22. О кривыхъ равновыгоднаго положенія точки при прямой засѣчкѣ.

В. И. Баумана.

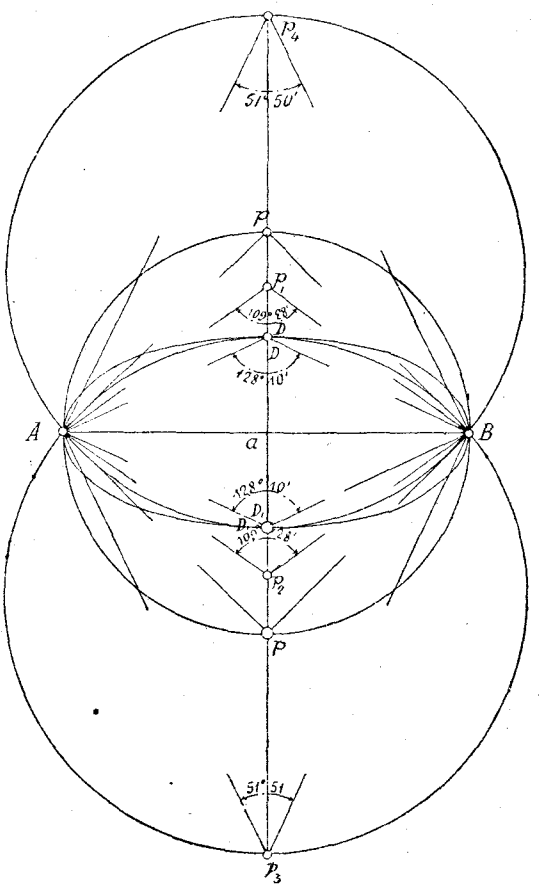
Въ ст.: „Изъ маркшейдерской практики студентовъ Горнаго Института“ [1]) было приведено резюме изслѣдованій проф. Iordan'a [2]), Helmert'a и др. по вопросу о точности опредѣленія точки прямою, боковою и обратною засѣчкою (рѣшеніемъ задачи Попинота).

Новымъ по сравненію съ работами названныхъ изслѣдователей въ данной статьѣ представляется а) пользованіе биполярными координатами, вмѣсто прямоугольныхъ, упростившее рѣшеніе вопроса и b) сведеніе вопроса о точности опредѣленія точки рѣшеніемъ задачи Потенота къ таковому же вопросу о прямой засѣчкѣ точекъ, пользуясь даннымъ проф. Runge, основанномъ на преобразованіи обратными радіусами, способѣ рѣшенія этой задачи [3]).

За мѣру точности опредѣленія точки прямой и боковой засѣчкой мною согласно съ проф. Iordan'омъ была принята абсолютная величина отношенія: $\mu = \frac{M}{a(\delta)}$ средней ошибки M опредѣленія положенія точки къ произведенію длины (a) базиса на ошибку δ измѣренія угловъ α, β при данныхъ точкахъ, или угла α при данной и γ при искомой точкѣ. (См. черт. 1).

При такомъ опредѣленіи мѣры точности, всѣ точки, лежащія на окружности круга APBP (см. черт. 1), описаннаго на базисѣ AB какъ на діаметрѣ, опредѣляются съ одинаковой степенью точности $\mu = 1$.

Съ тою же точностью $\mu = 1$ опредѣляются точки, лежащія на симметрической кривой $ADBD_1$ опредѣляемой уравненіемъ: $\cos^3(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+)\beta + \cos(\alpha-\beta) = 0$, симметричной относительно базиса и перпендикуляра къ нему въ его срединѣ, касающейся



Черт. 1.

---

[1]) См. Горный журналъ 1903 г., кн. 3.

[2]) См. «Курсъ Высшей геодезіи» проф. Іордана въ переводѣ Межевого Инженера Бика, а равно ст. проф. Iordan'a: «Ueber Genauigkeit einfacher geodätischer Punktbestimmung. Schlöm. Zeitsch. f. Mathematik und Phisik 1871.

