23. Мистика круга Фейербаха

(Circulus mysticus Feuerbachi.)

Е. С. Федорова.

(доложено 19 сентября).

Если данъ трехугольникъ ABC и мы опредѣлимъ въ немъ точку высотъ D (то есть общую точку пересѣченія перпендикуляровъ изъ его вершинъ на противоположныя стороны), то ABCD можемъ принять уже за полный четырехугольникъ съ парами противоположныхъ сторонъ AB съ CD, BC съ DA и CA съ BD. Проведя кругъ чрезъ основанія a_1, b_1, c_1 перпендикуляровъ на сторонахъ трехугольника, мы получаемъ кругъ Фейербаха, который, кромѣ этихъ трехъ точекъ, пройдетъ еще чрезъ шесть срединъ только-что перечисленныхъ сторонъ полнаго четырехугольника, то есть точки a,b,c, a′,b′,c′.

Какъ извѣстно, эти соотношенія имѣютъ въ новой геометріи существенное значеніе [1]), а именно: 1) чрезъ четыре вершины этого четырехугольника проходитъ прима равностороннихъ гипербол, центры которыхъ есть точки этого круга, а 2) въ сопряженной съ нею терціи конопримъ лучей (Kegelschnitt-Schaarshaar) имѣется секунда параболъ, фокусы которыхъ точки того же круга.

При ближайшемъ разсматриваніи его свойствъ, его связи какъ съ этимъ трехугольникомъ, такъ и съ другими непосредственно выводимыми изъ него фигурами, соотношенія оказываются еще гораздо разнообразнѣе, такъ что по числу имѣющихся здѣсь соотношеній, мы находимъ аналогію съ соотношеніями произвольныхъ шести точекъ какой-либо кривой 2-го порядка (конопримъ); получаемый такимъ образомъ шестиугольникъ былъ въ силу этого названъ hexagramum mysticum Паскаля; для этого случая я прибѣгнулъ къ названію, приведенному въ заглавіи.

Перейду къ этимъ соотношеніямъ.

Для простоты возьму тупоугольный трехугольникъ ABC, коего большая сторона есть AB. Описавъ около него кругъ, центръ коего есть точка D′, найдемъ, что этотъ кругъ одинаковъ съ кругомъ ABD, гдѣ D точка высотъ трехугольника ABC. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ AD перпендикулярна къ BC и BD перпендикулярна къ AC, то уголъ ADB есть уголъ, дополнительный до двухъ прямыхъ углу ACB; но, по условію, послѣдній больше прямого на нѣкоторый уголъ α; слѣдовательно ADB на величину α меньше прямого; оба эти круга имѣютъ общую хорду AB—большую сторону даннаго трехугольника.

Назовемъ, ради простоты, данный трехугольникъ ABC малымъ, а вновь получаемый трехугольникъ ABD большимъ; центръ описаннаго круга малаго есть точка D′, а центръ описаннаго круга большого есть точка C′. Такъ какъ общая хорда AB есть слѣдъ плоскости симметріи относительно этихъ круговъ, то значитъ это же относится и къ ихъ центрамъ, и значитъ центры C′ и D′ находятся на перпендикулярѣ къ AB, а точка c—средина стороны AB, дѣлитъ отрѣзокъ C′D′ пополамъ.

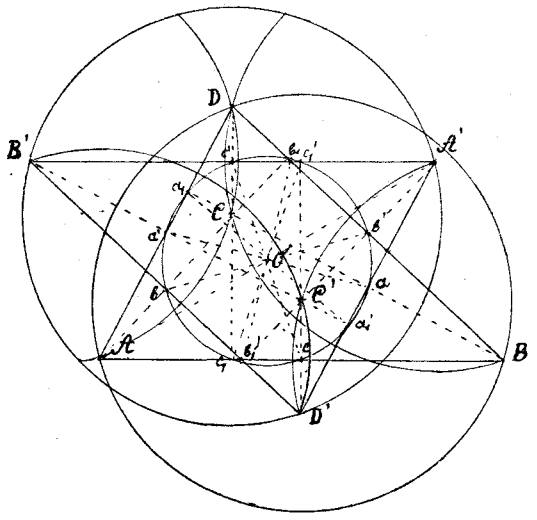
Теперь мы видимъ, что первоначально принятое условіе, что взятый трехугольникъ ABC имѣетъ тупой уголъ при вершинѣ C, теряетъ свое значеніе, такъ какъ изъ C мы вывели точку высотъ D, которую мы можемъ принять за вершину другого трехугольника ABD, уже остроугольнаго при соотвѣтственной точкѣ D, причемъ оба трехугольника имѣютъ общую сторону AB.

Ясно, что то же мы можемъ сдѣлать и съ каж-

---

[1]) Даже сдѣлано обобщеніе этихъ соотношеній въ видѣ теоремы: въ каждомъ полномъ четырехугольникѣ шесть срединъ ихъ сторонъ и три точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ, взятыхъ попарно, находятся на одной кривой 2-го порядка (конопримѣ). см. Reye. Geometrie der Lage B.I 273.

