39. О мнимыхъ конопримахъ и коносекундахъ.

Е. С. Федорова.

(доложено 16 сентября).

Въ своихъ знаменитыхъ изслѣдованіяхъ о коническихъ сѣченіяхъ Штейнеръ [1]) въ полнотѣ разработалъ вопросъ объ опредѣленіи линейной примы таковыхъ (то есть конопримъ) за исключеніемъ одного случая, когда въ числѣ опредѣляющихъ конопримъ одна или обѣ мнимы. Впослѣдствіи то же сдѣлано Рейе для шаровъ, и опять не приняты во вниманіе шары мнимые [2]).

Эти пропуски составляютъ нѣкоторую неполноту, настоятельно требующую заполненія. По отношенію къ кругамъ и шарамъ это заполненіе было сдѣлано авторомъ въ статьѣ „Этюды по геометріи шаровъ“ [3]) и даже вошло въ составъ выпущеннаго имъ элементарнаго руководства [4]). Въ особенности неполнота бросается въ глаза при составленіи квадратичныхъ совокупностей, даже сферопримъ круговъ и шаровъ [5]), для которыхъ, если бы не признавать мнимыхъ круговъ и шаровъ, получилась бы линія центровъ въ видѣ круга, и часть этого круга оставалась бы пустою, такъ какъ она принадлежала бы центрамъ мнимыхъ круговъ или шаровъ.

Въ самыхъ основахъ новой геометріи лежитъ понятіе объ инволюціи и различается два случая: инволюціи съ парою вещественныхъ (гиперболическая) и парою мнимыхъ (эллиптическая) двойныхъ элементовъ. Въ частности, какъ для точекъ на прямой можемъ отъ одного вида инволюціи перейти къ другому, если одну изъ системъ точекъ, составляющихъ инволюція такъ перевернемъ, чтобы точки, которыя были сопряжены сами себѣ (двойныя) стали сопряженными другъ другу (то же конечно имѣетъ мѣсто и по отношенію къ инволюціи точекъ на сферѣ), такъ въ инволюціи на плоскости (полярная система) та коноприма, которая опредѣляетъ инволюцію, становится мнимою, если такъ переставимъ точки одной изъ системъ, составляющихъ инволюцію, чтобы двѣ двойныя точки, составляющія концы діаметра конопримы, стали сопряжены другъ съ другомъ (то же относится и къ инволюціи на сферѣ, если сдѣлаемъ это по отношенію къ любому изъ трехъ центровъ конопримы); наконецъ то же мы имѣемъ и для коносекундъ.

Такимъ образомъ въ полнотѣ выясняется различіе между вещественною и мнимою конопримою, также какъ и вещественною и мнимою коносекундою.

Для мнимыхъ конопримъ и коносекундъ полярныя отношенія существенно отличны отъ тѣхъ, которыя существуютъ въ вещественныхъ. Если напр. мы имѣемъ вещественный эллипсъ и пересѣчемъ его прямою, то двѣ вещественныя точки пересѣченія есть полюсы касательныхъ въ нихъ, а сама хорда есть поляра точки пересѣченія касательныхъ. Но если эллипсъ мнимый, то вещественныя точки пересѣченія его данною прямою, будутъ не эти точки, а діаметрально противоположныя, и если въ вещественномъ эллипсѣ каждая его точка есть полюсъ касательной въ ней, то въ мнимомъ каждой такой точкѣ полярна касательная въ діаметрально противоположной точкѣ.

Этотъ примѣръ долженъ наглядно представить полярныя отношенія для всѣхъ мнимыхъ конопримъ и коносекундъ. Кромѣ того, нужно принять во вниманіе, что мнимыхъ гиперболъ (а слѣдовательно и параболъ) не существуетъ, такъ какъ

---

[1]) Эти изслѣдованія собраны Шретеромъ во II томѣ Vorlesungen über synthetische Geometrie 1876.

[2]) Synthetische Geometrie der Kugeln. 1879.

[3]) Эти Записки I 102—142.

[4]) Новая геометрія какъ основа черченія, 1907 глава IV 10 и 11.

[5]) Эти Записки II 118 и слѣд.; ср. также I 150 (Системы гармоническихъ отрѣзковъ и векторовъ).

допущеніе этого было бы равносильно перемѣнѣ той пары угловъ между ассимптотами, въ которыхъ находится вещественная гипербола то есть замѣнѣ послѣдней сопряженною ей гиперболою при сохраненіи ассимптотъ.

Послѣ опубликованіи моей замѣтки „Практическое рѣшеніе задачи о проведеніи линейной примы конопримъ по двумъ даннымъ“ [1]) дополненіе къ выводу Штейнера о построеніи линейной примы конопримъ по двумъ даннымъ становится дѣломъ совершенно простымъ.

