выражено такъ: для опредѣленія взяты двѣ точки, совпадающія въ одну.

Но и изъ всѣхъ положеній третьей точки есть одно спеціальное, когда она совпадаетъ съ одною изъ точекъ точечной прямой. Такой точечный кругъ будетъ уже вдвойнѣ спеціальнымъ, такъ какъ его спеціальныя особенности опредѣляются двумя условіями: 1) двѣ первыя точки взяты на точечной прямой, и 2) третья точка также взята на той же прямой.

Теперь перейдемъ къ тѣмъ спеціальнымъ кругамъ, въ опредѣленіе которыхъ мы вводимъ присутствіе безконечно-удаленныхъ точекъ.

Изъ нихъ одинъ случай уже нами бы[illegible] встрѣченъ при предъидущемъ изслѣдованіи, а именно тотъ, когда имѣется одна безконечно удаленная точка, а двѣ другія, опредѣляющія кругъ, точки находятся съ нею на одной прямой. При этомъ безразлично, находятся ли эти двѣ точки на этой прямой въ произвольномъ положеніи или совпадаютъ въ одну точку [1]).

Перейдемъ къ другимъ случаямъ.

Сначала возьмемъ одну безконечно-удаленную точку, а всѣ другія точки произвольно. Если вообще есть какая-либо совокупность, удовлетворяющая первому условію опредѣленія круга для даннаго случая, то это будутъ двѣ неразрывно связанныя совокупности точекъ, изъ которыхъ одна есть прямая, проходящая чрезъ двѣ точки произвольнаго положенія и, слѣдовательно, заключающая и одну безконечно-удаленную точку, отличающуюся по своему положенію отъ третьей точки круга, и полная совокупность всѣхъ безконечно-удаленныхъ точекъ, включающая въ себѣ обѣ упомянутыя безконечно-удаленныя точки. Эта совокупность опредѣляется тремя данными точками вполнѣ и однозначно, и удовлетворяетъ второму условію круга, пока двѣ изъ взятыхъ точекъ есть точки единственной прямой, потому что тогда, какія бы три точки этой совокупности ни были взяты для опредѣленія, всегда получится та же совокупность. Но въ частномъ случаѣ, если для опредѣленія ея мы возьмемъ двѣ точки безконечно-удаленныя, то мы не получаемъ непремѣнно той же совокупности.

Для разъясненія этого недоразумѣнія замѣтимъ, что, вообще, когда мы вводимъ послѣднее условіе, то мы подразумѣваемъ, что мы беремъ точки общаго, а не спеціальнаго положенія.

Напр. если опредѣляемъ прямую двумя точками, а затѣмъ утверждаемъ, что всякія двѣ точки этой прямой опредѣляютъ ее же то есть ту же совокупность, то при этомъ подразумѣваемъ, что эти двѣ другія точки не беремъ въ особомъ спеціальномъ положеніи напр. двѣ точки совпадающія, потому что тогда дѣйствительно та же прямая уже не опредѣляется.

При этой же оговоркѣ и въ данномъ случаѣ это условіе удовлетворяется, потому что, если возьмемъ двѣ точки безконечно-удаленныя, то значитъ мы беремъ двѣ точки спеціальнаго положенія.

Но опять-таки мы для опредѣленія этой совокупности не можемъ взять и трехъ точекъ на имѣющейся единственной прямой, потому что это опять будетъ спеціальное положеніе точекъ, а потому можемъ сказать вообще, что если въ опредѣленіе какой нибудь совокупности мы вводимъ спеціальное условіе, то оно всегда и должно соблюдаться.

Напр. въ данномъ случаѣ мы опредѣляемъ кругъ двумя точками произвольнаго положенія и одною

[1]) Хотя въ послѣднемъ случаѣ какъ будто являются и два спеціальныя условія, но все-таки кругъ не есть вдвойнѣ спеціальный, потому что безконечно-удаленная точка находится на всякой прямой, а потому тотъ же кругъ можно опредѣлить какъ такой, двѣ точки котораго совпадаютъ въ одну, а третья взята въ произвольномъ положеніи.

безконечно-удаленною; тогда, чтобы провѣрить полученное рѣшеніе, мы тоже должны взять какія-нибудь двѣ произвольныя точки на прямой и одну безконечно-удаленную, и наше рѣшеніе окажется правильнымъ, если мы при этихъ условіяхъ всякій разъ получаемъ ту же совокупность. Такъ какъ въ данномъ рѣшеніи это именно и имѣетъ мѣсто, то значитъ полученная нами совокупность есть дѣйствительно единственный кругъ, опредѣляемый данными тремя точками, изъ которыхъ одна безконечно-удаленная.