дою другою стороною даннаго трехугольника, и такъ какъ при вершинахъ A и B даннаго находятся острые углы, то мы выведемъ изъ каждой стороны BC и CA еще по одному трехугольнику, тупоугольному въ вершинѣ, противолежащей общей сторонѣ; и если чрезъ каждую пару такихъ трехугольниковъ мы проведемъ описанные круги, то эти пары круговъ равны



Фиг. 1.

и симметричны по отношенію къ общей сторонѣ; а такъ какъ изъ каждой пары такихъ трехугольниковъ одинъ общій, а именно данный трехугольникъ ABC, то всѣ полученные четыре круга будутъ равны. Пусть ихъ центры, помимо центра общаго круга D′, будутъ соотвѣтственно AB точка C′, соотвѣтственно BC точка A′ и соотвѣтственно AC точка B′. Такъ какъ сторонѣ AB противолежитъ вершина C, сторонѣ BC вершина A и сторонѣ AC вершина B, то центры A′, B′, C′ можно считать соотвѣтственными съ вершинами A, B, C. При этомъ замѣтимъ, что средина D′A′ есть точка a то есть средина стороны BC, средина D′B′ есть точка b то есть средина стороны AC и средина D′C′ есть точка c то есть средина стороны AB.

Мы видѣли, какъ отъ тупоугольнаго при с трехугольника ABC мы можемъ перейти къ остроугольному при D трехугольнику ABD; такъ какъ центръ описаннаго около послѣдняго круга есть точка C′, то, повторивъ съ нимъ тѣ же операціи, что только-что сдѣлали съ ABC, получимъ, что перпендикуляры C′A′ C′B′ и C′D′ нетолько проходятъ чрезъ средины сторонъ b′, a′ и c, но въ тѣхъ же точкахъ дѣлятся пополамъ и эти сами отрѣзки, и такимъ же образомъ устанавливаемъ соотвѣтствіе нетолько A съ A′, B съ B′, C съ C′, но и D съ D′.

Для установленія гомолочичности двухъ системъ на плоскости достаточно установить соотвѣтствія между четырьмя точками каждой изъ системъ. Это мы сдѣлали, установивъ соотвѣтствіе A съ A′, B съ B′, C съ C′ и D съ D′.

Но эти четыре точки можемъ разсматривать какъ вершины полнаго четырехугольника, а въ данномъ случаѣ мы имѣемъ особые четырехугольники, а именно такіе, что противоположенные стороны взаимно перпендикулярны а именно AB⊥CD, AC⊥BD, AD⊥BC и AB⊥C′D′, AC⊥B′D′, AD⊥B′C′ и кромѣ того параллельны соотвѣтственные стороны AD съ A′D′ и BD съ B′D′.

Имѣя взаимную параллельность соотвѣтственныхъ сторонъ четырехугольниковъ, мы, слѣдовательно, имѣемъ подобіе нетолько этихъ четырехугольниковъ, но и самихъ системъ; въ данномъ случаѣ это подобіе обратное, такъ какъ точка O, соединяющая какія-нибудь двѣ соотвѣтственныя, есть центръ обратнаго (а не прямого) подобія. Въ этой точкѣ, слѣдовательно, пересѣкаются всѣ прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки системъ.

По отношенію къ новополученной системѣ мы можемъ въ точности повторить всѣ построенія, которыя мы сдѣлали для первой, и тогда получимъ, что A′B′C′D′ есть полный четырехугольникъ съ взаимноперпендикулярными противоположными сторонами, что точки A, B, C, D есть центры равныхъ круговъ, описанныхъ соотвѣтственно около трехугольниковъ B′C′D′, CD′A′, D′A′B′, A′B′C′; найдемъ, между прочимъ, что точка a′ есть средина стороны AD, точка a есть средина стороны A′D′; точка a_1 есть основаніе перпендикулярной стороны BC, а точка a'_1 есть основаніе перпендикулярной стороны B′C′.

Если возьмемъ четырехугольникъ $aa_1a'a'_1$, то онъ въ обѣихъ системахъ самогомологиченъ, а если въ подобныхъ системахъ какая-нибудь фигура самогомологична, то сами системы нетолько подобны, но и равны. Слѣдовательно, и въ данномъ случаѣ мы имѣемъ нетолько подобіе, но и равенство, и точка O есть центръ обратнаго равенства обѣихъ системъ. Но въ данномъ случаѣ въ этомъ четырехугольникѣ мы имѣемъ равенство двоякаго рода: 1) мы можемъ совмѣстить a съ a′ и a_1 съ a'_1 (вслѣдствіе связи ихъ съ центромъ O обратнаго равенства), но также совмѣстить a съ a'_1, и a′ съ a_1, потому что это прямоугольникъ; слѣдовательно, четыре вершины этого прямоугольника находятся на одномъ кругѣ, коего центръ есть центръ O обратнаго равенства обѣихъ системъ; такъ же докажемъ, что прямоугольники составляютъ и $bb_1b'b'_1$ и $cc_1c'c'_1$.