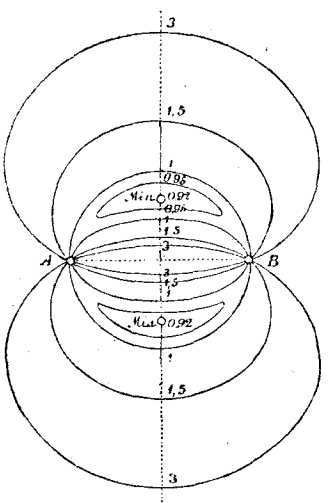
[3]) См. Runge: «Ueber die Verwaudschaft des Rückwärts Vorwärts-Einscneidens. Zeitschr. g. Verm. Wes. 1899.

въ точкахъ D и D_1 дугъ окружности, вмѣщающихъ уголъ $ADB = AD_1B = 128^\circ\ 10'\ 20''$ и въ точкахъ A и B окружности APBP.

Въ области ограниченной этими кривыми: окружностью $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)=0$ и кривою $\mathrm{Cos}^3(\alpha+\beta) - 2\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)=0$ лежатъ точки, для которыхъ относительная ошибка $\mu<1$ и въ этой области на перпендикулярѣ P_4P_3 находятся точки P_1 и P_2, для которыхъ отношеніе μ получаетъ наименьшую свою величину $\mu=0{,}92$.

Наоборотъ, для точекъ, лежащихъ внутри площади, ограниченной кривой $ADBD_1$ и внѣ площади упомянутаго круга ошибка $\mu>1$ и въ этой области лежатъ точки, ошибка опредѣленія которыхъ достигаетъ своего наибольшаго значенія $\mu=\infty$ для точекъ, лежащихъ на базисѣ AB, $(\alpha+\beta)=0$ и на безконечно большомъ отъ него разстояніи $\alpha+\beta=180^\circ$.

Все сказанное иллюстрируется въ цитированной статьѣ проф. Iordan'a построенными имъ кривыми одинаковой точности опредѣленія положенія точки помощью прямой засѣчки.



Черт. 2.

Какъ показываетъ черт. 2-й, означенныя кривыя для всѣхъ значенія $\mu<1$ имѣютъ видъ серпо-образныхъ кривыхъ, группирующихся вокругъ точекъ $\mu_{min}=0{,}92$ въ серпообразныхъ областяхъ, ограниченныхъ указанною окружностью $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)=0$ и эллиптическою кривою $\mathrm{Cos}^3(\alpha+\beta) - 2\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)=0$.

Для всѣхъ точекъ двухъ послѣднихъ кривыхъ отношеніе $\mu=1$. Наконецъ для значеній $\mu>1$ кривыя имѣютъ видъ эллитическихъ кривыхъ (см. $\mu=1{,}5$ и 3) пересѣкающихъ базисъ въ точкахъ A и B и переходящихъ черезъ эти точки изъ области, лежащей внутри площади указанной кривой въ область лежащую внѣ площади основного круга.

Изъ сказаннаго ясно, что наивыгоднѣйшимъ для опредѣленія прямою засѣчкою является построенный на базисѣ равнобедренный трехугольникъ съ угломъ въ $109^\circ 28'$ при опредѣляемой точкѣ.

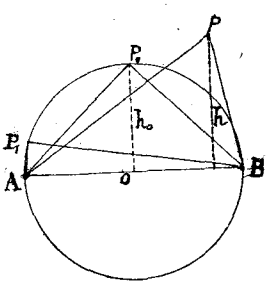
Выгодными являются вообще тупоугольные трехугольники съ угломъ, не свыше $128^\circ 10' 22''$ при опредѣляемой точкѣ.

Наоборотъ, треугольники остроугольные невыгодны для прямой засѣчки, ибо для $\alpha+\beta>90^\circ$, ошибка $\mu>1$.

Обращаясь къ оцѣнкѣ правильности даннаго проф. Iordan'омъ мѣрила и основанныхъ на немъ выводовъ, необходимо сказать, что съ точки зрѣнія выбора выгоднаго для прямой засѣчки расположенія точекъ они нуждаются въ серьезномъ коррективѣ.

Прежде всего слѣдуетъ замѣтить, что данныя кривыя представляютъ собственно не кривыя равной точности, а кривыя равныхъ относительныхъ ошибокъ опредѣленія положенія точки.

