# 11. Нѣсколько упрощенныхъ пріемовъ при графическомъ рѣшеніи задачъ кристаллографіи.

**Е. С. Федорова.**

(Доложено 25 октября 1910 г.).

Въ этой замѣткѣ не имѣетъ въ виду ни какихъ-либо существенныхъ нововведеній, ни какого-либо систематическаго рѣшенія графическихъ вопросовъ. Всѣ задачи, о которыхъ здѣсь трактуется, могутъ быть рѣшены въ кристаллографическихъ проекціяхъ по правиламъ, излагаемымъ въ элементарныхъ курсахъ.

Но при томъ широкомъ развитіи графическихъ рѣшеній, какое получила кристаллографія въ самое послѣднее время, а особенно при введеніи кристаллохимическаго анализа, самое незначительное упрощеніе или сокращеніе въ пріемахъ получаетъ весьма существенное практическое значеніе. Наконецъ, нѣкоторыя правила, приводящія къ сокращеніямъ графическихъ операцій по особой спеціальности ихъ приложенія лишь въ опредѣленныхъ, хотя и многочисленныхъ, случаяхъ, неудобно помѣщать въ элементарныхъ курсахъ, гдѣ должны получать мѣсто лишь правила наиболѣе общаго значенія, и притомъ излагаемыя систематично, чтобы учащійся получилъ дѣйствительную возможность рѣшать задачи всякаго рода, хотя бы и не всякій разъ простѣйшимъ образомъ.

Именно по указанной причинѣ здѣсь приходится отмѣтить и такія правила, которыя пришлось примѣнять втеченіи десятковъ лѣтъ, никогда и нигдѣ не упоминая о нихъ въ печатныхъ трудахъ.

Въ опубликованныхъ мною руководствахъ по кристаллографіи для рѣшенія угловыхъ задачъ рекомендуется примѣненіе стереографическихъ, а для рѣшенія задачъ, связанныхъ съ числовыми величинами индексовъ символа—прямолинейныхъ проекцій (то есть линейной и гномонической). Спеціально для задачъ послѣдняго рода рекомендуется построеніе „основнаго параллелограмма“, имѣя который весьма просто находить проекціи по символамъ и обратно; но очень часто задача не выходитъ изъ предѣловъ одного пояса, и во всѣхъ случахъ можетъ быть приведена къ двумъ болѣе простымъ задачамъ въ двухъ поясахъ.

Поэтому весьма естественно, что и упрощающіе спеціальные пріемы именно имѣютъ въ виду задачи въ предѣлахъ отдѣльныхъ поясовъ, хотя могутъ относиться къ поясамъ весьма различнаго положенія на сферѣ.

И здѣсь я начну съ такой простѣйшей задачи развитія формъ одного пояса.

Такъ какъ теперь каждый занимающійся можетъ имѣть въ своемъ распоряженіи стереографическія сѣтки и такъ какъ всѣ упрощенія, о которыхъ здѣсь идетъ рѣчь, связаны съ пользованіемъ такими сѣтками, то я именно и предполагаю это пользованіе; безъ употребленія сѣтокъ не будетъ и тѣхъ упрощеній, о которыхъ здѣсь ведется рѣчь.

Понятно, что на прилагаемыхъ схематическихъ фигурахъ я не вычерчиваю этихъ сѣтокъ, а изображаю ихъ простыми кругами съ отмѣткою цифрами 0 и 90° главныхъ полюсовъ сѣтки.

Итакъ, перехожу къ рѣшенію поставленной задачи.

Какъ извѣстно, для опредѣленія пояса, нужно имѣть положеніе трехъ граней, а слѣдовательно, величину двухъ угловъ, опредѣляющихъ ихъ взаимное положеніе.

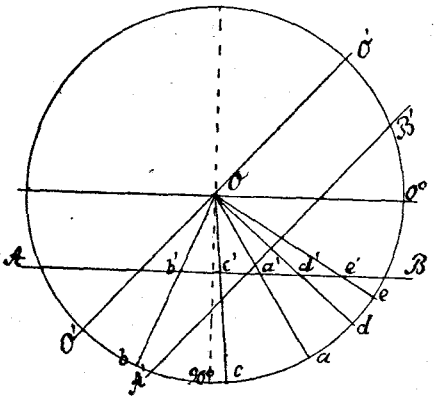
Сначала для простоты предположу поясъ, выражающійся окружностью проекціи, въ которой на сѣткѣ показаны дѣленія въ цѣлыхъ градусахъ. Ясно, что въ этомъ случаѣ углы могли бы быть легко непосредственно откладываемы съ точностью до четверти градуса; въ этомъ смыслѣ этотъ случай является особенно благопріятнымъ и допускаетъ наиболѣе точное рѣшеніе задачъ.

Предположу еще, что полюсъ одной изъ граней пояса совмѣщенъ съ однимъ изъ главныхъ полю

совъ сѣтки, отмѣченнымъ цифрою 0. Пусть полюсы двухъ другихъ граней $a$ и $b$ (фиг. 1).

Ясно, что этимъ гранямъ вообще могутъ быть приданы различные символы. Но, ради простоты, я разсмотрю одинъ частный случай, изъ рѣшенія котораго будетъ видно, какъ поступать и во всѣхъ другихъ случаяхъ.

Фиг. 1.




Пусть символъ точки 0 есть 010, точки $a$—110, а точки $b$—$1\bar{1}0$.

Для рѣшенія задачи провожу прямую AB, параллельную прямой полюсовъ 00 болѣе или менѣе на произвольномъ разстояніи. Проще всего это достигается простымъ приложеніемъ къ линіи полюсовъ линейки со строго параллельными краями, какъ обыкновенно онѣ и дѣлаются.