Такъ какъ, на основаніи извѣстной теоремы новой геометріи на одной кривой 2-го порядка находятся и средины сторонъ полнаго четырехугольника, и три точки пересѣченія противоположныхъ его сторонъ, то значитъ, между прочимъ, что на таковой находятся нетолько a_1 съ a', но и b_1 съ b', и c_1 съ c', а слѣдовательно въ эту кривую должны быть вписаны всѣ три упомянутые прямоугольника. Изъ всѣхъ кривыхъ 2-го порядка только кругъ удовлетворяетъ условію, что въ немъ можетъ быть вписанъ больше чѣмъ одинъ прямоугольникъ съ разными направленіями сторонъ, а потому эта кривая и есть кругъ, который называется кругомъ Фейербаха. Такимъ образомъ доказана слѣдующая теорема:

Кругъ Фейербаха проходитъ чрезъ двѣнадцать замѣчательныхъ точекъ четырехъ трехугольниковъ, выводимыхъ изъ одного даннаго; эти трехугольники попарно принадлежатъ двумъ системамъ, связаннымъ центромъ обратнаго равенства, который и есть центръ круга Фейербаха. Два трехугольника одной системы составляютъ одинъ полный четырехугольникъ съ перпендикулярными противоположными сторонами. Двѣнадцать точекъ, чрезъ которыя проходитъ кругъ, есть средины сторонъ полнаго четырехугольника и точки пересѣченія его противоположныхъ сторонъ; каждая средина одной стороны четырехугольника одной системы, есть въ то же время и средина стороны четырехугольника другой системы, противоположной той, которая гомологична первой сторонѣ.

Въ силу существованія центра обратнаго равенства между полными четырехугольниками обѣихъ системъ, въ каждой изъ нихъ вершины четырехугольника есть центры круговъ, проходящихъ чрезъ вершины другого, а потому образуется интересная конфигурація, свойства которой можно выразить слѣдующею теоремою: вершины полныхъ четырехугольниковъ одной системы изъ двухъ, связанныхъ центромъ обратнаго равенства согласно предъидущей теоремѣ, есть центры круговъ, проходящихъ чрезъ всѣ вершины четырехугольника другой системы, кромѣ одной, гомологичной этому центру. Эти восемь равныхъ круговъ образуютъ совершенную (или иначе называющуюся симметрическою) конфигурацію съ ихъ центрами, а именно каждый кругъ проходитъ чрезъ три центра, а въ каждомъ центрѣ пересѣкаются три круга той же системы, кромѣ того, для котораго эта точка есть центръ. Центръ круга Фейербаха есть центръ обратнаго равенства конфигураціи.

По свойству конфигураціи сохранять свои существенныя свойства послѣ извѣстнаго рода преобразованій, мы можемъ изъ послѣдней теоремы непосредственно вывести двѣ слѣдующія.

Если подвергнемъ предъидущую систему однородной деформаціи, то выведемъ:

Существуютъ совершенныя конфигураціи изъ восьми эллипсовъ равной площади и ихъ центровъ, имѣющая центръ обратнаго равенства (и слѣдовательно эллипсы попарно равны), въ которой каждый эллипсъ проходитъ чрезъ три центра, а чрезъ каждый центръ проходитъ три эллипса. Эти восемь центровъ принадлежатъ двумъ системамъ, связаннымъ центромъ обратнаго равенства и какъ на каждомъ эллипсѣ находятся три центра одной системы, такъ чрезъ каждый центръ проходятъ три эллипса одной системы.

Если подвергнемъ ту же систему произвольной коллинеаціи, то выведемъ:

Существуютъ совершенныя конфигураціи изъ восьми кривыхъ 2-го порядка и нѣкоторыхъ восьми точекъ (не находящихся по три на одной прямой), въ которой каждая кривая проходитъ чрезъ три точки, а чрезъ каждую точку проходитъ три кривыхъ.

Если подвергнемъ систему преобразованію обратными радіусами, то выведемъ:

Существуютъ совершенныя конфигураціи изъ восьми вообще неравныхъ круговъ и восьми точекъ, въ которыхъ каждый кругъ проходитъ чрезъ три точки, а чрезъ каждую точку проходитъ три круга.

Если, въ частности, за кругъ преобразованія примемъ кругъ Фейербаха, то выведемъ:

Существуютъ совершенныя конфигураціи изъ восьми круговъ, обладающія центромъ обратнаго равенства (и слѣдовательно круги попарно равны), и восемью точками, реципрочными общему центру по отношенію къ каждому кругу, въ которыхъ каждый кругъ проходитъ чрезъ три точки, а черезъ каждую точку проходитъ три круга.