Въ томъ особомъ спеціальномъ случаѣ, когда двѣ точки, взятыя для опредѣленія, совпадаютъ въ одну, мы опять получаемъ случай изъ разсмотрѣнныхъ нами выше [1]).

Теперь возьмемъ двѣ безконечно-удаленныя точки и одну произвольнаго положенія.

Въ этомъ случаѣ кругъ состоитъ изъ безконечно-удаленной прямой и этой единственной точки какъ особой точки. Это рѣшеніе выдерживаетъ всѣ критеріи, удостовѣряющіе въ его правильности.

Кстати замѣчу, что это особый случай, когда кривая 2-го порядка имѣетъ особую отдѣльную точку. Конечно, соотвѣтственное рѣшеніе имѣется и для особыхъ случаевъ кривыхъ 2-го порядка вообще.

Въ спеціальномъ случаѣ, когда обѣ взятыя для опредѣленія безконечно-удаленныя точки совпадаютъ, мы опять получимъ одно изъ уже разсмотрѣнныхъ рѣшеній [1]).

Если для опредѣленія мы возьмемъ три безконечно удаленныя точки, то кругъ, вдвойнѣ спеціальный, будетъ состоять изъ полной совокупности безконечно удаленныхъ точекъ. Мы можемъ охарактеризовать его двойную спеціальность различными двумя условіями напр. такими: 1) мы беремъ двѣ точки на безконечности, 2) мы ихъ беремъ совмѣщающимися въ одну.

Изъ послѣдняго условія мы видимъ, что на совокупность безконечно-удаленныхъ точекъ мы можемъ смотрѣть какъ на спеціальную прямую, что впрочемъ очевидно и съ другой точки зрѣнія, такъ какъ всякую прямую линію мы можемъ удалить въ безконечность.

Остается еще одинъ, не разсмотрѣнный до сихъ поръ случай втройнѣ спеціальнаго круга когда мы его опредѣляемъ тремя совмѣщающимися безконечно-удаленными точками, и тогда получаемъ безконечно-удаленный точечный кругъ.

[1]) И опять-таки получаемая прямая не будетъ вдвойнѣ спеціальнымъ кругомъ.

Конечно, всѣ эти выводы спеціальныхъ круговъ основаны на такихъ простыхъ соображеніяхъ, что мы можемъ непосредственно перенести ихъ на спеціальные шары и можемъ ихъ прямо перечислить: 1) плоскость вообще и 2) плоскость безконечно-удаленная, 3) прямая вообще и 4) прямая безконечно удаленная, 5) точка вообще и 6) точка безконечно-удаленная, 7) плоскость и одна безконечно удаленная точка и 8) одна точка и одна безконечно удаленная плоскость, 9) прямая и безконечно удаленная плоскость и наконецъ 10) плоскость вмѣстѣ съ безконечно-удаленною плоскостью.

Кромѣ вещественныхъ круговъ, о которыхъ до сихъ поръ была рѣчь, новая геометрія ввела и совершенно новое понятіе круговъ мнимыхъ. Но какъ образы мнимые они не могутъ быть непосредственно выведены изъ вещественныхъ элементовъ и точекъ, хотя напр. имѣютъ вещественные центры. Мнимые геометрическіе образы, какъ это доказываетъ общій математическій анализъ, есть образы условные, связанные съ какимъ-нибудь построеніемъ порядка выше перваго; какъ обусловленные построеніями второго порядка мнимые элементы являются только попарно, такъ что напр. не можетъ быть и рѣчи объ опредѣленіи мнимаго круга тремя мнимыми точками, но можетъ быть лишь заключеніе о принадлежности къ мнимому кругу (какъ образу второго порядка) того или другого числа мнимыхъ паръ точекъ. Относительно мнимыхъ круговъ, составляющихъ непосредственный продуктъ теоріи системы круговъ вообще, замѣчу только, что спеціальныхъ мнимыхъ круговъ вовсе не имѣется, и тамъ, гдѣ по ходу непрерывности образовъ совокупности мы должны были бы получить спеціальное рѣшеніе, оно уже оказывается вещественнымъ.

Такъ въ каждой системѣ круговъ, гдѣ имѣется совокупность съ точечнымъ кругомъ какъ промежуточнымъ членомъ, за нимъ слѣдуютъ уже мнимые круги.