Способъ, указанный въ этой замѣткѣ, состоитъ въ томъ, что мы пересѣкаемъ обѣ данныя конопримы двумя произвольными парами лучей, лишь бы эти лучи вещественно пересѣкали конопримy. Каждая изъ этихъ паръ сомѣстно съ парою данныхъ конопримъ опредѣляетъ линейную секунду, а слѣдовательно и опредѣляющую ее кривую 3-го порядка Якоби, двѣ такія кривыя необходимо пересѣкаются въ одной точкѣ, а эта точка есть та единственная (вообще) точка, поляра которой есть общая по отношенію ко всѣмъ конопримамъ линейной примы. По этой точкѣ и полярѣ легко построить всю линейную приму по способу, данному Штейнеромъ.

Какъ поступить въ томъ случаѣ, когда даны мнимыя конопримы, объяснено въ этой статьѣ.

Такимъ образомъ выводъ Штейнера достигаетъ совершенной полноты.

Какъ выводъ позиціоннаго характера, онъ можетъ быть перенесенъ на всѣ геометрическія системы одинаковой то есть второй ступени; въ частности, онъ можетъ быть перенесенъ и на систему точекъ на сферѣ.

Но такъ какъ на сферѣ нѣтъ различія между эллипсами и гиперболами, и всѣ сферическія конопримы могутъ быть приравнены къ эллипсамъ (обѣ главныя полуоси вещественны), то значитъ полная совокупность таковыхъ, какъ вещественныхъ или мнимыхъ, по начертанію нисколько не будетъ отличаться одна отъ другой, и составленная діаграмма сферическихъ конопримъ одинаково относится какъ къ вещественнымъ, такъ и къ мнимымъ конопримамъ.

По отношенію къ коносекундамъ мы уже получаемъ существенное различіе, какъ это и было выяснено въ статьѣ, трактующей объ этомъ предметѣ [2]), и притомъ различіе относится, собственно, только къ гиперболоидамъ, однополымъ или двуполымъ эллипсоиды же вещественные или мнимые по начертанію не отличаются другъ отъ друга.

Это мы можемъ выразить такъ: существуютъ только мнимые эллипсоиды, но мнимыхъ гиперболоидовъ, ни однополыхъ, ни двуполыхъ (въ частности также и параболоидовъ) и параболическихъ гиперболоидовъ не существуетъ.

Впрочемъ, этотъ выводъ непосредственно вытекаетъ и изъ указаннаго выше вывода о несуществованіи мнимыхъ гиперболъ (и параболъ).

Подобно тому, какъ въ гиперболахъ мы имѣемъ пару вещественныхъ двойныхъ діаметровъ (ассимптотъ), въ гиперболоидахъ мы имѣемъ конусъ такихъ діаметровъ (ассимптотическій).

Подобно тому, какъ въ эллипсахъ мы имѣемъ пару мнимыхъ двойныхъ діаметровъ, въ эллипсоидахъ мы имѣемъ конусъ мнимыхъ двойныхъ діаметровъ (по аналогіи можно было бы назвать его мнимымъ асимптотическимъ конусомъ).

Какъ совокупность всѣхъ подобныхъ эллипсовъ опредѣляется этою мнимою парою лучей, такъ совокупность всѣхъ подобныхъ эллипсоидовъ опредѣляется мнимымъ ассимптотическимъ конусомъ.

Относительно гиперболоидовъ эту теорему можно считать общеизвѣстною.

Что такое опредѣленіе конопримъ и коносекундъ (вещественными или мнимыми парами лучей или конусовъ) есть именно наиболѣе существенное опредѣленіе, доказываетъ то обстоятельство, что только на основаніи такого опредѣленія можно было составить діаграмму сферическихъ конопримъ и коносекундъ. Къ этимъ опредѣленіямъ всегда приходится прибѣгать, чтобы получить выводы общаго характера. Къ такому опредѣленію прибѣгнулъ и Штейнеръ, выводя разряды конопримъ, представленныхъ въ ихъ линейныхъ примахъ.

Повторимъ этотъ выводъ.

Пусть даны какія-угодно двѣ плоскія конопримы, опредѣляемыя каждая парою лучей вещественныхъ (для гиперболъ) или мнимыхъ (для эллипсовъ). Такъ какъ эти пары относятся къ діаметрамъ данныхъ конопримъ, то двѣ таковыя на экстранрямой есть двѣ пары инволюціи точекъ на ней (на основаніи теоремы Дезарга, относящейся къ любому сѣченію конопримъ сѣкущею прямою). Но инволюціи вообще могутъ быть лишь двоякаго рода: или 1)

---

[1]) Эти Записки IV. 397

[2]) Мыслимъ случай, когда этого различія между вещественными кривыми не существуетъ. Это случай двухъ концентрическихъ конопримъ, которыя мы можемъ пересѣчь концентрическою парою лучей. Въ этомъ случаѣ слѣдовательно, вся линейная прима концентрическихъ конопримъ состоитъ изъ тождественныхъ по начертанію вещественныкъ и мнимыхъ конопримъ.

