4. Завершеніе вывода каноническихъ параллелоэдровъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 12 апрѣля 1910 г.).

Въ статьѣ „Parolleloëder in kanonischer Form und deren eindentige Beziehung zu Raumgittern“ [1]) я развилъ понятіе о параллелоэдрахъ въ канонической формѣ или просто каноническихъ параллелоэдрахъ, принявъ за главное-такое свойство вывода этихъ параллелоэдровъ изъ пространственныхъ рѣшетокъ, чтобы этотъ выводъ былъ однозначенъ.

Однако въ этой статьѣ я разсмотрѣлъ лишь одну сторону вопроса, связанную съ тѣми угловыми отношеніями кристаллическихъ комплексовъ, которые въ соотвѣтствіи съ кристаллографическимъ закономъ предѣловъ приближаютъ всякіе вообще кристаллографическіе комплексы къ идеальнымъ типамъ; ими характеризуютсято распредѣленіе угловъ, ими которое обусловливаетъ принадлежность этихъ типовъ къ опредѣленнымъ видамъ сингоніи, и въ нихъ первую роль играютъ прямые углы.

Но я еще не коснулся того случая, когда эти идеальныя условія выполнены. Пока они не выполнены, неканоническихъ параллелоэдровъ можетъ быть выведено изъ каждой данной рѣшетки безчисленное множество; но является еще вопросъ, будетъ ли имѣть мѣсто однозначность, если это условіе выполнено?

Прежде всего примемъ во вниманіе, что если это условіе выполнено, то комплексъ можетъ быть только или 1) тетрагональный, или 2) гипогексагональный, или 3) тригональный.

Для этихъ же комплексовъ опредѣляющею является одна единственная константа, а потому если примемъ какую-нибудь точку пространственной рѣшетки за центръ кристаллографическихъ осей, то достаточно имѣть еще одну единственную точку, ближайшую къ ней и не находящуюся на линіи перпендикулярной къ главной оси симметріи, чтобы вывести всю пространственную рѣшетку; слѣдовательно, если параллелоэдръ, какъ канонической, долженъ быть выведенъ изъ нея однозначно, то этими же данными долженъ быть опредѣленъ и онъ.

Различіе въ упомянутыхъ трехъ разрядахъ комплексовъ прежде всего будетъ состоять въ томъ, что изъ одной мы непосредственно выводимъ изъ имѣющихся осей симметріи комплекса для перваго разряда четыре, для второго шесть и для третьяго три точки, и всѣ три точки также будутъ ближайшими къ взятой. Если принять во вниманіе, что въ комплексахъ взятая точка (какъ всякая точка пространственной рѣшетки) есть центръ обратнаго равенства, то число ближайшихъ точекъ для всѣхъ этихъ трехъ разрядовъ удваивается то есть получается соотвѣтственно 8, 12 и 6 ближайшихъ точекъ.

Для гипогексагональныхъ комплексовъ, проявляющихъ только одинъ возможный главный видъ структуры — тетрапараллелогональный — этимъ вопросъ и исчерпывается, такъ какъ однозначно выводится параллелоэдръ, въ данномъ случаѣ гексагональная призма, гранями которой будутъ 1) пара плоскостей, перпендикулярныхъ къ главной оси симметріи то есть горизонтальныхъ, посединѣ между взятымъ центромъ и ближайшими точками и 2) три пары плоскостей, параллельныхъ главной оси симметріи, то есть вертикальныхъ и находящихся посединѣ межу двумя ближайшими точками въ горизональной плоскости и перпендикулярныхъ къ соединяющимъ ихъ прямымъ. Взятый центръ будетъ и центромъ этого параллелоэдра, вертикальная ось получитъ кристаллографическій символъ $[10\bar{1}0]$, а горизонтальныя діагонали правильнаго шестиугольника сѣченія—символы $[01\bar{0}1]$, $[0110]$ и $[0011]$.

Въ тетрагональныхъ кристаллахъ мы отличаемъ, какъ извѣстно, два случая: 1) взятый центръ можетъ быть одною изъ вершинъ тѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ (тетрагональныхъ призмъ), совокуп-

[1]) Zetschrift für Krystallographie XLVI 245.

ность которыхъ составляетъ полную совокупность точекъ пространственной рѣшетки, или 2) онъ можетъ принадлежать той добавочной пространственной рѣшеткѣ, совокупность точекъ которой занимаетъ положеніе центровъ параллелепипедовъ, представителемъ которыхъ является параллелепипедъ, имѣющій вершинами совокупность равноудаленныхъ точекъ.

Ясно, что эти два случая соотвѣтствуютъ двумъ различнымъ главнымъ структурамъ, а именно въ первомъ случаѣ структурѣ гексаэдричеокой, для которой параллелоэдръ является въ видѣ трипараллелоэдра, представленнаго тетрагональною призмою, а во второмъ — параллелоэдръ можетъ быть лишь гекса или гептапараллелоэдромъ.

Объективнымъ критеріемъ различія обоихъ случаевъ можетъ быть то, что если возьмемъ плоскость, параллельную (001), проходящую чрезъ центръ и перпендикулярную къ четверной оси симметріи, то получится въ ней такая плоская сѣтка, что всѣ остальныя точки пространственной рѣшетки будутъ въ нихъ ортогонально проектироваться; выражаясь общнѣе, въ нихъ будутъ проектироваться всѣ точки пространственной рѣшетки линіями, имѣющими направленіе главной оси [001].

Если параллелоэдръ долженъ быть каноническій, то во второмъ случаѣ долженъ быть построенъ лишь одинъ единственный параллелоэдръ.

Не трудно понять, что это различіе сводится къ условному различію въ томъ, какую изъ горизонтальныхъ осей мы примемъ за ось [100], ту ли, которая находится въ одной вертикальной плоскости съ ближайшими точками или одну изъ промежуточныхъ осей.

Въ первомъ случаѣ лучъ, соединяющій центръ съ одною изъ ближайшихъ точекъ, можетъ быть выраженъ лишь символомъ, имѣющимъ одинъ изъ первыхъ двухъ индексовъ нуль, а во второмъ ни одинъ изъ индексовъ не будетъ равенъ нулю.