Проведя радіусы $Oa$ и $Ob$, на проведенной прямой нахожу точки $a'$ и $b'$, положеніе которыхъ соотвѣтствуетъ положенію въ гномонической проекціи пояса полюсовъ граней $a$ и $b$, причемъ одна изъ граней пояса (010) представлена точкою на безконечности.

Принимая во вниманіе гармоническія отношенія точекъ на прямой, мы прямо найдемъ, что та изъ нихъ, а именно $c'$, которая дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ $a'b'$, и есть выраженіе грани (100). Отсюда положеніе той же грани въ гномостереографической проекціи получится, если проведемъ радіусъ $Oc'$ до пересѣченія съ окружностью проекціи въ точкѣ $c$, которая и будетъ искомою проекціею.

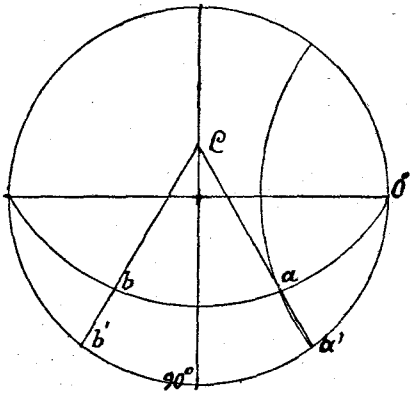
Въ то же время мы получаемъ величину отрѣзка $a'c'$ ($=c'b'$), который служитъ единицею на сторонахъ основного параллелограма, когда послѣдній служитъ намъ для нахожденія символовъ граней. Если мы отложимъ рядъ такихъ единицъ напр. вправо въ видѣ точекъ $d'$, $e'$..., то точки эти выразятъ въ поясѣ положеніе граней 120,130... Вообще, имѣя единицу въ видѣ опредѣленнаго отрѣзка, мы легко для каждой грани даннаго пояса заданной опредѣленнымъ символомъ, опредѣленно положеніе на проведенной прямой, а отъ этого положенія, проведеніемъ чрезъ нихъ радіусовъ, легко перейдемъ къ соотвѣтственному положенію тѣхъ же граней въ стереографической проекціи пояса, то есть по окружности проекціи. Напр. точка $d$ выразитъ грань (120), $e$—грань (130) и т. д.

Это то упрощенное съ помощью стереографической сѣтки рѣшеніе во всякомъ случаѣ одной изъ главнѣйшихъ задачъ практической кристаллографіи мы можемъ обобщить въ самыхъ разнообразныхъ отношеніяхъ и даже довести до полной общности хотя при этомъ по существу явится все-таки и нѣкоторое усложненіе рѣшенія.

Первое ея обобщеніе мы отнесемъ къ тому случаю, когда полюсы грани (010) не главныя точки 0° а нѣкоторыя другія (діаметрально противоположныя) точки $O'$ той же окружности проекціи.

Въ этомъ случаѣ по существу мы производимъ тѣ же операціи, начиная съ проведенія прямой $A'B'$, параллельной новой линіи полюсовъ, и ничего не теряемъ въ точности рѣшеній. Нѣсколько усложняется лишь отсчетъ угловъ, который дается не прямо дѣленіями окружности проекціи, но лишь по разностямъ этихъ отсчетовъ, что во всякомъ случаѣ уже требуетъ нѣкотораго умственнаго напряженія.

Фиг. 2.




Второе обобщеніе задачи относится къ поясу, изображаемому не окружностью проекціи (фиг. 2), а нѣкоторымъ меридіаномъ, проходящимъ чрезъ главные же полюсы сѣтки 0°.

Помѣстивъ проекцію одной изъ граней пояса напр. (010) въ этомъ главномъ полюсѣ и имѣя еще для граней (110) и ($1\bar{1}0$) точки $a$ и $b$, мы можемъ перенести положеніе двухъ послѣднихъ точекъ на окружность проекціи съ помощью проведенныхъ на

сѣткѣ параллельныхъ круговъ въ точки $a'$ и $b'$, нисколько не измѣняя углового соотношенія между данными гранями. Мы сводимъ задачу въ новой формѣ къ простѣйшему, уже разсмотрѣнному, ея виду.

При рѣшеніи этомъ мы однако уже не мало теряемъ въ точности, если точки $a$ и $b$ не попадаютъ на проведенныя уже на сѣткѣ дуги малаго круга, и находятся въ промежуточныхъ точкахъ. Конечно, точность увеличилась бы, если бы въ сѣткахъ дуги малаго круга проводились не черезъ 5 градусовъ, а гуще. Но такое предполагаемое увеличеніе точности не оправдывались бы громадною запутанностью самой сѣтки; можно сказать, съ такою густою сѣткою вообще было бы уже трудно работать, почему такія сѣтки вообще никогда и не примѣнялись на практикѣ.

Точность нѣсколько увеличится, если мы опредѣлимъ полюсъ $C$ дуги большого круга $a\,b$ (что впрочемъ очень легко сдѣлать на сѣткѣ) и тогда прямо изъ $C$, какъ изъ центра, спроектируемъ лучами точку $a'$ изъ $a$, и $b'$ изъ $b$.

Самымъ общимъ случаемъ будетъ тотъ, когда данный поясъ выражается на сѣткѣ дугою большого круга произвольнаго положенія. Если бы мы мысленно сдѣлали на сферѣ поворотъ такого пояса (около вертикальной оси), и привели принадлежащія ему точки на окружности проекціи въ положеніе главныхъ полюсовъ сѣтки, мы привели бы эту задачу самаго общаго вида къ предъидущему.

Проще и точнѣе всего достичь это простымъ копированіемъ съ одной сѣтки на другую. Для этого мы можемъ наложить эту вторую сѣтку на данную такъ, чтобы главныя полюсы второй совмѣстились съ упомянутыми точками первой.