пара двойныхъ точекъ вещественна (есть точки пересѣченія экстрапрямою ассимптотъ гиперболы, почему она и названа Штейнеромъ гиперболическою) или же 2) эта пара двойныхъ точекъ мнима (въ случаѣ эллипсовъ, почему инволюція и названа имъ эллиптическою).

Въ первомъ случаѣ вещественныя двойныя точки на экстрапрямой есть гиперболы съ нулевымъ угломъ между ассимптотами то есть параболы, а слѣдовательно въ составъ линейной примы кромѣ гиперболъ, въ числѣ которыхъ необходимо должна присутствовать и одна, и только одна, гипербола съ прямымъ угломъ между ассимптотами (она же есть гипербола равносторонняя, а въ составѣ линейной примы играетъ роль тетрапримы, а въ мѣстѣ съ тѣмъ и экстраэлемента), переходомъ черезъ параболу мы имѣемъ и рядъ эллипсовъ, вообще рядъ, заканчивающійся на нѣкоторомъ углѣ между мнимыми лучами пары, и лишь въ исключительномъ случаѣ уголъ доходитъ до прямого, и тогда въ примѣ представленъ и кругъ.

Во второмъ случаѣ вещественныхъ двойныхъ точекъ, а слѣдовательно и параболъ, въ примѣ вовсе не представлено, и тогда она состоитъ только изъ гиперболъ, въ числѣ которыхъ необходимо представлена тетраприма, а всѣ остальные съ равными (или дополнительными до $2d$) углами представлены попарно вплоть до нѣкотораго угла, принадлежащаго крайнимъ членамъ.

Въ томъ спеціальномъ случаѣ, когда заданы обѣ равносторонніе гиперболы, получаемъ на экстрапрямой изотропную инволюцію, и слѣдовательно всѣ кривыя линейной примы есть равносторонніе гиперболы.

Столь просты и ясны выводы, получаемые отъ этой концепціи.

Однако, такъ какъ Штейнеръ совершенно не имѣлъ въ виду мнимыхъ конопримъ, то теперь необходимо ее дополнить. По закону непрерывности, относящемуся ко всякой инволюціи, вещественныя конопримы не могутъ иначе переходить въ мнимыя какъ только черезъ пару точекъ, которая представляетъ спеціальный видъ эллипса, для котораго различіе между вещественнымъ и мнимымъ пропадаетъ.

Если, слѣдовательно въ составѣ линейной примы имѣются мнимые эллипсы, то необходимо имѣется и тотъ спеціальный ихъ видъ, который представленъ парою точекъ; въ общемъ случаѣ и наоборотъ, если линейная прима задана парою точекъ и какою-нибудь другою конопримою, то въ составѣ линейной примы имѣются и мнимые эллипсы [1]).

Но эта, замѣчательная по простотѣ, концепція, вообще совершенно не предусматриваетъ, какія именно кривыя изъ полной совокупности подобныхъ, представлены въ данной линейной примѣ, хотя мы и знаемъ, что одинъ или три члена этой примы есть пары лучей (спеціальныя гиперболы).

Эта концепція, однако, совершенно не примѣнима къ конопримамъ на сферѣ по самому ея существу, такъ какъ здѣсь не имѣется экстрапрямой и вообще сферической прямой, по отношенію къ которой всѣ центры конопримъ были бы полюсами.

Вообще же можно видѣть, что для сферической системы задача опредѣленія конопримъ, входящихъ въ составъ линейной примы, гораздо сложнѣе. На діаграммѣ плоскихъ конопримъ [2]) всѣ фигуративныя точки сводятся къ отрѣзку на прямой и полуокружности круга. Здѣсь же фигуративныя точки занимаютъ поверхность, заключенную въ прямомъ треугольникѣ.

Если мы примемъ во вниманіе, что въ общемъ случаѣ въ линейной примѣ имѣется три пары лучей, а фигуративныя точки на сферѣ (также какъ и на плоскости) принадлежатъ линейной примѣ точекъ, то это даетъ намъ возможность заключить, что полная совокупность фигуративныхъ точекъ на сферѣ (а слѣдовательно и на плоскости) есть кривая не ниже 3-го порядка.

Съ другой стороны такая кривая пересѣкаетъ всякую прямую въ трехъ, или по крайней мѣрѣ въ одной вещественной точкѣ (въ частномъ случаѣ касанія—еще въ одномъ. Отсюда можно заключить, что вообще въ составѣ линейной примы имѣются три и во всякомъ случаѣ не меньше одной изъ всѣхъ тѣхъ рязрядовъ конопримъ, которыя представлены сферическими прямыми (на плоской діаграммѣ просто прямыми). Относительно остальныхъ разрядовъ мы никакихъ заключеній сдѣлать не можемъ.