Слѣдовательно, въ первомъ случаѣ и грани построеннаго параллелоэдра также необходимо будутъ имѣть одинъ изъ индексовъ символа нуль, а во второмъ этого не будетъ, но, какъ извѣстно изъ теоріи параллелоэдровъ къ такимъ четыремъ парамъ граней присоединяется еще три пары граней {100} и {001} то есть въ первомъ случаѣ параллелоэдръ системы есть гекса-, а во второмъ гептапараллелоэдръ.

Нетрудно вывести и осевыя различія въ этихъ двухъ предположеніяхъ.

Пусть намъ данъ кристаллъ, хотя бы и тетрагональный, но по угламъ въ точности совпадающій съ тою формою, которую мы называемъ правильнымъ октаэдромъ. Мы для опредѣленіи его сингоніи непремѣнно обратились бы къ ознакомленію съ его оптическими свойствами и прежде всего испытали бы его на изотропность; если бы оказалось, что онъ дѣйствительно изотропенъ, мы уже не могли бы отнести его къ кристалламъ тетрагональной сингоніи, а обязательно должны были бы считать его кристалламъ кубической сингоніи, и предлежащая комбинація необходимо опредѣлилась бы какъ одна единственная простая форма {111}. Пусть онъ непрозраченъ или по другимъ причинамъ его оптическія свойства не могутъ быть опредѣлены или не являются рѣшающими. Допустимо ли было бы его считать непремѣнно тетрагональнымъ и принять такую систему осей, чтобы онъ получилъ иные символы, а не {111}?

Разъ предъ нами предлежитъ именно задача, однозначно по кристаллическимъ формамъ выводить геометрическія константы напр. въ видѣ символа комплекса, то ясно, что другое рѣшеніе недопустимо, а потому, пока не будетъ доказано противнаго, мы должны считать его правильнымъ октаэдромъ, и если это вещество постоянно или хотя бы преобладающимъ образомъ кристаллизуется въ этой формѣ, то мы должны приписать ему додекаэдрическую структуру и совершенно опредѣленнымъ образомъ принять кристаллографическія оси, единичные отрѣзки которыхъ въ этомъ случаѣ должны быть въ точности одинаковыми.

Но если бы даже впослѣдствіи оказалось, что это все-таки кристаллъ тетрагональный, то мы не имѣли бы никакихъ основаній считать нашу установку неправильною, если основываемъ ее на внѣшнихъ формахъ кристалла, такъ какъ и съ теоретической точки зрѣнія то есть съ точки зрѣнія теоріи структуры кристалловъ эта установка допустима и есть лишь одна изъ двухъ вообще допустимыхъ установокъ.

При этомъ я имѣю въ виду, что именно такіе или близкіе къ тому кристаллы дѣйствительно не очень рѣдко попадаются на дѣйствительномъ опытѣ и даже получили названіе псевдокубическихъ; въ нѣкоторыхъ случаяхъ научные методы не даютъ даже возможности съ несомнѣнностью рѣшить вопросъ, будетъ ли это кристаллъ тетрагональный или кубическій.

Но если бы мы ему все-таки приписали октаэдрическую структуру, то грани его получили бы символы {101} но не въ полномъ числѣ, а именно

не хватало бы {110} и {$\bar{1}$10} (принимая параллельныя пары). Но только что объясненному, отъ этого другого толкованія цѣна установки не измѣнилась бы, такъ какъ пространственная рѣшетка, а слѣдовательно порядокъ плотности сѣтокъ остался бы тотъ же самый.

Также, если бы намъ предлежалъ кристаллъ, представляющій по угловымъ величинамъ въ точности форму ромбическаго додекаэдра. Примѣняя только-что отмѣченный принципъ однозначности, мы должны были бы совершенно опредѣленно принять положеніе кристаллографическихъ осей и вывести октаэдрическую структуру; и въ этомъ случаѣ единичные отрѣзки на всѣхъ трехъ осяхъ въ точности оказались бы одинаковыми, а цѣна установки получилась бы равною 1-цѣ. Но теорія кристаллической структуры допустила бы и въ этомъ случаѣ другое рѣшеніе, связанное съ выборомъ промежуточныхъ осей, и тогда, примѣняя критерій правильной установки, мы должны были бы его форму толковать какъ комбинацію {111} и {100}, но безъ {001), и въ частности признать съ полною достовѣрностью додекаэдрическую структуру.

Необходимое отсутствіе въ первомъ случаѣ граней {110}, во второмъ формы {001}, показываетъ, что октаэдръ, разсматриваемый какъ относящійся къ тетрагональнымъ кристалламъ и октаэдрической структуры, есть кристаллъ положительный, а ромбическій додекаэдръ, разсматриваемый какъ кристаллъ тетрагональный и додекаэдрической структуры, есть кристаллъ отрицательный.

Весьма простое соображеніе показало бы намъ, что въ первомъ случаѣ для главной (третьей) оси пришлось бы принять величину $\sqrt{2}$, во второмъ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Разъ въ разсматриваемыхъ двухъ случаяхъ примѣненіе принципа однозначности установки необходимо привело насъ къ опредѣленнымъ рѣшеніямъ по отношенію къ каноническимъ параллелоэдрамъ, то такъ какъ эти случаи можно разсматривать лишь какъ предѣльные въ цѣломъ рядѣ другихъ случаевъ, въ которыхъ значеніе единичныхъ отрѣзковъ на осяхъ можетъ измѣняться въ весьма значительныхъ степени, то было бы нелогично, а слѣдовательно и недопустимо, класть въ примѣненіи принципа какую-то произвольную границу, начиная съ которой пришлось бы примѣнять другой принципъ, а этимъ самымъ то есть принятіемъ той структуры, при которой комплексъ былъ бы ближе къ кубическому, дается однозначное рѣшеніе для всѣхъ случаевъ.

Если, примѣняя критерій правильной установки мы для тетрагональнаго кристалла получили октаэдрическую структуру и главное опредѣляющее число символа комплекса 60° или больше, то необходимо замѣнить кристаллографическія оси промежуточными, отрѣзокъ по главной оси уменьшить въ отношеніи $\sqrt{2}$ и принять додекаэдрическую структуру; если получимъ додекаэдрическую структуру и главное опредѣляющее число меньше 50°, то также необходимо замѣнить оси промежуточными, отрѣзокъ по главной оси увеличить въ отношеніи $\sqrt{2}$ и принять октаэдрическую структуру.