Съ этой стороны было бы правильнѣе, сохраняя очертанія кривыхъ придавать имъ числовыя значенія отвѣчающія не самимъ ошибкамъ μ, а величинамъ $h=\frac{1}{\mu}$ или $p=\frac{1}{\mu^2}$. Такимъ образомъ, мы получили бы кривыя равной точности, или важныя во многихъ случаяхъ кривыя равнаго вѣса опредѣленія положенія точки.



Черт. 3.

Это замѣчаніе имѣютъ скорѣе формальный характеръ, ибо фигура и очертаніе кривыхъ при этомъ не мѣняются и всѣ основанныя на нихъ выводы о выгодномъ расположеніи точекъ сохраняютъ свою силу. Другое замѣчаніе имѣетъ уже серьезное значеніе.

При указанномъ опредѣленіи величины μ прямоугольный равнобедренный треугольникъ AP_0B (чертежъ 3) представляется столь же выгоднымъ для прямой засѣчки, какъ напримѣръ прямоугольный же трехугольникъ AP_1B, вершина котораго лежитъ на той же окружности въ весьма близкомъ отъ базиса AB разстояніи.

Въ дѣйствительности мы несомнѣнно предпочтемъ равнобедренный треугольникъ APB всѣмъ другимъ прямоугольнымъ треугольникомъ, построеннымъ на гипотенузѣ AB, ибо онъ при данной относительной ошибкѣ $\mu = 1$ опредѣленія точки P имѣетъ наибольшую площадь.

Во всѣхъ оффиціальныхъ инструкціяхъ, трактующихъ вопросъ о тригонометрическомъ опредѣленіи точекъ предъявляется и совершенно основательно требованіе обезпечить данную квадратную единицу площади опредѣленнымъ числомъ тригонометрическихъ пунктовъ, равномѣрно по ней распредѣленныхъ.

Съ этой точки зрѣнія равнобедренные трехугольники, обладающіе наибольшей при данномъ периметрѣ площадью имѣютъ особое для выбора точекъ значеніе. Это значеніе необходимо учесть въ самомъ опредѣленіи мѣрила выгодности данной комбинаціи точекъ для прямой засѣчки.

Сообразуясь со всѣмъ сказаннымъ, мы примемъ за 1-цу вѣсъ опредѣленія положенія точки прямой засѣчкой изъ построеннаго на базисѣ прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника и выразимъ вѣсъ опредѣленія точки изъ другого треугольника произведеніемъ:

$$P = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{S}{S_0}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{h}{h_0}\right)^2, \text{ гдѣ:}$$

μ — есть указанная относительная ошибка положенія точки, равная по Іордану для прямой засѣчки:

$$\mu = \frac{M}{a(\delta)} = \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)}}{\mathrm{Sin}^2(\alpha+\beta)},$$

$\frac{S}{S_0}$ — отношеніе площади даннаго $\triangle$-ка APB, къ площади построеннаго на томъ же базисѣ $AB = a$ равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника AP_0B, равное отношенію высотъ $\frac{h}{h_0}$; α и β — измѣренныя при точкахъ A и B углы трехугольника APB и δ — ошибка измѣренія каждаго изъ этихъ угловъ.

Замѣнивъ высоты h и h_0 равными ей выраженіемъ $h = a\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ и $h_0 = \frac{a}{2}$ получимъ:

$$P = \frac{\sin^4(\alpha+\beta)}{1-\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)} \times \frac{4\sin^2\alpha\,\mathrm{Sin}^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}^2(\alpha+\beta)}{1-\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)}\left[\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\right]^2 \quad (1)$$

Уравненіе (1) показываетъ, что всѣ кривыя одинаковаго вѣса симметричны относительно базиса A B и проведенной къ нему черезъ его средину O прямой DD, ибо на прямой AB, какъ на хордѣ мы можемъ построить двѣ дуги, вмѣщающія уголъ $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$ и данной величинѣ $\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)$ отвѣчаетъ равная ей величина $\mathrm{Cos}(\beta-\alpha)$.

Дабы построить кривыя одинаковаго вѣса, мы остановимся прежде всего на равнобедренныхъ $\triangle$кахъ, геометрическое мѣсто вершинъ которыхъ представляетъ собою ось симметріи DD.