Итакъ, въ каждой линейной примѣ конопримъ на сферѣ представлено по три и

---

[1]) Исключеніе составляетъ только тотъ особо спеціальный случай, когда пара точекъ является именно крайнимъ эллипсомъ линейной примы. Кромѣ того, особымъ спеціальнымъ случаемъ можетъ быть и слившаяся въ одну пара точекъ, то есть двойная точка (но не инволюціи), и тогда эта точка есть точечный кругъ. Въ этомъ случаѣ, какъ всегда, когда въ линейной примѣ присутствуетъ кругъ, представлены члены всѣхъ подобныхъ эллипсовъ и гиперболъ.

[2]) Діаграммы плоскихъ конопримъ. Эти Записки IV. 366.

во всякомъ случаѣ не меньше, чѣмъ по одной конопримѣ Паппуса, гармонической, Гашетта, паръ лучей и паръ точекъ [1]); затѣмъ представлено по три, и не меньше чѣмъ по одной, изъ всѣхъ изофокальныхъ и изоциклическихъ конопримъ. Относительно же полярныхъ конопримъ Шретера, ортогональныхъ и полярноортогональныхъ конопримъ могутъ быть различные случаи, но изъ конопримъ Шретера, какъ мы знаемъ всегда представлена только одна единственная. Линейная прима конопримъ Шретера, слѣдовательно, представляетъ спеціальный и исключительный случай.

Въ силу родственности системъ конопримъ точекъ и конопримъ лучей на сферѣ мы можемъ всѣ эти теоремы непосредственно перенести и на систему конопримъ лучей, замѣняя конопримы точекъ ихъ полярными.

Но родственные сферическимъ конопримамъ конусы и сами по себѣ представляютъ спеціальныя коносекунды и въ то же время есть предѣльные члены всѣхъ безъ исключенія совокупностей подобныхъ коносекундъ. Поэтому, если бы мы даже ограничились составленіемъ линейныхъ примъ и другихъ совокупностей изъ однихъ конусовъ, то вопросъ о нихъ былъ бы рѣшенъ въ той же мѣрѣ, а вопросъ о составѣ линейныхъ примъ плоскихъ конопримъ по приведенному пріему Штейнера, конечно, если бы мы при этомъ еще приняли во вниманіе и мнимые конусы и ихъ особенныя свойства.

Если даны двѣ коносекунды, то по этому пріему мы можемъ проектировать оба опредѣляющіе ихъ конуса (ассиптотическіе вещественные или мнимые) на экстраплоскость, или иначе, перенести параллельнымъ поступательнымъ движеніемъ одинъ конусъ такъ, чтобы центры обоихъ конусовъ совпали, а тогда всѣ конусы ихъ линейной примы будутъ одновременно и ассимптотическими конусами коносекундъ линейной примы, почему составъ линейной примы коносекундъ опредѣлится, согласно сказанному выше объ этомъ предметѣ.

Въ частности, въ каждой такой линейной примѣ будетъ представлено три, и не меньше чѣмъ одна, пара плоскостей. Все дѣло опредѣленія линейныхъ примъ коносекундъ сводится къ нахожденію одной такой пары, потому что конопримы пересѣченія каждою изъ плоскостей этой пары обѣими данными коносекундами должны быть тождественными (вещественными или мнимыми); каждая же изъ этихъ конопримъ опредѣляетъ по плоскости полярную систему, а по двумъ полярнымъ системамъ легко воспроизвести всю линейную приму коносекундъ.

Вообще же, въ составъ произвольной линейной примы коносекундъ необходимо входитъ одна, и только одна, коносекунда Шретера; слѣдовательно, коносекунды Шретера опредѣляютъ одною точкою меньше, чѣмъ коносекунды общаго характера и значитъ 8-ю точками, а потому представляетъ октосекунды и онѣ же есть экстраэлементы линейныхъ примъ коносекундъ.

Въ частности, такая линейная прима коносекундъ опредѣлится двумя конусами Шретера, произвольно расположенными въ пространствѣ.

Едва ли нужно прибавлять, что если въ линейной примѣ коносекундъ имѣются мнимыя эллипсоиды, то необходимо должна присутствовать и специальная коносекунда въ видѣ пары точекъ.

---

[1]) Но сфероприм въ общемъ случаѣ вовсе нѣтъ, а если въ особенномъ случаѣ и имѣется, то только одна, потому что уже двѣ опредѣляютъ линейную приму сферопримы. Отсюда видимъ, что фигуративная линія сфероприм имѣетъ по отношенію къ кривой 3-го порядка спеціальное положеніе.