Такимъ образомъ мы и здѣсь получили числа, представляющія границы, въ которыхъ мы должны дѣйствовать по извѣстнымъ правиламъ при примѣ-критерія для нахожденія правильной установки; но въ этихъ числахъ уже нѣтъ ничего субъективнаго и произвольнаго. Наоборотъ, если-бы мы ими не руководствовались, то получили бы явное нарушеніе принципа однозначности, а потому структура была бы опредѣлена явно неправильно. Сами найденныя границы вычисляются на основаніи этого принципа съ произвольною точностью и по опредѣленной формулѣ, а именно, нужно, чтобы при переходѣ отъ положительнаго кристалла къ отрицательному при измѣненіи величины главной оси въ отношеніи $\sqrt{2}$ произошло бы приближеніе единичнаго отрѣзка по этой оси къ 1-цѣ; для промежуточнаго, то есть неопредѣленнаго, случая въ плоскости (100) или (010) уклоненія луча въ обѣ стороны (отъ діагональнаго положенія то есть угла 45°) должно быть одинаково.

Если величину этого уклоненія означимъ чрезъ α, то найдемъ $\frac{\operatorname{tang}(45+\alpha)}{\operatorname{tang}(45-\alpha)}=\sqrt{2}$

Отсюда вычисляемъ $45-\alpha=40°3'40''$, $45+\alpha=49°56'20''$. Отсюда опять для главныхъ опредѣляющихъ чиселъ комплекса получимъ предѣлы 49°56′20″, и 59°15′50″, что приближенно и выражено въ теоремѣ.

Теперь примѣнимъ тотъ же принципъ къ тригональнымъ кристалламъ то есть кристалламъ гексагональной сингоніи кубическаго типа.

Предположимъ ромбоэдръ съ точно прямыми углами то есть по формѣ точно совпадающій съ кубомъ. Ясно что если примемъ систему осей, перпендикулярныхъ къ гранямъ куба, и что именно на осяхъ такого положенія находятся ближайшія точки пространственной рѣшетки, то этимъ сама рѣшетка опредѣлится вполнѣ однозначно и не только крите-

рій правильной установки даетъ выраженіе достовѣрности для гексаэдрической структуры и толкованія формы какъ {100}, но мы при сохраненіи той же формы не войдемъ ни въ какое противорѣчіе съ опытомъ, если бы кристаллъ оказался оптически изотропнымъ то есть дѣйствительно долженъ бы быть отнесенъ къ кристалламъ кубической сингоніи. Принявъ другія положенія осей мы хотя по цѣнѣ установки и получимъ такую же достовѣрность, но комплексъ при этой другой установкѣ уже не будетъ изотропнымъ, а станетъ положительнымъ или отрицательнымъ.

Если возьмемъ такую систему осей, чтобы грани куба получили символъ {110}, мы найдемъ, что кристаллическій комплексъ сильно положителенъ (символъ комплекса 70.) и имѣетъ октаэдрическую структуру.

Наоборотъ, если возьмемъ такую систему осей, чтобы грани куба получили символъ $\{\bar{1}11\}$, мы найдемъ, что кристаллическій комплексъ сильно отрицателенъ (символъ комплекса 35.) и имѣетъ додекаэдрическую структуру.

Въ первомъ по причинѣ положительности нѣтъ граней $(1\bar{1}0)$ $(10\bar{1})$, $(0\bar{1}1)$; во второмъ по причинѣ отрицательности нѣтъ граней (111), почему именно цѣна установки и останется предѣльною.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію октаэдрической структуры то есть представимъ себѣ, что къ точкамъ данной пространственной рѣшетки присоединена еще система точекъ въ центрѣ кубической рѣшетки. Какъ легко видѣть, ряды точекъ, идущихъ въ направленіи главной оси, останутся неизмѣнными, но въ каждомъ такомъ ряду число точекъ станетъ вдвое большимъ то есть эти ряды получатъ вдвое большую плотность или иначе, комплексъ станетъ вдвое болѣе отрицательнымъ. Ближайшія къ центру точки станутъ уже иные, а именно ближайшею будетъ одна (или точнѣе шесть) изъ прибавленныхъ точекъ. Но вмѣстѣ съ тѣмъ кристаллизація должна измѣниться, такъ какъ плоскости наибольшой плотности будутъ при прежней установкѣ не грани формы {100}, а грани формы {110} и $(1\bar{1}0)$ всего въ числѣ 6 паръ.

Но если бы мы приняли за правило оси, соединяющія центръ съ ближайшими точками, всегда принимать за оси {100}, то получили бы другую установку, въ которой главнѣйшими гранями были бы {100} вмѣсто {110} и только $\{1\bar{1}0\}$ сохранили свое значеніе то есть получили бы вмѣсто комбинаціи {110}, $\{1\bar{1}0\}$ комбинацію {100}, $\{1\bar{1}0\}$, причемъ примѣненіе критерія правильной установки не измѣнило бы цѣны установки, въ данномъ случаѣ 1-цы, какъ выраженія достовѣрности. Появленіе формы $\{1\bar{1}0\}$ вытекало бы какъ слѣдствіе сильной отрицательности комплекса.

Однако эту вторую установку нельзя было бы признать за правильную, такъ какъ ею нарушался бы принципъ однозначности опредѣленія по формамъ, такъ какъ по существу мы имѣли бы дѣло съ настоящимъ ромбическимъ додекаэдромъ, а оптическое испытаніе могло бы показать изотропность кристаллическаго комплекса. Слѣдовательно, единственно правильная установка въ этомъ случаѣ была бы октаэдрическая то есть каноническимъ параллелоэдромъ въ этомъ случаѣ былъ бы гептапараллелоэдръ.