Для всѣхъ указанныхъ треугольниковъ, $\alpha - \beta = 0$, $\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) = +1$ и уравненіе (1) преобразуется въ:

$$P = \sin^2(\alpha+\beta)\left(1 - \mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Положивъ въ этомъ уравненіи $P = 1$ получимъ, послѣ нѣкоторыхъ преобразованій, уравненіе: $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)\,[\mathrm{Cos}^2(\alpha+\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha+\beta) - 1] = 0$, что даетъ: $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) = 0$ и $\alpha+\beta = 90°$ или $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\gamma = 180° - (\alpha+\beta) = \mathrm{Arc.\,Cos}\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 51°49'38''$ [1]).

Такимъ образомъ вершины P_0 (черт. 4) прямоугольнаго и P остроугольнаго равнобедренныхъ треугольниковъ одинаково выгодны для прямой засѣчки точекъ и понимаемый въ указанномъ выше смыслѣ вѣсъ опредѣленія этихъ точекъ $P = 1$ [2]).

Замѣтивъ, что въ ур-ніи (1) при $\alpha - \beta = 0$ уменьшаемое въ числителѣ и вычитаемое въ знаменателѣ при $\alpha+\beta < 90°$ ур. (1) достигаютъ наибольшей своей величины увидимъ, что наибольшее значеніе P надо искать на указанномъ перпендикулярѣ DD, для всѣхъ точекъ котораго $\alpha - \beta = 0$ и $\mathrm{Cos}(\alpha-\beta) = 1$.

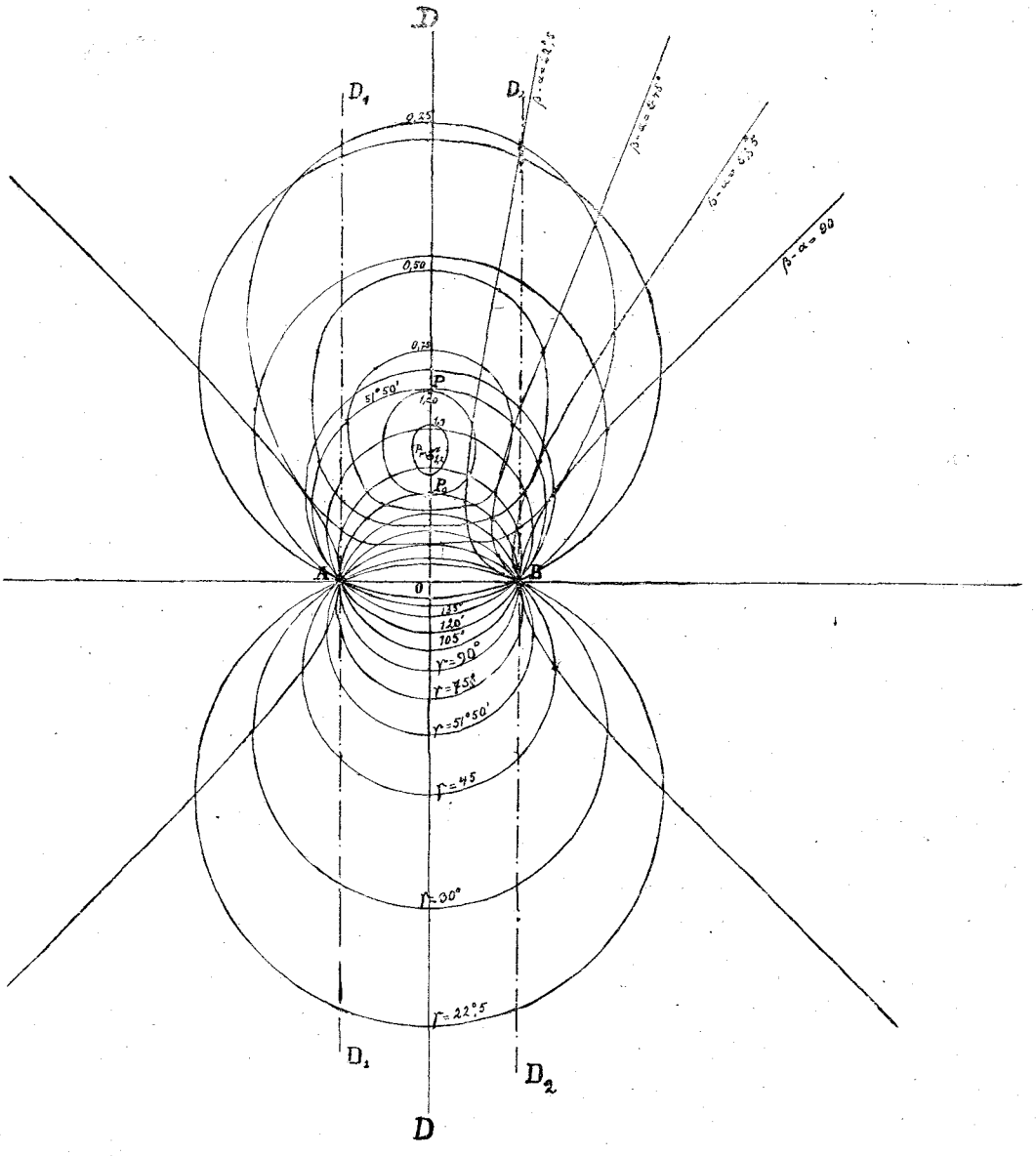
Изъ уравненія (2) найдемъ, что значенію $P_{max} = \frac{32}{27} = 1{,}195$ отвѣчаетъ вершина остроугольнаго равнобедреннаго треугольника съ угломъ $\gamma = 180° - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} = 70°32'$.