То же рѣшеніе задачи получается и при другихъ символахъ граней пояса, если мы на основаніи общихъ познаній кристаллографіи (въ частности ученія о поясахъ) будемъ въ каждомъ поясѣ различать исходныя грани (какъ 0° и $c$ въ разсмотрѣнномъ случаѣ) и грани первую ($a$), вторую ($d$), третью ($e$) и т. д.

Но особенно часто приходится примѣнять это построеніе для главныхъ поясовъ тригоналоидныхъ кристалловъ и кристалловъ гипогексагональнаго типа.

Если для тригоналоидныхъ кристалловъ въ главномъ полюсѣ 0° мы имѣемъ символъ $(1\bar{1}0)$, въ точкѣ $a$ $(10\bar{1})$ и въ точкѣ $b$ $(01\bar{1})$, то въ точкѣ $c$ получается символъ $(11\bar{2})$, а въ точкѣ $e$ символъ $(2\bar{1}\bar{1})$ и т. д. (фиг. 1).

Если для гипогексагональныхъ кристалловъ въ главномъ полюсѣ 0° мы имѣемъ символъ $(010\bar{1})$, въ точкѣ a (0110), а въ точкѣ $b$ (0011), то въ точкѣ $c$ получается символъ (0121), а въ точкѣ $e$ $(021\bar{1})$ и т. д.

Поэтому, главнѣйшія точки этихъ поясовъ на прямой $AB$ легко выводятся въ обоихъ случаяхъ изъ отрѣзка $a'b'$. Одна изъ такихъ точекъ ($c'$) получается прямымъ дѣленіемъ этого отрѣзка пополамъ, другая ($e'$) отложеніемъ отрѣзка $a'e'$, равнаго $a'b'$ и т. д.

Но нерѣдко приходится имѣть для кристалловъ гипогексагональнаго типа съ тѣмъ случаемъ, когда въ полюсѣ 0° находится символъ (0121), а въ полюсѣ $c$ символъ $(010\bar{1})$; пусть въ точкѣ $e$ помѣщается символъ (0110); тогда, чтобы найти точку, которой соотвѣтствуетъ символъ $(0\bar{2}1\bar{1})$, нужно раздѣлить отрѣзокъ $c'e'$ на три равныя части, и искомому символу соотвѣтствуетъ именно точка $a'$, отстоящая отъ $c'$ на одной трети единицы.

Само собою разумѣется, что во всѣхъ случаяхъ (посредствомъ радіусовъ круга проекціи) мы одинаково перейдемъ отъ точекъ прямой $AB$ къ соотвѣтственнымъ точкамъ на окружности проекціи то есть, къ настоящимъ гномостереографическимъ проекціямъ граней даннаго пояса.

Другого рода задачи кристаллографіи требуютъ производства сдвиговъ кристаллографическаго комплекса. Это всегда бываетъ нужно для опредѣленія символовъ комплекса въ моноклинныхъ и триклинныхъ кристаллахъ.

Пусть, наприм., точкѣ 0° принадлежитъ символъ (001), точкѣ $a$ символъ (111), а точкѣ $b$—символъ $11\bar{1}$. Главнымъ числомъ символа комплекса называется то, которое выражаетъ величину угла между (001) и (111) послѣ сдвига.

Когда по приведеннымъ даннымъ мы найдемъ на прямой $AB$ отрѣзокъ $a'b'$ и среднюю точку $c'$, то самый сдвигъ проявляется въ такомъ перемѣщеніи этого отрѣзка по прямой, чтобы $c'$ (а слѣдовательно и $c$) оказалась на радіусѣ, перпендикулярномъ къ линіи полюсовъ 0°. Ясно, что послѣ сдвига точки $a'$ и $b'$ займутъ симметричное положеніе, а слѣдовательно, углы полюсовъ 0° какъ съ $a$, такъ и съ $b$, будутъ одинаковы, а въ данномъ случаѣ выразятъ главное число символа комплекса.

Въ тетрагоналоидныхъ кристаллахъ рѣшеніе вопроса о принадлежности даннаго комплекса къ модальностямъ перваго или второго рода часто приводится къ отсчету угловъ $0°c$ и $ab$, а именно опредѣленію того, который изъ этихъ угловъ ближе къ

прямому; и если окажется, что $ab$ ближе къ прямому, чѣмъ $Oc$, то за безконечно удаленную точку на прямой $AB$ придется принять не ту, которая находится въ 0°, а одну изъ точекъ $a$ или $b$, смотря по условіямъ задачи, и тогда опять придется произвести сдвигъ, чтобы привести тотъ же уголъ точно къ величинѣ 90°; но ясно, что въ этомъ случаѣ сдвигъ имѣетъ меньшую величину.

Также въ кристаллахъ гипогексагональнаго типа, чтобы опредѣлить, въ какой изъ точекъ 0°, $a$ или $b$ слѣдуетъ выставить символъ $(01\bar{1}1)$, нужно опредѣлить какая изъ предоставленныхъ этими точками граней дѣлаетъ съ одного изъ промежуточныхъ граней уголъ, наиболѣе близкій къ прямому; именно такая грань и получаетъ указанный символъ.

Въ этомъ случаѣ мы съ обѣихъ сторонъ отрѣзка $a'b'$ на прямой $AB$ откладываемъ на ней той же величины отрѣзки напр., $a'e'$, а если окажется, что ближайшій къ прямому есть уголъ $be$, то именно въ точкѣ $b$ слѣдуетъ поставить символъ $(01\bar{1}\bar{1})$ и ее принять за безконечно-удаленную на прямой $AB$, и тогда опять для приведенія угла $b$ точно къ величинѣ прямого угла нужно произвести сдвигъ наименьшей величины.