Тотъ же ходъ разсужденій mutatis mutandis можно было бы примѣнить и къ додекаэдрическому виду симметріи, при которомъ сравнительно съ гексаэдрическимъ видомъ симметріи положеніе ближайшихъ къ центру точекъ существенно бы измѣнилось. Въ противоположность предъидущему мы могли бы вывести пространственную рѣшетку этого вида изъ гексаэдрической тѣмъ, что поочередно устранили бы черезъ одну всѣ плоскія сѣтки, перпендикулярныя къ главной оси и оставили только ихъ половину, чрезъ одну. Отъ этого комплексъ сталъ бы вдвое болѣе положительнымъ, и опять положеніе ближайшихъ къ центру точекъ стало бы иное, и вмѣстѣ перемѣнилась бы кристаллизація, такъ какъ теперь важнѣйшими по плотности плоскостями были бы грани формъ {111} и $\{1\bar{1}1\}$, причемъ первая, какъ извѣстно, и есть плоскость, перпендикулярная къ главной оси.

Если бы мы перемѣнили установку, приписавъ символы {100} лучамъ изъ центра, проходящимъ чрезъ ближайшія точки, то тѣ же грани получили бы соотвѣтственно символы {111} и {100}, а примѣненіе критерія правильной установки опять привело бы къ выраженію достовѣрности. Тѣмъ не менѣе такую установку нельзя было бы признать правильною, какъ противорѣчащую принципу однозначности, потому что въ сущности мы имѣли бы дѣло съ правильнымъ октаэдромъ, оптическое изслѣдованіе котораго могло бы установить изотропность его комплекса.

Какъ видимъ, во всѣхъ случаяхъ примѣненіе принципа однозначности то есть каноническихъ параллелоэдровъ, требуетъ такой установки, чтобы она примѣняясь къ наблюденнымъ тремъ важнѣйшимъ косымъ гранямъ, возможно приближала комплексъ

къ изотропному виду, такъ какъ то, что справедливо для предѣльнаго и ближайшихъ къ нему случаевъ, при соблюденіи принципа однозначности, должно примѣняться и во всѣхъ случаяхъ.

Резюмируя сказанное, мы видимъ, что для кристаллическихъ комплексовъ, наиболѣе близкихъ къ изотропному (выражаемому символомъ $\frac{3}{54.}$), приходится допустить возможность всѣхъ трехъ главныхъ видовъ структуры, но для комплексовъ сильно отрицательныхъ допустима лишь октаэдрическая, а для комплексовъ сильно . положительныхъ только додекаэдрическая установка. Остается лишь найти величины тѣхъ предѣльныхъ угловъ, за предѣлами которыхъ въ одну сторону допустима лишь октаэдрическая, а въ другую лишь додекаэдрическая структура.

Остается найти тѣ предѣлы для главныхъ опредѣляющихъ чиселъ символа комплекса, въ которыхъ допустимы всѣ три вида структуры и за которыми допустимъ только соотвѣтственно одинъ изъ видовъ—октаэдрическій или додекаэдрическій.

Рѣшеніе этой задачи въ высшей степени облегчается тѣмъ обстоятельствомъ, что именно для изотропнаго комплекса, смотря потому, припишемъ ли мы ему гексаэдрическую или октаэдрическую установку, соотвѣтственно получимъ опредѣляющими два такіе числа $54^3/_4$ и $35^1/_4$, сумма которыхъ въ точности равна 90°, и притомъ это вѣрно не приближенно, а съ математическою точностью.

Если вычислимъ эти углы точнѣе, то получивъ 54° 44′ 8″ и 35° 15′ 52″. Эту математическую точность мы можемъ выразить и аналитически, если составимъ выраженіе для тангенса биссектрисы этихъ двухъ направленій.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ первый уголъ чрезъ α и второй чрезъ β; тогда ясно, что точныя математическія выраженія будутъ: $\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{2}$ и $\operatorname{tang}\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Для биссектрисы получимъ выраженіе $\operatorname{tang} B = \operatorname{tang}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Слѣдовательно:

$$\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}}+\sqrt{\frac{(1-\cos\beta)}{(1+\cos\beta)}}}{1-\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\beta)}+\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\beta)}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)}-\sqrt{(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)}} = \frac{\operatorname{sn}\alpha+\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cs}\alpha+\operatorname{cs}\beta}$$

и такъ какъ

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos\beta, \text{ и } \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sin\beta,$$

то послѣдняя дробь, а слѣдовательно $\operatorname{tang} B = 1$.

Такимъ образомъ уголъ 45° 0′ 0″ есть тотъ уголъ, который является однимъ изъ искомыхъ предѣловъ. Если главное опредѣляющее число символа комплекса меньше 45°, то видъ структуры можетъ быть только октаэдрическій.

Для отношенія гексаэдрическій и додекаэдрической структуръ характерными являются углы $54^3/_4°$ и $70^1/_2°$, тангенсы которыхъ точно выражаются значеніями $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, а потому среднему раздѣляющему углу соотвѣтствуетъ величина тонгенса $\sqrt{\sqrt{2.8}} = 2$ то есть уголъ 63° 26′ 6″.

Итакъ, по отношенію къ тригональнымъ кристаламъ мы вывели слѣдующую теорему.

Гексаэдрическая структура тригональныхъ кристалловъ допустима лишь въ предѣлахъ $45°—63^1/_2°$. Въ этихъ же предѣлахъ допустимы и два другіе вида структуры. Если главное опредѣляющее число символа комплекса меньше 45°, то допустима лишь октаэдрическая а если это опредѣляющее число есть $63^1/_2°$ или больше, то допустима лишь додекаэдрическая структура.

Если бы мы, примѣняя критерій правильной установки, вывели для символа комплекса число, меньшее чѣмъ 45° и додекаэдрическую структуру, то должны были бы измѣнить установку на гексаэдрическую съ угломъ меньшимъ чѣмъ $63^1/_2°$; если при тѣхъ же углахъ мы вывели бы гексаэдрическую структуру, то должны были бы замѣнить ее додекаэдрическою установкою тоже съ угломъ меньшимъ чѣмъ $63^1/_2°$.

И наоборотъ, если бы мы вывели для символа комплекса число, большее чѣмъ $63^1/_2°$ и октоэдрическую установку, то должны были бы измѣнить установку на гексаэдрическую съ угломъ большимъ чѣмъ 45°; если при тѣхъ же углахъ мы вывели бы гексаэдрическую структуру, то должны были бы замѣнить ее додекаэдрическою тоже съ угломъ большимъ чѣмъ 45°.