[1]) Другого корня $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ квадратнаго относительно суммы угловъ $\alpha+\beta$ уравненія мы въ расчетъ не принимаемъ, ибо онъ даетъ для $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)$ величину, большую 1-цы.

[2]) Указаннымъ двумъ вершинамъ P_0 и P, лежащимъ надъ базисомъ AB въ силу полной симметріи фигуры относительно оси AB отвѣчаютъ и двѣ вершины P_0' и P_1' подъ нею, о чемъ мы здѣсь не упоминаемъ, ибо разсматриваемъ только верхнюю (надъ прямой AB половину чертежа.

Какъ видимъ, для равнобедренныхъ треугольниковъ всѣ выводы получаются діаметрально (въ смыслѣ расположенія вершинъ треугольниковъ) противоположными выводамъ проф. Jordan'a.

Изъ другихъ случаевъ расположенія опредѣляемой точки P разсмотримъ здѣсь точки, для которыхъ разность угловъ $\alpha - \beta = 90°$ и $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = 0$. [1]).



Черт. 4.

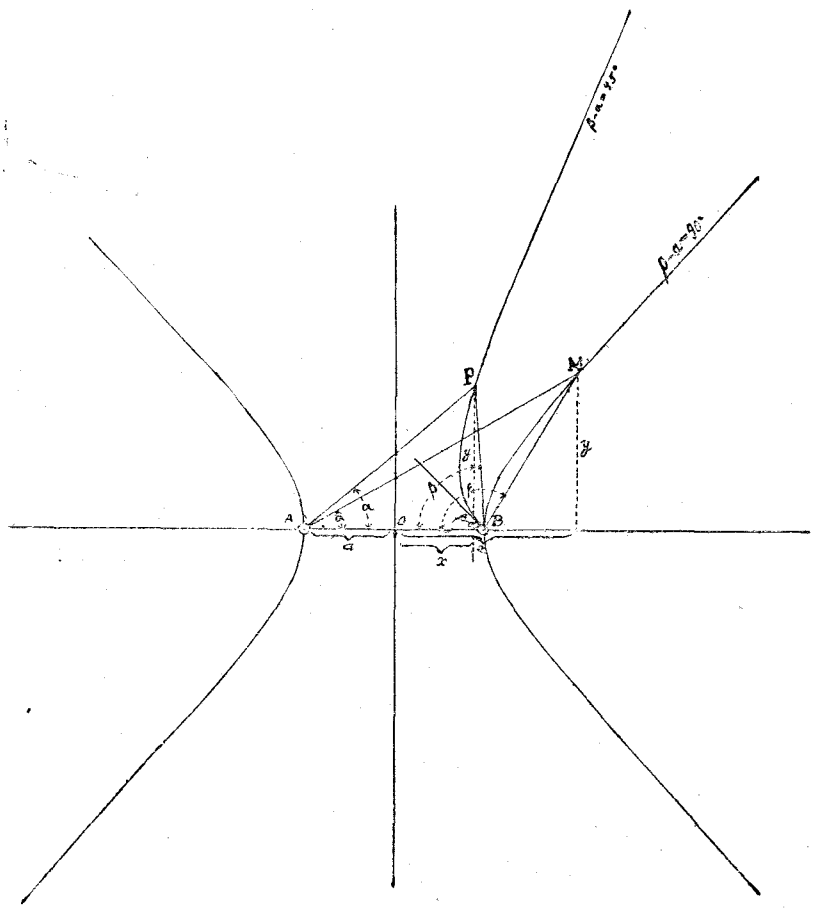
[1]) Легко доказать, что вершины треугольниковъ, для которыхъ разность угловъ при основаніи равна 90°, лежатъ на равнобокой гиперболѣ, имѣющей осью базисъ AB. Въ самомъ дѣлѣ: взявъ точку M (x, y черт. 5), для которой разность угловъ $\beta - \alpha = 90°$, имѣемъ: $g(\beta-\alpha) = \frac{tg\,\beta - tg\,\alpha}{1 + tg\,\beta . tg\,\alpha}$ гдѣ: $tg\,\beta = -\frac{y}{x-a} = \frac{y}{a-x}$; $tg\,\alpha = \frac{y}{a+x}$ $\beta - \alpha = 90°$, а половина базиса. Подставивъ найденныя значенія, для tg 'совъ угловъ β и α получимъ $tg(\beta-\alpha) = \frac{2xy}{a^2 - x^2 + y^2}$ или: $y^2 - x^2 + a^2 = 0$, ибо $tg\,(\beta-\alpha) = tg\,90° = \infty$.