Если для главнаго пояса гексагоналоидныхъ кристалловъ (все равно кубическаго или гипогексагональнаго типа) мы имѣемъ точку $c$ совмѣщенною съ однимъ изъ главныхъ полюсовъ сѣтки, то есть величину угла $Oc$ равною 90° (все равно, является ли эта величина непосредственно изъ измѣреній или получилась послѣ сдвига), то задача нахожденія промежуточныхъ точекъ $e$ можетъ быть (хотя и не съ математическою точностью) рѣшена безъ спеціальнаго построенія простымъ отложеніемъ угла $ae$ равнаго 30°.

Въ какихъ предѣлахъ допустимо такое приближенное рѣшеніе видно изъ слѣдующей таблицы:

Уголъ $ca$

22°0, 23°0, 24°0, 25°0, 26°0, 27°0, 28°0, 29°0, 30°0, 31°0, 32°0, 33°0, 34°0, 35°0, 36°0, 37°0, 38°0.

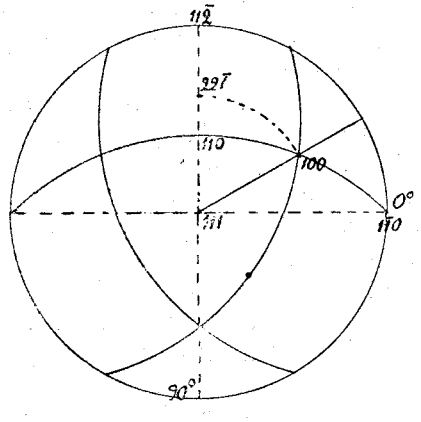
Уголъ $ce$ [1]).

50°30, 51°50, 53°10, 54°20, 55°40, 56°50, 57°55, 59°0, 60°0, 61°0, 61°55, 62°50, 63°40, 64°30, 65°20, 66°10, 67°45.

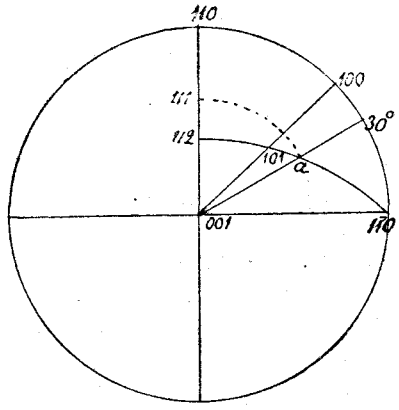
Мы видимъ изъ этой таблицы, что сдѣлавъ вмѣсто построенія простое отложеніе угла, какъ показано, мы въ предѣлахъ отъ 27°0 до 33°0 не дѣлаемъ ошибки, превышающей 10 минутъ, то есть такой, которая при графическихъ операціяхъ такого рода во всякомъ случаѣ есть пренебрегаемая величина. Если за этими предѣлами мы будемъ откладывать не ровно 30°0, а на полградуса меньше, то даже въ предѣлахъ отъ 24°0 до 37°0 мы едва сдѣлаемъ ошибку, превышающую четверть градуса, то есть ту предѣльную величину погрѣшности, съ какой мы вообще можемъ наносить точки на діаграмму. Случаевъ, когда въ комплексѣ данные углы заходятъ даже за эти предѣлы, остается очень мало.

Наконецъ, разсмотримъ одно спеціальное построеніе, которое хотя и не имѣетъ общаго примѣненія, но все-таки примѣнимо въ очень многихъ случаяхъ и притомъ способствуетъ даже точности рѣшенія.

Фиг. 3.




Фиг. 4.




Общеизвѣстно, что если возьмемъ тригональный кристаллъ (фиг. 3) и проведемъ изъ полюса 0°, которому соотвѣтствуетъ символъ $(1\bar{1}0)$ черезъ полюсъ (100) дугу большого круга до пересѣченія съ другою линіей полюсовъ 90°, то получимъ въ пересѣ-

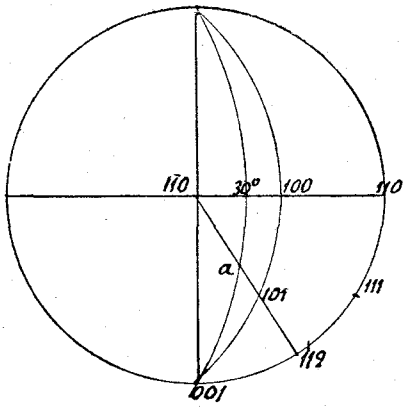
[1]) Для котораго тангенсъ втрое больше, чѣмъ тангенсъ перваго угла.

ченіи полюсъ (110); если же изъ центра, представленнаго полюсомъ (111), отложимъ на томъ же діаметрѣ уголъ, равный углу (111) : (100), то получимъ полюсъ $(22\bar{1}) = (11\bar{2}) + (111)$, который слѣдовательно играетъ въ этомъ поясѣ роль первой грани, тогда какъ грань (110) играетъ уже роль второй, потому что $(330) = (22\bar{1}) + (111) = (11\bar{2}) + 2(111)$.

Итакъ, это простое построеніе въ поясѣ даетъ намъ непосредственно положеніе первой грани пояса по данной второй; понятно, что можно сдѣлать и обратное построеніе второй грани по данной первой грани $(22\bar{1})$: для этого нужно на діаметрѣ (111) : (100), дѣлающемъ съ линіею полюсовъ 0° уголъ въ 30°, отложить уголъ, равный (111) : $(22\bar{1})$, и тогда получимъ полюсъ (100), а изъ него, по вышесказанному, найдемъ и полюсъ (110).