Закончивъ разсмотрѣніе вопроса по отношенію къ кристаламъ идеальнымъ (то есть тетрагональнымъ и гексагональнымъ), намъ нетрудно перенести сдѣланные выводы и на всѣ другія. Въ самомъ дѣлѣ, при примѣненіи критерія правильной установки уже выработаны правила однозначнаго выполненія такихъ гомогенныхъ деформацій комплекса, при которыхъ они вообще становятся

ортогональными. Правда, что для строгаго примѣненія изложенной теоріи было бы необходимо еще одно добавочное растяженіе, чтобы привести комплексъ къ идеальному виду, къ которому только и относятся выведенныя теоремы. Но если принять во вниманіе, что при всей выработкѣ метода прежде всего имѣлись въ виду практическія примѣненія, не требующія особой точности, но требующіл возможнаго сокращенія труда, то едва ли было бы цѣлесообразно вводить еще упомянутое добавочное растяженіе, а можно прямо пользоваться главнымъ опредѣляющимъ числомъ, какъ оно вводится во всякомъ символѣ комплекса. Но тогда дальше уже никакихъ особыхъ поясненій не требуется.

Такимъ образомъ установлены границы, при которыхъ съ равнымъ правомъ могутъ быть допущены двѣ изъ трехъ структуръ кубическаго типа.

Но еще можно установить аналогичную границу структуры призматической (то есть гипогексагональнаго типа) и структуры гексаэдрической кубическаго типа, но лишь при условіи модальности второго рода для послѣдней, какъ и для первой (то есть призматическій уголъ больше 60°).

Разсуждая теоретически, мы могли бы каждую пространственную рѣшетку кубическаго типа и модальности второго рода принимать за пространственную рѣшетку гипогексагональнаго типа; но съ этой точки зрѣнія явилась бы неопредѣленность, а предпочтительный выборъ того или другого типа въ этомъ случаѣ произволенъ, если бы не та однозначность вывода, которая опредѣляется основною формулою для выраженія вѣроятности установки. Если у насъ имѣется комплексъ, относящійся къ разсматриваемому случаю, то по этой формулѣ нужно вводить факторъ въ видѣ косинуса угла отклоненія отъ идеальнаго угла призмы въ данномъ типѣ.

Поэтому, если уголъ отклоненія обнимаетъ 15°, и только въ этомъ случаѣ, факторъ этотъ для обоихъ предположеній принимаетъ величину cos 15°.

Такимъ образомъ, если примемъ за параллелоэдръ ромбическую (прямую) призму съ острымъ угломъ 75°, то получимъ пространственную рѣшетку, которую прежде всего можемъ принять за имѣющую гексаэдрическую структуру, но относящуюся къ модальностямъ второго рода.

Не измѣняя пространственной рѣшетки, мы можемъ за параллелоэдръ принять и тетрапараллелоэдръ то есть гексагональную призму, имѣющую одну грань, параллельную длинной діагонали ромба, а двѣ другія грани дѣлаютъ съ нею уголъ $68^1/_4°$. Въ этомъ спеціальномъ случаѣ оба допущенія съ точки зрѣнія вѣроятности установки безразличны. Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ угловой факторъ, упомянутый выше, рѣшаетъ вопросъ однозначно.

Такимъ образомъ нельзя допустить какъ модальностей второго для гексаэдрической структуры съ отклоненіемъ призматическаго угла больше чѣмъ на 15°. Но это соображеніе относится только къ гексаэдрической, но не относится къ октаэдрической и додекаэдрической структурамъ. На опытѣ даже для всѣхъ этихъ структуръ едва ли наблюдается такое отклоненіе.

Но если бы такой комплексъ нашелся въ дѣйствительности, принадлежалъ къ ромбической сингоніи и имѣлъ главнымъ опредѣляющимъ числомъ символа комплекса число A, то мы получили бы

тождество $\overset{6}{\underset{-7.}{A}} = \overset{4h}{\underset{-7.}{A}}$

Приложеніе этихъ соображеній къ мококлиннымъ и триклиннымъ комплексамъ настолько непосредственно понятно, что едва ли стоитъ объ этомъ и упоминать.

Покончивъ съ выработкою понятія о каноническихъ параллелоэдрахъ, благодаря введенію котораго вносится больше опредѣленности при примѣненіи критерія правильной установки, я остановлюсь на одномъ особомъ случаѣ, когда по существу эта опредѣленность стушевывается и постепенно получается неопредѣленность, уже не устранимая никакимъ критеріемъ, основаннымъ на выводѣ структуры на основаніи наблюденія формъ.

Примѣненіе критерія, сдѣланное учеными нашей школы на нѣсколькихъ тысячахъ кристаллическихъ комплексовъ показало, что въ большинствѣ случаевъ онъ даетъ достаточно отчетливые результаты; получаемые при его посредствѣ символы комплексовъ болѣе или менѣе отчетливо гармонируютъ съ обликомъ и тѣми физическими свойствами кристалловъ, которыя предусматриваются въ настоящее время въ теоріи структуры кристалловъ; также гармонируетъ съ ними и примѣненіе извѣстныхъ законовъ компликаціи то есть развитія формъ, хотя послѣднее соотвѣтствіе проявляется уже болѣе грубо статистически то есть въ частныхъ случаяхъ имѣется уже значительное число отклоненій.

Но есть извѣстное число случаевъ, въ которыхъ замѣчается неопредѣленность при установленіи символа комплекса, несмотря на всѣ усовершенствованія критерія, которыя до сихъ поръ были введены.

Конечно, для примѣненія къ кристаллохимичес-

кому анализу на это обстоятельство можно смотрѣть не какъ на препятствіе, а лишь какъ на усложненіе, такъ какъ при этой неопредѣленности двухъ, въ крайнемъ случаѣ трехъ установокъ можно принять во вниманіе обѣ или всѣ три; однако есть случай, когда примѣненіе критерія даже съ теоретической точки зрѣнія должно дать менѣе отчетливыя, а въ предѣлѣ и вполнѣ неопредѣленные результаты.

Этотъ случай относится къ крайнимъ положительнымъ кристалламъ, [1]) по свойству которыхъ имъ принадлежитъ особый пинакоидъ, по плоскости сѣтокъ, а соотвѣтственно этому и по важности подавляющій всѣ другія формы. Эта особенность уже была мною разсмотрѣна въ „Дополнительныхъ замѣчаніяхъ къ статьѣ Соколова и Артемьева“ (Записки Г. И. П 344).