Но даже въ полной системѣ круговъ мы не встрѣчаемъ всѣхъ спеціальныхъ формъ круга, а только прямую, называющуюся радикальною осью линейной примы и точечные круги, а также двѣ пары прямыхъ, изъ которыхъ одна обыкновенная, а другая—безконечно удаленная [1]).

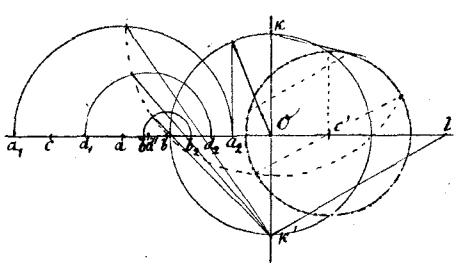
[1]) Важно отмѣтить, что это два различные элемента линейной примы. Это особенно наглядно для примы круговъ, пересѣкающихся въ двухъ точкахъ, такъ какъ въ ней произвольно-заданная третья точка вполнѣ и однозначно опредѣляетъ одинъ кругъ. Если за третью примемъ точку на радикальной оси, то сама ось и представитъ искомое рѣшеніе; если же возьмемъ безконечно-удаленную точку, то рѣшеніе составитъ двѣ прямыя какъ спеціальный кругъ: одна изъ нихъ та же ось, а другая—безконечно-удаленная.

Всѣ остальные спеціальные круги мы встрѣчаемъ только въ полной теоріи совокупностей кривыхъ второго порядка.

Чтобы показать на примѣрѣ важность сдѣланнаго опредѣленія круга и необходимость отличать спеціальные круги, я разсмотрю вопросъ о четырехъ гармоническихъ кругахъ въ линейной примѣ, хотя бы въ примѣ съ вещественнымъ ортогональнымъ кругомъ, иначе совокупности круговъ, имѣющихъ центръ на одной прямой—діаметрѣ ортогональнаго круга и пересѣкающихъ этотъ кругъ прямоугольно.

Есть общая теорема, относящаяся ко всѣмъ линейнымъ совокупностямъ конопримъ точекъ, по которой четыре гармоническія кривыя такой примы имѣютъ четыре гармоническія касательныя въ общихъ точкахъ пересѣченія.

Сначала кажется страннымъ говорить о касательныхъ въ совокупности кривыхъ, какова эта прима круговъ, въ которыхъ никакія двѣ не имѣютъ между собою общихъ точекъ. Однако, если бы это было невозможно хоть въ частномъ случаѣ, теорема не была бы вѣрна; но при выводѣ ея оговаривается, что точки касанія могутъ быть вещественными или мнимыми и выраженіе „касательная къ кругу въ мнимой точкѣ пересѣченія круговъ“ означаетъ лишь поляру этой мнимой точки по отношенію ко всѣмъ кургамъ примы, въ томъ числѣ и мнимымъ.




Общими мнимыми точками пересѣченія круговъ этой примы оказываются концы діаметра ортогональнаго круга то есть точки k и k′, а потому въ примѣненіи къ данному случаю эта теорема выражаетъ лишь, что четыре круга данной примы есть круги гармоническіе, если четыре поляры точки k относительно нихъ, которыя всѣ непремѣнно должны пересѣчься въ сопряженной мнимой точкѣ k′, составляютъ четыре гармоническія прямыя.

Соотвѣтственное построеніе показано на фигурѣ причемъ трое изъ круговъ есть обыкновенные вещественные круги, а четвертый, отмѣченный особымъ пунктиромъ, есть мнимый кругъ этой примы.

Какъ видимъ, четвертая гармоническая k′1 есть поляра точка k относительно круга c′, какъ мнимаго.

Теперь зададимся вопросомъ, какіе получатся четыре круга, если за ихъ касательныя въ мнимой точкѣ k мы возьмемъ четыре слѣдующія гармоническія прямыя, проходящія чрезъ точку k′: одну совпадающую съ радикальною осью примы то есть прямую kk′, двѣ другія симметричныя относительно этой оси, а слѣдовательно четвертая будетъ прямою къ нею перпендикулярною. Первая конечно касательна къ особому кругу, составляющему радикальную ось и потому касательная не отличается отъ самого круга; каковъ же будетъ четвертый гармоническій кругъ?