Теперь допустимъ, что мы имѣемъ ромбическій кристаллъ съ комплексомъ, относящимся къ модальностямъ второго рода (фиг. 4), причемъ даны полюсы (100) и (101) и нужно опредѣлить полюсъ (111) (для полученія главнаго числа символа комплекса). На основаніи только-что объясненнаго относительно нахожденія первой грани въ поясѣ по данной второй, мы легко получимъ искомый уголъ (001) : (111), если на дугѣ большого круга, проходящей чрезъ главный полюсъ сѣтки $(1\bar{1}0)$ и данный полюсъ (101), найдемъ точку пересѣченія $a$ съ діаметромъ сѣтки, образующемъ съ линіею полюсовъ 90° уголъ 30°0.

Фиг. 5.




Если отъ центра отложимъ этотъ уголъ на линіи (100) (110), то найдемъ полюсъ (111). Относительно большая точность построенія здѣсь обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что мы именно находимъ точку пересѣченія $a$ съ реально-проведеннымъ на сѣткѣ діаметромъ.

Для разсмотрѣннаго весьма частнаго случая мы могли бы выразить найденное правило такимъ образомъ: чтобы получить полюсъ (111) мы находимъ пересѣченіе дуги большого круга, проведенной чрезъ главный полюсъ сѣтки $(1\bar{1}0)$ и данный полюсъ (101) съ дугою большого круга, проведенною изъ главнаго полюса сѣтки (001) подъ угломъ 30°0 къ линіи полюсовъ (110) : (001). Примѣняя это правило, мы рѣшимъ ту же задачу и при всякой другой оріентировкѣ кристаллическаго комплекса. Напр., на фиг. 5 показано, какъ найти полюсъ (111) при заданномъ положеніи полюсовъ (001), $(1\bar{1}0)$ и (101). Уголъ, который мы отсчитываемъ на сѣткѣ, между полюсомъ (001) и полученною точкою пересѣченія $a$, даетъ возможность непосредственно нанести искомый полюсъ (111).

Но такъ какъ приведенное простое построеніе въ сущности сводится къ построенію въ ортогональныхъ поясахъ первой грани по второй и обратно, то воспользоваться этимъ пріемомъ можно во многихъ и разнообразныхъ случаяхъ.

Если на фиг. 4 и 5 мы проведемъ дугу большого круга изъ $(1\bar{1}0)$ чрезъ полюсъ (101), то непосредственно находимъ полюсъ (112), и въ сущности рѣшенная задача какъ бы сводится къ рѣшенію задачи найти полюсъ (111) по данному полюсу (112) (конечно лишь въ ортогональныхъ поясахъ).

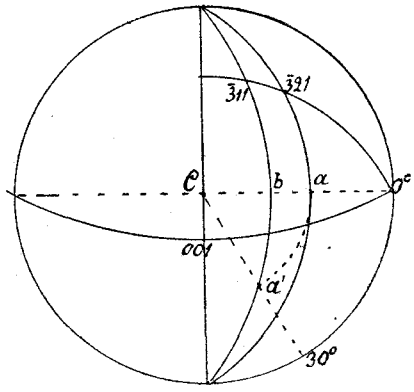
Назовемъ въ поясѣ (112) : (111) ближайшій къ (112) главный полюсъ сѣтки (въ нашемъ частномъ случаѣ 001) первымъ, другой главный полюсъ сѣтки того же пояса (въ нашемъ частномъ случаѣ 110) вторымъ и наконецъ третій главный полюсъ сѣтки (въ нашемъ частномъ случаѣ $1\bar{1}0$) третьимъ, тогда независимо отъ частныхъ символовъ, къ которымъ относится разсматриваемая задача, мы можемъ рѣшеніе этой задачи формулировать такимъ образомъ: чтобы по данной второй грани пояса (112) найти первую грань (111) того же пояса, находимъ пересѣченіе пояса, проходящаго чрезъ данную грань и третій главный полюсъ сѣтки, съ дугою большого круга, проходящаго чрезъ первый главный полюсъ и образующею съ линіей перваго и третьяго главныхъ полюсовъ уголъ 30°0.

Характеристичною особенностью задачъ, при рѣшеніи которыхъ мы можемъ воспользоваться объясненнымъ здѣсь упрощеннымъ пріемомъ, служитъ то, что мы можемъ распространить это рѣшеніе нетолько на первую и вторую грани какого-либо пояса, но и на самые пояса, которые мы можемъ отличать какъ первый и второй. Ясно, что если чрезъ полюсъ $(1\bar{1}0)$ (фиг. 4 и 5) съ одной стороны и чрезъ полюсы (111) или (112) съ другой проведемъ два пояса, то получимъ такіе, которые мы можемъ характеризовать какъ первый и второй;

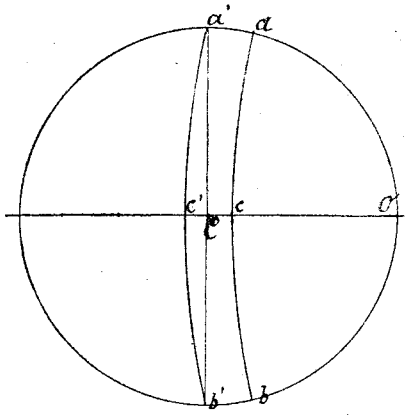
если имѣется какая-нибудь грань въ одномъ изъ этихъ поясовъ, то проведя чрезъ нее и полюсъ (110) поясъ, мы найдемъ соотвѣтственную грань другого пояса.

Вслѣдствіе этого получается возможность примѣнять построенія даже къ ирраціональнымъ поясамъ и въ результатѣ получать построеніе новыхъ раціональныхъ граней. Чтобы сдѣлать этотъ выводъ наглядымъ, разсмотримъ слѣдующій примѣръ.

Фиг. 6.