Изъ приведенныхъ примѣровъ, какъ равно и изъ теоретическихъ соображеній легко усмотрѣть, что плотность этого особаго, пластинчатаго, пинакоида такъ громадна по сравненію со всѣми гранями остальныхъ формъ, что несмотря на чрезвычайныя колебанія въ составѣ этой комбинаціи, цѣна установки всегда такъ близка къ 1-цѣ, какъ это вообще не замѣчается для кристаллическихъ комплексовъ другихъ свойствъ.

Ничто такъ рельефно не подчеркиваетъ совершенства примѣняемаго теперь критерія то есть его соотвѣтствія самый природѣ кристаллическихъ веществъ, какъ именно примѣненіе его къ крайнимъ, а особенно экстракрайнимъ положительнымъ кристаллическимъ комплексамъ.

Это примѣненіе показываетъ, что разсчеты порядка граней по плотности сѣтокъ становятся неопредѣленными, потому что само различіе въ плотностяхъ граней разныхъ символовъ дѣлается исчезающимъ по своей ничтожности, особенно по сравненію съ громадностью этой величины для пинакоида пластинчатости. И эта неопредѣленность не есть недостатокъ въ математическомъ выраженіи цѣны установки, но именно вполнѣ соотвѣтствуетъ свойствамъ самихъ кристалловъ, такъ какъ тотъ же всеобщій опытъ показываетъ какъ особую характеристику такихъ кристалловъ, полную неустойчивость всѣхъ остальныхъ формъ кромѣ пинакоида пластинчатости. Можно сказать, что въ такихъ крайнихъ комплексахъ, какъ общій случай, всѣ остальныя грани, кромѣ этого пинакоида, представляютъ систему узкихъ полосокъ въ осцилляторномъ сочетаніи, и почти невозможно съ увѣренностью констатировать именно тѣ или другія формы, и при разныхъ измѣреніяхъ и у разныхъ авторовъ получаются различныя формы.

Если же значеніе всѣхъ остальныхъ формъ по сравненію съ пинакоидомъ пластинчатости почти исчезаетъ въ разсчетѣ, то нарушается самъ принципъ, на которомъ разсчетъ основывается, а именно принципъ статистической оцѣнки всей вообще комбинаціи.

Поэтому нельзя не признать, что въ этомъ исключительномъ разрядѣ случаевъ приходится измѣнить порядокъ разсчета, что можно осуществить тѣмъ, что въ разсчетъ вводить всѣ остальныя формы (по статистической важности) кромѣ особаго пинакоида.

Конечно, тогда мы получимъ вообще несоразмѣрно малую величину цѣны установки, но уже это обстоятельство теряетъ свое значеніе, такъ какъ разсчетъ вмѣстѣ съ пинакоидомъ уже далъ для цѣны установки очень большую величину; остается для разныхъ установокъ только разсмотрѣть, въ пользу какой изъ нихъ склоняется получаемый разсчетъ и постараться эту разницу выразить рельефнѣе.

Ниже будетъ видно, какъ такими пріемами можно чувствительнѣе отмѣтить преимущества той или другой установки. Но нужно напередъ оговорить, что это лишь послѣднее средство увеличить различіе въ величинахъ, между которыми по природѣ вещей разница очень мала. Въ экстрокрайнихъ положительныхъ комплексахъ и этотъ пріемъ не помогаетъ; и какъ разъ въ этомъ случаѣ возрастаютъ удобства для оптическаго изслѣдованія кристалла, почему геометрическій методъ распознаванія для него лучше замѣнить оптическимъ.

Ради простоты и наглядности примѣненія метода мы разсмотримъ такъ часто наблюдающійся въ крайне положительныхъ кристаллахъ случай, когда изъ его формъ, кромѣ пинакоида пластинчатости, представлена только бипирамида. Для перваго примѣра возьмемъ гексагональный кристаллъ, въ которомъ нормали къ пирамидѣ дѣлаютъ съ главною осью уголъ 60^0.

Если устранимъ числа, относящіяся къ особому пинакоиду, то, принявъ грани этой бипирамиды за {1110}, найдемъ:

	1110	0110	
кв. плотн.	1,0	1,33	
число паръ гр. .	6	—	
	6,0	—	6,0 = R
число паръ гр. .	3	3	
	3,0	4,0	7,0 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{6}{7} = 0{,}86$.

Принявъ грани той же бипирамиды за {1220}, найдемъ:

[1]) Какъ разъ для этихъ случаевъ кристаллы становятся пластинчатыми и какъ бы особенно приспособленными для оптическихъ изслѣдованій.

	1220	0110	1110	
кв. плотн.	1,0	5,28	2,29	
число паръ гр. .	6	—	—	
	6,0	—	—	6,0 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	15,84	6,87	22,71 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{60}{227} = 0{,}26$.

Принявъ грани той же бипирамиды за {21$\bar{1}$0}, найдемъ:

	2110	1110	0110	
кв. плотн.	0,25	0,30	0,32	
число паръ гр. .	6	—	—	
	1,50	—	—	1,50 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	0,90	0,96	1,86 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{150}{186} = 0{,}80$.

Принявъ грани той же бипирамиды за {3110}, найдемъ:

	3110	0110	1110	
кв. плотн.	0,11	0,15	0,15	
число паръ гр. .	6	—	—	
	0,66	—	—	0,66 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	0,45	0,45	0,90 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{66}{90} = 0{,}73$ и т. д.

Теперь предположимъ гипогексагональную бипирамиду съ главнымъ опредѣляющимъ угломъ 70°. Найдемъ, принявъ ее за {1110}

	1110	0110	
кв. плотн.	0,47	0,53	
число паръ гр. .	6	—	
	2,82	—	2,82 = R
число паръ гр. .	3	3	
	1,41	1,59	3,00 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{282}{300} = 0{,}94$.

Принявъ ту же бипирамиду за {1221}, найдемъ:

	1220	0110	1110	
кв. плотн.	0,47	2,11	1,39	
число паръ гр. .	6	—	—	
	2,82	—	—	2,82 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	6,33	4,17	10,50 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{282}{1050} = 0{,}27$.