Такимъ образомъ получаемъ уравненіе: $x^2 - y^2 = a^2$— равнобокой гиперболы, имѣющей осью базисъ AB = 2a.

Уравненіе (1) получаетъ тогда видъ.

$P=\mathrm{Sin}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{Cos}^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2 2(\alpha+\beta)$ или $\mathrm{Sin}\ 2(\alpha+\beta)=2\sqrt{P}$..... (3).

Точки пересѣченія данной гиперболы съ дугою вмѣщающею уголъ $\alpha+\beta=45^\circ$ суть точки касанія этой кривой съ кривой, отвѣчающей значенію $P=\frac{1}{4}$



Фиг. 5.

и всѣ кривыя, для которыхъ $P>\frac{1}{4}$ помѣщаются внутри области, ограниченной вѣтвями названной гиперболы.

Замѣтимъ здѣсь, что для точекъ сливающихся съ одной изъ данныхъ точекъ A, или B углы β или α обращаются въ 0 и вѣсъ P равенъ 0.

Черезъ точки A и B не проходитъ ни одна изъ кривыхъ равнаго вѣса. Говоря о точкахъ пересѣченія равнобокой гиперболы съ описанными на базисѣ AB какъ на хордѣ дугами окружностей, вмѣщающими данный уголъ, мы не принимаемъ поэтому въ разсчетъ вершинъ A и B гиперболы, черезъ которыя всѣ данныя дуги проходятъ.

Перпендикуляръ DD $(\alpha-\beta)=0$) и указанная равнобокая гипербола даютъ возможность намѣтить рядъ точекъ, принадлежащихъ кривымъ, отвѣчающимъ данному значенію P, что мы и сдѣлаемъ.

На перпендикулярѣ DD (черт. 4) кромѣ точекъ Po и P_1 отвѣчающихъ значенію $P=1$ и точки P max отвѣчающей наибольшему значенію вѣса P max $=1{,}195$; мы изъ уравненія $P=\mathrm{Sin}^2(\alpha+\beta)\,[1-\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)]=\mathrm{Sin}^2\gamma\,(1+\mathrm{Cos}\,\gamma)$ вычислимъ значенія:

$P=$	0,03	0,14	0,375	0,7	1,	1,15	1,12	0,85
при $\gamma=$	150°	135	120	105	90	75	60	45
$P=$	047	0,12						
$\gamma=$	30	15.						

и отмѣтимъ эти точки, какъ точки пересѣченія перпендикуляра DD съ соотвѣтствующими дугами.