Фиг. 7.




Данъ въ моноклинномъ кристаллѣ полюсъ грани $(\bar{3}21)$ (фиг. 6); нужно опредѣлить полюсъ грани $(\bar{3}11)$?

Мы сейчасъ увидимъ (что впрочемъ видно и изъ сущности поставленной задачи), что для рѣшенія ее совершенно безразлично, гдѣ находится полюсъ грани (001), а слѣдовательно и вообще полюсы граней кристалла, кромѣ, конечно граней даннаго пояса.

Проведя дугу большого круга чрезъ главный полюсъ сѣтки 90° и данный полюсъ, мы найдемъ въ пересѣченіи съ линіей главныхъ полюсовъ $C0^0$ точку $a$; проведемъ подъ угломъ 30° діаметръ $Ca'$ и отложимъ уголъ $Ca' = Ca$; тогда дуга большого круга изъ главнаго полюса 90° чрезъ полюсъ $a$ въ пересѣченіи съ дугою большого круга изъ полюса 0° чрезъ данный полюсъ дастъ искомый полюсъ грани $(\bar{3}11)$.

Въ данномъ случаѣ мы имѣемъ ирраціональный поясъ, проходящій чрезъ главные полюсы 0° и $C$ (второй и первый), и несмотря на то производимъ тѣ же графическія операціи, какъ если-бы этотъ поясъ былъ раціональнымъ.

Однако, какъ ни эффектно послѣднее примѣненіе описаннаго здѣсь пріема, если подъ руками имѣется таблица натуральныхъ величинъ тангенсовъ, все-таки слѣдуетъ отдать предпочтеніе справкѣ въ этой таблицѣ, такъ какъ тангексъ угла съ полюсомъ 0° полюса $(\bar{3}11)$ вдвое больше тангекса угла съ тѣмъ же полюсомъ полюса грани $(\bar{3}21)$.

Теперь перейду къ одному полезному, хотя теоретически не точному, а приближенному, пріему отложенія на сѣткѣ полюса нѣкоторой грани засѣчкою по двумъ даннымъ угламъ съ двумя другими гранями, полюсы которыхъ изображаются точками на окружности проекціи.

Вообще, въ значительномъ большинствѣ случаевъ, когда данные углы очень значительно отличаются отъ прямого, мы засѣкаемъ искомую точку посредствомъ дугъ малаго круга, центры которыхъ даны на стереографической линейкѣ. Но спеціально въ тѣхъ случаяхъ, когда одинъ или оба данные угла не очень отличаются отъ прямого, примѣненіе стереографической линейки исключается, такъ какъ получаются очень пологія дуги, для проведенія которыхъ должна служить спеціальная дуговая линейка. Пріемъ, о которомъ здѣсь ведется рѣчь, предусматриваетъ, на какое дѣленіе мы должны установить эту линейку (фиг. 7).

Пусть нужно провести дугу малаго круга $a\,c\,b$, для которой углы $Oa = Ob = Oc$. Я утверждаю, что весьма приближенно можно линейку для пологихъ дугъ установить на уголъ $Cc$ (считая по сѣткѣ, если $C$ центръ сѣтки). Въ самомъ дѣлѣ, если $a'b'$ есть діаметръ, перпендикулярный къ діаметру $CO$, и если, не измѣняя установки линейки, мы передвинемъ линейку въ параллельномъ положеніи такъ, чтобы дуга линейки прошла чрезъ концы $a'\,b'$ діаметра, то на діаметрѣ $CO$ отмѣтится точка $c'$, причемъ уголъ $Cc'$ приближенно равенъ углу $Cc$.

Чтобы видѣть эту приближенность, замѣтимъ, что для весьма маленькихъ дугъ отрѣзки $a\,a$ и $b\,b'$ можно принять за равные и параллельные прямые отрѣзки, длина которыхъ выражается нѣкоторымъ небольшимъ числамъ градусовъ на окружности сѣтки; но такъ какъ, по свойству этихъ сѣтокъ, длина гра-

дуса на окружности по линейнымъ размѣрамъ ровно вдвое больше длины градуса при центрѣ, то одинаковая съ первыми длина отрѣзка $cc'$ выразитъ ровно вдвое большее число градусовъ, и значитъ по отсчету градусовъ $Cc = Cc'$, что и требовалось доказать.

Этотъ пріемъ особенно часто примѣняется при построеніи діаграммы триклинныхъ кристалловъ, когда напр. даны углы между гранями (100), (010), (001), не очень много отличающіеся по величинѣ отъ прямыхъ угловъ.

Наконецъ, разсмотрю рѣшеніе задачи построенія діаграммы въ гномостереографической проекціи по даннымъ константамъ старой кристаллографіи.

Этимъ именемъ я отмѣчаю тѣ константы, которые введены въ науку еще со временъ Вейса, впервые опредѣлившаго понятіе кристаллографическихъ осей. Эти константы требуютъ довольно сложныхъ вычисленій, такъ какъ тѣ числа, которыя въ нихъ входятъ, никогда не опредѣляются изъ наблюденій непосредственно и стоятъ къ числамъ наблюденныхъ угловъ въ довольно сложномъ отношеніи.

Хотя уже были предложены и примѣнены на практикѣ константы другого рода, стоящія въ гораздо болѣе простомъ соотношеніи къ числамъ наблюденія или даже могущія получаться на непосредственныхъ наблюденіяхъ [1]), но если принять во вниманіе грузность аппарата сдѣланныхъ уже въ кристаллографіи работъ и отсутствіе силъ въ наукѣ, которыя занялись бы полной переработкой прежнихъ константъ въ новыя, то станетъ понятнымъ, что пройдетъ еще рядъ десяти-лѣтій постояннаго почти примѣненія этихъ установленныхъ и теперь совершенно несоотвѣтствующихъ научному уровню константъ.