Принявъ ту же бипирамиду за {2110}, найдемъ:

	2110	0110	1110	
кв. плотн.	0,12	0,13	0,13	
число паръ гр. .	6	—	—	
	0,72	—	—	0,72 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	0,39	0,39	0,78 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{72}{78} = 0{,}94$.

Наконецъ, принявъ туже бипирамиду за {3110} найдемъ:

	3110	0110	1110	
кв. плотн.	0,06	0,07	0,07	
число паръ гр. .	6	—	—	
	0,36	—	—	0,36 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	0,21	0,21	0,42 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{36}{42} = 0{,}86$ и т. д.

Наконецъ разсмотримъ случай, когда бипирамида характеризуется угломъ 80°. Принявъ ее сначала за {1110}, найдемъ:

	1110	0110	
кв. плотн.	0,12	0,12	
число паръ гр. .	6	—	
	0,72	—	0,72 = R
число паръ гр. .	3	3	
	0,36	0,36	0,72 = ,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{72}{72} = 1{,}00$.

Принявъ ту же бипирамиду за {1220}, найдемъ:

	1220	0110	1110	
кв. плотн.	0,12	0,50	0,45	
число паръ гр. .	6	—	—	
	0,72	—	—	0,72 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	1,50	1,35	2,85 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{72}{285} = 0{,}25$.

Принявъ ее за {2110}, найдемъ:

	2110	1110	0110	
кв. плотн.	0,03	0,04	0,04	
число паръ гр. .	6	—	—	
	0,18	—	—	0,18 = R
число паръ гр. .	—	3	3	
	—	0,12	0,12	0,24 = J,

и потому $\frac{R}{J} = \frac{18}{24} = 0{,}75$ и т. д.

Изъ послѣдняго примѣра видимъ уже, съ какими маленькими числами приходится имѣть дѣло; съ такими уже едва ли позволительно производить разсчетъ, а если пойдемъ еще дальше, то всѣ числа станутъ нулями, и получимъ полную неопредѣленность, которую уже ничѣмъ нельзя устранить.

Но хотя вычисленія съ возрастаніемъ положительности и становятся менѣе надежными, но все-таки приведенный здѣсь пріемъ сильно повышаетъ чувствительность разсчета, то есть представляетъ дѣйствительное средство усилить выразительность правильной установки.

Только что приведенный пріемъ разсчета не только слѣдуетъ считать допустимымъ и даже важнымъ для крайне положительныхъ комплексовъ, но его даже слѣдуетъ признавать за пріемъ общій дополнительный, подразумѣвающійся самъ собою при всякихъ разсчетахъ вообще. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ какой угодно комплексъ, хотя бы изотропный, представленный напр. кубомъ. Мы всегда можемъ, если только въ немъ есть одна пара граней, пред-

ставленная во всѣхъ кристаллахъ, разсматривать его какъ ультраположительный, въ которомъ эта пара граней играетъ роль особаго пинакоида.

Какъ мы видимъ изъ таблицы № 2, служащей для опредѣленія плотности сѣтокъ, достаточно для комплекса принять за главное опредѣляющее число 88^0 и уже слѣдующія по важности грани будутъ имѣть выраженіемъ плотности сѣтокъ нули. Въ выраженіи цѣны установки напр. каменной соли мы получимъ $\frac{4+0}{4+0}=1$, то есть какъ бы полную достовѣрность. Если же мы отбросимъ въ числителѣ и знаменателѣ первый членъ, то есть употребимъ только что упомянутый пріемъ, то тоже выраженіе приметъ видъ $\frac{0}{0}$. Для ультраположительныхъ комплексовъ это выраженіе соотвѣтствуетъ самой природѣ вещей и ничѣмъ не можетъ быть замѣнено. Для другихъ же комплексовъ, только фиктивно разсматриваемыхъ какъ ультраположительные, оно указываетъ только на неправильность допущенія такой фикціи, потому что нетолько для правильной, но и для всякой другой установки послѣ отброса перваго члена остаются величины, которыя могутъ быть даже настолько велики, что само отношеніе отъ этого мало измѣняется. Въ частности, это конечно имѣетъ мѣсто и для куба каменной соли.

Въ заключеніи разсмотримъ примѣненіе новаго пріема на какомъ-нибудь интересномъ реальномъ примѣрѣ, за каковой я приму кристаллы іодистаго свинца. Pb I_2, изслѣдованныя Schröder'омъ, Filhol'емъ и Nordenskiöld'омъ [1]).

Дается комбинація {1000}, {1110}, {2330} и символъ комплекса $\overset{6}{56}$ для этихъ кристалловъ, представляющихъ тонкія гексагональныя пластинки.

Не измѣняя установки авторовъ, получимъ:

	1000	1110	2330	0110	
кв. плотн.	4,0	1,24	0,18	1,8	
число паръ гр. .	1	6	6	—	
	4,0	7,44	1,08	—	$12,52 = R$
число паръ гр. .	1	6	3	3	
	4,0	7,44	0,54	5,4	$17,38 = J.$

Итакъ $\frac{R}{J}=\frac{125}{174}=0,72.$

Но если мы произведемъ преобразованія символовъ по детерминанту $\begin{vmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$, то получимъ символъ $\overset{6}{77}$. и таблицу:

	1000	3110	2110	1110	0110	
Квадр. плотн. . .	4,0	0,14	0,17	0,19	0,19	
число паръ гран. .	1	6	6	—	—	
	4,0	0,84	1,02	—	—	$5,86 - R$
число паръ гран. .	1	—	3	6	3	
	4,0	—	0,51	1,14	0,57	$6,22 - J$

И такъ $\frac{R}{J}=\frac{586}{622}=0,94.$

Наконецъ возьмемъ третью установку согласно детерминнту $\begin{vmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{vmatrix}$; тогда составимъ символъ комплекса $\overset{6}{64}$. и таблицу:

	1000	3220	1110	0110	
Квадр. плотн. . . .	4,0	0,14	0,73	0,9	
число паръ гран. .	1	6	6	—	
	4,0	0,84	4,38	—	$9,22 - R$
число паръ гран. .	1	3	6	3	
	4,0	0,42	4,38	2,7	$11,5 - J$

Итакъ $\frac{R}{J}=\frac{922}{1150}=0,80.$

Такъ какъ мы взяли примѣръ не изъ ультраположительныхъ кристалловъ, то и сейчасъ получили весьма отчетливый результатъ въ пользу второй установки, за которою слѣдуетъ третья, а первая установка оказывается и вовсе неудовлетворительною.