Для вѣтвей равнобокой гиперболы $\mathrm{Cos}(\alpha - \beta) = 0$ легко изъ уравненія

$$P = \mathrm{Sin}^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{Cos}^2(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2\ 2\ (\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\mathrm{Sin}^2\ 2\mu$$

находятся значенія P равны:

$$P = 0{,}06\ \ 0{,}19\ \ 0{,}25\ \ 0{,}19\ \ 0{,}06.$$

для точекъ пересѣченія данной вѣтви съ указанными дугами, вмѣщающими уголъ γ, равный

$$75^\circ\ ,\ 60^\circ\ \ 45^\circ\ \ 30^\circ\ \text{и}\ 15^\circ.$$

Какъ сказано выше при $\gamma = 45$ вѣсъ P получаетъ свое наибольшее значеніе $P = 0{,}25$. Кривая, отвѣчающая этому значенію P касается гиперболы въ данной точкѣ; всякая кривая, отвѣчающая значеніямъ $P > 0{,}25$ до вѣтвей гиперболы не доходитъ.

Далѣе легко вычисляются значенія P для возстановленныхъ въ точкахъ A и B перпендикуляровъ D_1D_1 и D_2D_2 къ прямой AB.

Для этихъ прямыхъ одинъ изъ угловъ α или $\beta = 90^\circ$ разность $(\alpha - \beta)$ равна $90 - \beta$, или $90 - \alpha$, сумма $\alpha + \beta = 90^\circ + \beta$ или $90^\circ + \alpha$ и величина P опредѣляется равный:

$$P = \frac{\mathrm{Sin}^2\,\beta\ 4\ \mathrm{Cos}^2\,\beta}{1+\mathrm{Sin}^2\,\beta} = \frac{\mathrm{Sin}^2\,2\beta}{1+\mathrm{Sin}^2\beta} = \frac{\mathrm{Sin}^2\,2\gamma}{1+\mathrm{Cos}^2\gamma}$$

равный: 0,25 0,6 0,66 0,43, для
угловъ $\gamma =$ 75° 60° 45° 30°.

Замѣтимъ здѣсь, что наибольшее значеніе $P = 0{,}72$ получается для точки пересѣченія указаннаго перпендикуляра съ дугою, вмѣщающею уголъ $\mu = 40^\circ 10'$ опредѣленный изъ уравненія

$$\mathrm{Cos}^2\,\gamma + \mathrm{Cos}\,\gamma - 1 = 0.$$

Кривая, отвѣчающая значенію $P = 0{,}72$ касается перпендикуляровъ D_1D_1 и D_2D_2 въ указанныхъ точкахъ всѣ же кривыя, отвѣчающія значеніямъ $P > 0{,}72$, лежатъ внутри площади, ограниченной этими перпендикулярами.

Какъ видно изъ уравненія (1) въ построеніи кривыхъ равновыгоднаго положенія точекъ имѣютъ большое значеніе кривыя, отвѣчающія данному значенію разности $\beta - \alpha$, измѣренныхъ при концахъ базиса AB угловъ.

Обозначивъ черезъ m постоянную величину $\mathrm{tg}(\beta - \alpha)$ найдемъ уравненіе:

$$\mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha} = m$$

нашей кривой въ биполярной, или

$$\frac{\frac{y}{a-x} - \frac{y}{a+x}}{1+\frac{y^2}{(a-x)(a+x)}} = m$$

въ прямоугольной системѣ координатъ, принимая базисъ AB за ось абсциссъ и средину его за начало этой системы (см. черт. 5).

Приведенное къ виду:

$$mx^2 - my^2 - 2xy = ma^2 \ . \ . \ . \quad (4)$$

данное уравненіе представляетъ собою уравненіе равнобокой гиперболы.

Повернувъ ось абсциссъ на уголъ Θ, опредѣляемый изъ уравненія: $\mathrm{tg}\ 2\theta = \frac{1}{m} = \mathrm{Cotg}\,(\beta - \alpha)$ мы приведемъ уравненіе (4) къ каноническому виду:

$$x^2 - y^2 = a^2\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}, \text{ или}$$

$$x^2 - y^2 = a_1{}^2 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5),$$

гдѣ $a^1 = a\sqrt{\mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)}$ длина полуоси гиперболы.

Такимъ образомъ искомое геометрическое мѣсто точекъ для которыхъ разность угловъ $\beta - \alpha$ есть данная величина представляетъ собою равнобокую гиперболу, ось коей $a_1 = a\sqrt{\mathrm{Sin}\,(\beta - \alpha)}$ наклонена къ базису подъ угломъ Θ, составляющимъ половину дополнительнаго къ разности угловъ $\beta - \alpha$ до 90° угла.