Этотъ отвѣтъ можетъ быть полученъ лишь путемъ спеціальнаго изслѣдованія, и въ общей теоріи совокупностей кривыхъ 2-го порядка дается въ томъ смыслѣ, что этотъ четвертый есть совокупность изъ той же прямой въ неизмѣнной связи съ безконечно удаленною прямою. Этотъ спеціальный кругъ такимъ образомъ отличается отъ предъидущаго, какъ иначе было бы и немыслимо, если принять во вниманіе, что эти обѣ касательныя взаимно-перпендикулярны.

Второй примѣръ еще ярче оттѣнитъ необходимость знакомства со спеціальными кругами.

Въ системѣ кривыхъ 2-го порядка (конопримъ точекъ) какъ круги, такъ и равностороннія гиперболы образуютъ самостоятельныя совокупности или системы, которыя могутъ изучаться независимо отъ всѣхъ другихъ кривыхъ. Это означаетъ, что эти кривыя могутъ образовать линейныя совокупности разныхъ ступеней. Поэтому, если возьмемъ линейную терцію кривыхъ вообще, она съ линейною квартою (полною совокупностью) равносторонникъ гиперболъ пересѣчется въ линейной секундѣ, а съ линейною терціею круговъ (тоже полною совокупностью) пересѣчется въ линейной примѣ. Но въ одной линейной терціи линейная секунда пересѣкается всякою линейною примою въ одномъ общемъ элементѣ. Слѣдовательно, линейная секунда равносторонникъ гиперболъ съ линейною примою круговъ непремѣнно должна пересѣчься въ одномъ общемъ элементѣ, который, слѣдовательно одновременно есть и равносторонняя гипербола, такъ какъ принадлежитъ къ секундѣ этихъ кривыхъ, и кругъ, такъ какъ принадлежитъ примѣ круговъ. Какъ, спрашивается это возможно? Для отвѣта нужно какъ посреди всякой линейной примы круговъ, такъ и посреди всякой секунды гиперболъ найти тождественные элементы. Ясно, что такіе элементы могутъ быть лишь спеціальными. Въ линейной же примѣ круговъ вообще спеціальными элементами всегда являются только прямая (радикальная ось) и пара прямыхъ, состоящая изъ этой же прямой и безконечно-удаленной прямой.

Но прямая не представляетъ спеціальной равносторонней гиперболы, потому что въ опредѣленіе послѣдней входитъ присутствіе двухъ опредѣленныхъ безконечно-удаленныхъ точекъ (соотвѣтствующихъ двумъ перпендикулярнымъ направленіямъ). Слѣдовательно, прима круговъ съ секундою равносторонних гиперболъ въ линейной терціи пересѣкается въ парѣ прямыхъ, изъ которыхъ одна безконечно удаленная.

Какъ видимъ, въ новой геометріи иного опредѣленія круга, какъ частнаго случая сферопримъ вообще, быть не можетъ; поэтому, если бы мы удержали для круга то опредѣленіе, которое дается теперь въ элементарныхъ руководствахъ геометріи древнихъ, то вышло бы, что въ одной и той же наукѣ подъ однимъ и тѣмъ же терминомъ подразумѣвались бы разныя вещи. Но нельзя для общаго понятія, ради устраненія самопротиворѣчія, держаться другого термина, отличнаго отъ того, что подразумѣвается подъ словомъ „кругъ“ въ геометріи древнихъ, потому только, что оно само въ себѣ не содержитъ необходимаго условія математическихъ опредѣленій—общности. Не признавать круговъ, заключающихъ въ себѣ безконечно-удаленныхъ точекъ, кругами, все равно, что не признавать безконечно-удаленныхъ точекъ точками. Эвклидъ такъ и поступалъ; онъ утверждалъ, что два перпендикуляра къ прямой не пересѣкаются; но древніе геометры и въ конусѣ видѣли только полконуса, имѣющемъ не центръ, а вершину, въ гиперболѣ видѣли только одну вѣтвь, изъ кривыхъ 2-го порядка усматривали центръ только въ эллипсѣ (и кругѣ) и т. п. Но теперь этого не допускаютъ.

Теперь мы говоримъ, что двѣ прямыя на плоскости всегда пересѣкаются въ одной точкѣ; но, въ частности, эта точка можетъ быть и безконечно-удаленною. Мы говоримъ, что кривая 2-го порядка (коноприма) всегда имѣетъ центръ; но, въ частности (парабола), этотъ центръ можетъ быть безконечно-удаленнымъ (не говоря уже объ особыхъ случаяхъ его неопредѣленности) и т. д.