Если въ обыкновенныхъ общественныхъ дѣлахъ мы видимъ борьбу интересовъ и власти, видимъ волковъ и овецъ, то становится понятнымъ, что пока волкъ остается волкомъ, онъ не хочетъ уступить покоренному, полагая (конечно ошибочно), что своимъ насиліемъ и хищничествомъ онъ дѣлаетъ пріятное для себя дѣло. И онъ будетъ держаться за это даже тогда, когда начнетъ смутно понимать, что этимъ вредитъ нетолько другимъ, но и себѣ, потому что уступивъ однажды уже свою силу и власть, онъ фактически перестаетъ пользоваться волчьимъ положеніемъ и не сможетъ вернуться къ старому. Но въ области чистой науки выполненіе безцѣльнаго и тяжкаго труда есть только уменьшеніе производительности тратящихся на науку силъ.

Здѣсь можетъ быть больше, чѣмъ въ другихъ общественныхъ явленіяхъ сказывается консерватизмъ, точнѣе инертность даже той среды, которая при нормальномъ порядкѣ вещей не могла бы быть инертной; вѣдь по существу область науки есть область преодолѣнія общественной инертности, и только тотъ трудъ можетъ быть признанъ научнымъ, въ которомъ эта инертность преодолѣвается. И все-таки инертность проявляется даже тогда, когда понимающему совершенно очевидна ея безцѣльность и даже прямой вредъ.

Если можно условиться брать такія константы, что никакихъ вычисленій не требуется, если можно принять такую систему вычисленій, что она сводится къ простѣйшимъ операціямъ сложенія и вычитанія, то невольно задаешь вопросъ, зачѣмъ именно по общему условію и съ общаго согласія выбираются именно тѣ константы, для которыхъ требуется потратить наибольшее количество и наиболѣе напряженнаго труда, зачѣмъ практикуется именно та система вычисленій, для которой нужно больше всего потратить умственной энергіи?

Однако, какъ бы то ни было, и сейчасъ мы находя кристаллографическія константы, данныя въ видѣ трехъ $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ между кристаллографическими осями и въ видѣ отношенія единичныхъ отрѣзковъ по этимъ осямъ въ формѣ:

$$a : 1 : c,$$

И та задача, которую я теперь поставилъ и къ рѣшенію которой приходится обращаться отъ времени до времени, состоитъ въ томъ, чтобы по этимъ числамъ составить діаграмму въ гномостереографической проекціи и прежде всего найти полюсы граней (100), (010), (001) и (111).

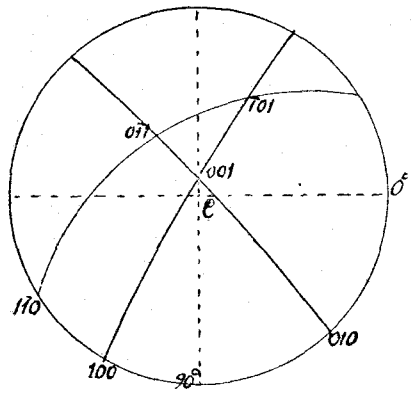
Я уже намѣтилъ рѣшеніе этой задачи въ замѣткѣ „Дополнительныя замѣчанія къ статьѣ Соколова и Артемьева объ опредѣленіи плотности сѣтокъ“ [1]) и показалъ, что благодаря новымъ таблицамъ

[1]) Константы, основанные на примѣненіи къ вычисленіямъ уравненій проективности, были предложены авторомъ еще въ 1887 въ IV этюдѣ по аналитической кристаллографіи (Горный журналъ 1887 № 4). Несомнѣнно наиболѣе простая и совершенная система кристаллографическихъ вычисленій, связанная съ употребленіемъ системы сферическихъ биполярныхъ координатъ, была предложена авторомъ въ 1904 года (Записки Имп. Минералог. Общ. XLIV 199). При этой системѣ вычисленій, которая сводится къ простѣйшимъ сложеніямъ и вычитаніямъ, сами числа константъ непосредственно получаются изъ наблюденій, такъ что часто довольно тяжелая и утомительная работа по вычисленію константъ, здѣсь совершенно отпадаетъ. Обобщеніе основной формулы этой системы вычисленій дано въ Запискахъ Горн. Инст. II 394.

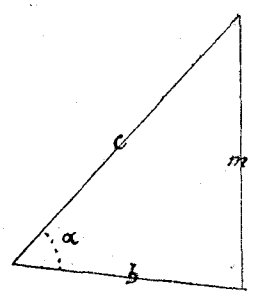
[1]) Записки Горн. Инст. II 341.

упомянутыхъ авторовъ можетъ быть упрощено и рѣшеніе этой задачи. Теперь дополняю эти указанія только деталями выполненія.

Фиг. 8.




Фиг. 9.




По самому существу данныхъ, которыя мы можемъ разсматривать какъ данныя, опредѣляющія пространственную рѣшетку, намъ приходится составить сначала граммостереографическую проекцію реберъ. Прежде всего по угламъ $\alpha$ (010 : 001), $\beta$ (001 : 100) и $\gamma$ (100 : 110) строимъ сферическій треугольникъ (фиг. 8), который оріентируемъ на сѣткѣ такимъ образомъ, чтобы ребро [001] пришлось на линію полюсовъ 90°. Затѣмъ отдѣльно (можно воспользоваться и стереографическою сѣткою) строимъ трехугольники по сторонамъ $bc$ и углу $\alpha$ между ними (фиг. 9) и такъ же треугольникъ по сторонамъ $ac$ и углу $\beta$.