Теперь примѣнимъ новый пріемъ, для котораго достаточно во всѣхъ полученныхъ дробяхъ какъ въ числителяхъ, такъ и въ знаменателяхъ, вычесть одно и то же число. Получаемъ:

для первой установки $\frac{R}{J}=\frac{85}{134}=0,63$

для второй установки $\frac{R}{J}=\frac{186}{222}=0,84$

для третьей установки $\frac{R}{J}=\frac{522}{750}=0,70$

Какъ видимъ, получили для цѣнъ установки числа въ той же послѣдовательности, хотя конечно меньшія.

За второй примѣръ примемъ *m*—натробензойнокислыя соли Bi и Yt [1]). Даются комбинаціи

для соли Yt. 100 001 302 $\bar{3}01$ $\bar{3}02$ 111 $\bar{3}31$ $\bar{1}11$ 035 — —

для соли Bi. 100 001 — — $\bar{3}02$ 111 $\bar{3}31$ — — 101 $\bar{2}11$

За существенныя, которые мы должны принять въ разсчетъ, можно считать лишь формы, оказавшіяся общими.

Принявъ для преобразованія детерминантъ $\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 11 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, найдемъ символъ комплекса $\overset{6;-3}{83}_{+1.}$ и составимъ таблицу

[1]) Schröder. Poggend. An. d. Phys. 1859 **17** 113, Filhol An. Chem. Phys. (3) **21** 415 и Nordenskiöld Bihang. K. Svenska Vet. Acad. Handl 1874 **2** № 2. Составлено по извлеченію изъ Groth's Chemische Krystallographie I 221.

[1]) Изъ работы *Bodman* „Ueber Isomorphie zwischen Salzen von Wismut und Yttrium извлечено въ Zeitschrift für Krystallographie *45* 106.

	100	001	$30\bar{2}$	111	331			
	$01\bar{0}1$	1000	$4\bar{1}01$	3110	1110	0110	$1\bar{1}01$	
квадр. плотн.	0,06	4,0	0,02	0,05	0,06	0,06	0,06	
число паръ. гр.	1	1	1	2	2			
	0,06	4,0	0,02	0,1	0,12	—	—	4,3=R
	1	1	—	—	2	2	1	
	0,06	4,0	—	—	0,12	0,12	0,06	4,36=J

Итакъ, по главному пріему находился $\frac{R}{J}=\frac{43^0}{436}=0{,}99$.

по новому пріему $\frac{R}{J}=\frac{30}{36}=0{,}83$.

Только-что разсмотрѣнный случай относится къ тѣмъ интереснымъ случаямъ, когда всю діаграмму мы можемъ около оси [0121] повернуть на нѣкоторый уголъ, а именно на 7^0, и мы получимъ тотъ же комплексъ въ другой установкѣ, но отвѣчающій той же пространственной рѣшеткѣ, а потому цѣна установки остается теоретически тождественною, и притомъ анортогональность почти не измѣняется, такъ какъ символъ комплекса получается $\begin{matrix}6,-4\\87\\+1.\end{matrix}$

Такая установка поэтому при примѣненіи нашего критерія почти не даетъ никакой разницы въ величинѣ вѣроятности установки, но при ней опредѣляющее число комплекса значительно выше (87 вмѣсто 83). Какъ видимъ, въ этомъ случаѣ неопредѣленность въ примѣненіи критерія по существу неизбѣжна, и она устраняется только примѣненіемъ правила, вытекающаго изъ принципа однозначности, по которому изъ двухъ тождественныхъ по величинѣ вѣроятности установокъ допустима лишь та, которая по опредѣляющему числу ближе подходитъ къ изотропному комплексу.

Но если бы мы произвольно приняли вмѣсто символа {1110} символъ {2110}, то получили бы символъ комплекса $\begin{matrix}6;-3,\\86.\\+1.\end{matrix}$ и составили бы слѣдующую таблицу:

	$01\bar{0}1$	1000	$8\bar{1}01$	6110	2110	0110	1110	
Квадратъ плотн.	0,01	4,0	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	
число паръ гран.	1	1	2	2	3	—	—	
	0,01	4,0	0,00	0,00	0,02	—	—	4,03=R
число паръ гран.	1	1	—	—	2	2	2	
	0,01	4,0	—	—	0,02	0,02	0,02	4,07—J

и слѣдовательно $\frac{R}{J}=\frac{403}{407}=0{,}99$.

При примѣненіи же дополнительнаго критерія получилось бы $\frac{R}{J}=\frac{3}{7}=0{,}43$.

Въ заключеніе слѣдуетъ упомянуть, что говоря теоретически, дополнительный критерій долженъ бы былъ примѣняться и для крайнихъ отрицательныхъ кристалловъ. Въ самомъ дѣлѣ, и здѣсь, мы получаемъ въ предѣлѣ для всѣхъ граней вертикальной призмы подавляюще громадныя величины плотности, предъ которыми всѣ остальныя можно было бы практически принимать за нуль и такимъ образомъ въ предѣлѣ правильная установка стала бы совершенно неопредѣленною. Но здѣсь всегда она станетъ опредѣленною (если отвлечься отъ частныхъ особыхъ случаевъ), если въ разсчетѣ мы устранимъ всѣ числа, относящіяся къ вертикальнымъ призмамъ.

На дѣлѣ число иныхъ граней, кромѣ призматическаго пояса, сводится къ минимуму, и именно для ультраотрицательныхъ кристалловъ же таковыхъ или вовсе не имѣемъ, или же имѣемъ одну единственную притупляющую форму, и даже далеко не для однихъ ультраотрицательныхъ комплексовъ.

Кромѣ того нужно замѣтить, что если посреди ультраположительныхъ мы имѣемъ еще изрядное число кристалловъ съ главнымъ опредѣляющимъ числомъ, большимъ, чѣмъ 80°, то такихъ отрицательныхъ кристалловъ, въ которыхъ это число меньше 10° мы почти вовсе не имѣемъ (попадаются единичныя исключенія).