Касательная къ гиперболѣ въ точкѣ B наклонена къ базису AB, подъ угломъ $\delta = \beta - \alpha$, что совершенно аналогично дугѣ круга, построенной на прямой AB, какъ на хордѣ и вмѣщающей данный уголъ $\alpha + \beta$. Продолженная за ось AB вѣтвь гиперболы даетъ геометрическое мѣсто точекъ, для которыхъ разность угловъ $\beta - \alpha$ составляетъ дополненіе къ данной разности угловъ до 180°, что опять-таки отвѣчаетъ другѣ круга.

Пользуясь сказаннымъ, мы построимъ равнобокія гиперболы, отвѣчающія значеніямъ $\beta - \alpha = 22^\circ{,}5; 45^\circ; 67^\circ{,}5$ и 90° и найдемъ значенія P отвѣчающія точкамъ пересѣченія этихъ гиперболъ съ дугами окружностей вмѣщающими уголъ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 22\frac{1}{2}^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ$ и 120°.

Надписавъ на чертежѣ взятыя изъ таблицы значенія P мы построимъ по точкамъ кривыя, отвѣчающія значеніямъ P равнымъ $P = 1{,}1,\ 1,\ 0{,}75,\ 0{,}5$ и 0,25.

Какъ видно изъ черт. 4, кривыя равныхъ значеній P представляютъ собою кривыя овальнаго очертанія касательныя въ точкахъ, лежащихъ на перпендикулярѣ DD къ дугамъ окружностей вмѣща-

ющимъ данный уголъ $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ и къ вѣтвямъ гиперболы, отвѣчающей опредѣленному значенію разности угловъ $\beta - \alpha$ или $\alpha - \beta$.

Значеніе P для равнобедренныхъ треугольниковъ быстро уменьшаются для треугольниковъ тупоугольныхъ и сравнительно медленно для треугольниковъ остроугольныхъ.

Въ частности кривая отвѣчающая значенію $P = 1$ касается другъ окружности вмѣщающихъ углы $\gamma = 90^\circ$ (точка P_0) и $51^\circ\ 50'$ (точка P, и почти касается вѣтвей гиперболы, отвѣчающей разности $\beta - \alpha = 22^\circ,5$.

Остроугольные равнобедренные Δ-ки съ угломъ γ при опредѣляемой точкѣ не мѣнѣе $51^\circ\ 50'$ и близкія къ равнобедреннымъ остроугольные треугольники съ разностью угловъ при основаніи не свыше $22^\circ,5$ представляются поэтому столь же, а во-многихъ случаяхъ и болѣе выгодными для прямой засѣчки, какъ и равнобедренный прямоугольный трехугольникъ AP_0B, построенный на базисѣ AB, какъ гипотенузѣ.

И здѣсь, какъ и въ трехугольникахъ равнобедренныхъ, выводы получаются обратными выводамъ *проф.* Iordan'a. Выгодными для прямой засѣчки представляются близкіе къ равнобедреннымъ остроугольные, а *не* тупоугольные трехугольники ибо ущербъ въ точности опредѣленія точки компонсируется здѣсь значительнымъ увеличеніемъ ихъ площади.

Данныя кривыя могутъ служить пособіемъ при выборѣ выгодной для прямой засѣчки комбинаціи точекъ и въ этомъ отношеніи, онѣ представляются болѣе раціональными, нежели приведенныя на черт. 2 кривыя равной точности. Послѣднія кривыя сохраняютъ свое значеніе для графическаго или механическаго уравновѣшиванія положеныя точки опредѣленной болѣе чѣмъ съ двухъ точекъ. Въ этомъ случаѣ мы, пользуясь этими кривыми легко опредѣлимъ отвѣчающій данной комбинаціи вѣсъ опредѣленія точки и можемъ принять его въ расчетъ при выводѣ уравновѣшеннаго значенія координатъ послѣдней.

Обобщеніе данныхъ выводовъ на случай боковой и обратной засѣчки точекъ составитъ предметъ особой замѣтки, имѣющей появиться въ ближайшемъ будущемъ.