Соотвѣтственныя третьи стороны этихъ треугольниковъ, очевидно выразятъ плотности m ребра $[0\bar{1}1]$ и n ребра $[\bar{1}01]$.

Отъ величинъ плотностей реберъ мы легко переходимъ къ величинамъ обратныхъ квадратовъ, пользуясь напр. графической таблицей, приложенной къ статьѣ „Изображеніе структуры кристалла векторіальными кругами“ [1]).

[1]) Записки горн. Инст. I 294.

Такимъ образомъ прямо находимъ рядъ чиселъ

| плотность | 100 | 010 | 001 | $0\bar{1}1$ | $\bar{1}01$ |
|---|---|---|---|---|---|

$$d_a = \frac{1}{a^2} \quad d_b = t \quad d_c = \frac{1}{c^2} \quad d_m = \frac{1}{m^2} \text{ и } d_n = \frac{1}{n^2}$$

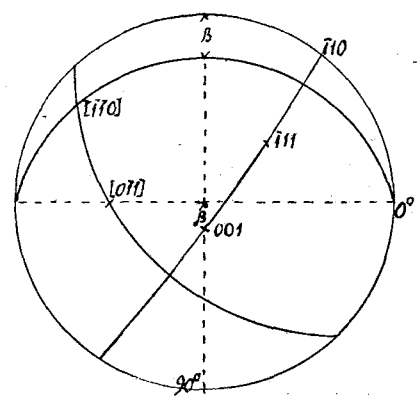
Но по таблицѣ В. И. Соколова непосредственно находимъ на координатѣ $\rho$ (фиг. 8) величину $\frac{1}{c^2}$ въ видѣ нѣкотораго числа $k$, которое должно быть равно $d_c$, а потому измѣняемъ пропорціонально всѣ числа только что приведеннаго ряда и находимъ рядъ

| плотность | 100 | 010 | 001 | $0\bar{1}1$ | $\bar{1}01$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $k\frac{d_a}{d_c}$ | $\frac{k}{d_c}$ | k | $\frac{kd_n}{d_c}$ | $\frac{kd_n}{p_c}$ |

По двумъ послѣднимъ числамъ изъ таблицы В. И. Соколова находимъ координаты $\rho$ реберъ $[0\bar{1}1]$ и $[\bar{1}01]$, а имѣя уже дуги, на которыхъ должны находиться полюсы этихъ реберъ, находимъ прямо и точки этихъ полюсовъ $[0\bar{1}1]$ и $[\bar{1}01]$.

Теперь остается только на сѣткѣ повергнуть всю сферу такъ, чтобы полюсъ [001] пришелъ въ центръ и перейти отъ граммастереографической проекціи реберъ къ гномостереографической проекціи граней то есть найти мѣсто полюсовъ (100) дуги 010 : 001, (010) дуги 001 : 100, (001) дуги 100 : 010, и (111) дуги $0\bar{1}1$ : $\bar{1}01$ и рѣшеніе задачи исчерпано.

Фиг. 10.




Въ такомъ видѣ представляется рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ и сложномъ случаѣ триклиннаго комплекса. Уже переходя къ соотвѣтствующему рѣшенію для моноклиннаго комплекса мы получаемъ весьма значительное упрощеніе, благодаря необходимому присутствіи прямыхъ угловъ (фиг. 10).

Геометрическіе константы для моноклинныхъ комплексовъ въ старой кристаллографіи даются въ такой формѣ:

$a : 1 : c$, $\beta$ (т. е. уголъ между осями 1-й и 3-й).

Числами $a$ и $c$ непосредственно даются тангенсы угловъ [010] : [110] и [010] : [$0\bar{1}1$]. Поэтому, имѣя таблицу натуральныхъ величинъ тангенсовъ, непосредственно отлагая соотвѣтственныя величины угловъ, находимъ полюсы реберъ [$0\bar{1}1$] и [110], а проведя чрезъ эти полюсы дугу большого круга, найдемъ, что полюсъ этой дуги и есть гномостереографическая проекція грани ($\bar{1}11$). Проведя еще дугу большого круга чрезъ полюсы (001) и ($\bar{1}11$), найдемъ и гномостереографическую проекцію грани ($\bar{1}10$), и задача рѣшена.

Къ рѣшенію задачъ этого рода въ особености приходилось прибѣгать въ тѣхъ немалочисленныхъ случаяхъ, когда въ столбцахъ чиселъ угловъ, даваемыхъ авторами, замѣчались противорѣчія, что сейчасъ же бросается въ глаза при составленіи діаграммы гномостереографической проекціи.

Если, построивъ по такимъ константамъ діаграмму, мы находимъ согласіе въ большинствѣ даваемыхъ угловъ съ полученными на діаграммѣ, то обыкновенно становилось яснымъ, въ чемъ состояла ошибка въ таблицахъ, даваемыхъ авторовъ. Чаще всего эта ошибка сводилась къ опечаткѣ въ постановкѣ знаковъ + или — въ индексахъ. Иногда дѣлалось яснымъ, что авторъ приводилъ невѣрные индексы самой формы и тогда можно было съ увѣренностью исправлять эти символы.

Но если вообще не замѣчалось согласія между числами, получаемыми изъ діаграммы и числами наблюденій (и вычисленій), что также случалось нерѣдко, приходилось вовсе исключать такой кристаллъ изъ числа подвергшихся удовлетворительному изслѣдованію, какъ очевидно требующій новаго дополнительнаго и разъяснительнаго изслѣдованія. Замѣчательно, что особенно часты случаи такихъ противорѣчій въ числахъ у нѣкоторыхъ опредѣленныхъ авторовъ, иногда имѣющихъ довольно громкое имя въ наукѣ и доставившихъ наукѣ матеріалъ по многимъ десяткамъ изслѣдованныхъ кристалловъ.