38. Практическое рѣшеніе задачи проведенія линейной примы конопримъ по двумъ даннымъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 16 сентября).

Именно этой задачѣ посвятилъ Штейнеръ свое знаменитое сочиненіе о линейныхъ примахъ конопримъ (Kegelschnittbüschel) и именно въ немъ онъ изложилъ ее съ такою исчерпывающею полнотою, что рѣшительно не было бы нечего прибавить къ этому, если бы только онъ напередъ не ограничилъ свою задачу вещественными конопримами; между тѣмъ данными могутъ быть и мнимыя конопримы, хотя бы, въ сущности и только эллипсы, такъ какъ мнимыя гиперболы равносильны съ вещественными гиперболами съ тѣми же ассимптотами, такъ называемыя сопряженныя.

Главнымъ результатомъ изслѣдованій Штейнера явился тотъ выводъ, что въ каждой линейной примѣ конопримъ имѣется особая пара лучей, представляющихъ спеціальную коноприму этой линейной примы, и на ней инволюціи опредѣляются парами точекъ, какъ двойныхъ точекъ инволюціи, вещественныхъ или мнимыхъ. По этимъ даннымъ уже такъ легко рѣшать вопросы, относящіеся къ линейнымъ примамъ, въ частности, по одной данной точкѣ строить коноприму, что поставленную задачу можно считать рѣшенною, когда она приведена къ этому виду.

Въ томъ одномъ изъ трехъ случаевъ, когда обѣ инволюціи на парѣ лучей есть инволюціи гиперболическія то есть обѣ пары двойныхъ точекъ вещественны, задача сразу же приводится къ этому окончательному виду, такъ какъ всѣ относящіяся сюда конопримы вещественно пересѣкаются въ этихъ четырехъ точкахъ, и тогда мы имѣемъ три пары спеціальныхъ конопримъ въ видѣ паръ лучей, проходящихъ чрезъ всѣ эти четыре точки.

Въ остальныхъ случаяхъ задача рѣшается лишь при посредствѣ пересѣченія двухъ кривыхъ второго порядка и такимъ образомъ связана съ осложненіями и не обладаетъ достаточною степенью общности.

Если принять во вниманіе, что трудами послѣдующихъ геометровъ, и въ особенности Рейе, задача Штейнера расширена на линейныя секунды и высшія линейныя совокупности конопримъ, то понятно, что могла зародиться мысль воспользоваться нѣкоторыми замѣчательными свойствами этихъ высшихъ совокупностей, а именно линейныхъ секундъ, для выработки болѣе общаго способа рѣшенія поставленной задачи, одинаково примѣнимаго не только тогда, когда обѣ данныя, опредѣляющія линейную приму, конопримъ не имѣютъ двухъ паръ вещественныхъ точекъ пересѣченія, но даже и тогда, когда одна изъ нихъ или обѣ мнимы. Этотъ способъ мыслился по аналогіи съ тѣмъ, который, былъ употребленъ въ руководствѣ автора „Новая геометрія какъ основа черченія“ для болѣе простого случая линейной примы круговъ, когда два данные круга не пересѣкаются. Пересѣкая ихъ третьимъ, мы приходимъ къ линейной секундѣ, изъ которой уже просто выдѣлить требуемую линейную приму.

Въ примѣненіи къ конопримамъ этотъ способъ состоитъ въ томъ, что, пересѣкая данныя двѣ кривыя парою лучей, которую всегда можно именно такъ выбрать, чтобы каждый изъ лучей пары вещественно пересѣкалъ обѣ кривыя, мы этимъ самымъ опредѣляемъ нѣкоторую линейную секунду конопримъ, причемъ можемъ довольно просто строить части кривой Якоби, которая представляетъ совокупность центровъ паръ лучей, какъ входящихъ въ составъ линейной секунды спеціальныхъ конопримъ. Если затѣмъ возьмемъ другую пару лучей, также вещественно пересѣкающую обѣ кривыя, то опредѣлимъ другую линейную секунду и вмѣстѣ съ тѣмъ можемъ построить другую кривую Якоби, въ той ея части, которая пересѣкается первою въ искомомъ

центрѣ общей пары лучей, и должна быть спеціальной конопримой линейной примы, какъ элементъ пересѣченія двухъ линейныхъ секундъ, проходящихъ чрезъ общую линейную приму.

Получивъ такую точку, мы уже легко находимъ общую поляру обѣихъ кривыхъ, а на этой полярѣ имѣемъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ—точекъ пересѣченія поляры обѣими кривыми; по этимъ же двумъ парамъ легко получаемъ обѣ двойныя точки инволюціи, которыя въ соединеніи съ полученною точкою даютъ искомую пару лучей.

Я называю этотъ способъ практическимъ, исходя изъ того соображенія, что при нѣкоторой опытности по положенію кривыхъ намѣчается районъ, въ которомъ должна находиться искомая точка, и тогда кривую Якоби нужно вычерчивать такъ, чтобы получать ея точки преимущественно въ этомъ районѣ.

Во всякомъ случаѣ этотъ способъ настолько общеприменимъ, что для его осуществленія нѣтъ существеннаго различія въ томъ, будутъ ли обѣ кривыя вещественныя, или одна изъ нихъ и даже обѣ мнимы.

Въ самомъ дѣлѣ, проведя по вышеизложеннымъ условіямъ лучи, мы на каждомъ изъ нихъ находимъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ, а будутъ ли эти пары вещественны или мнимы, по такимъ двумъ парамъ всегда найдемъ пары двойныхъ точекъ, и притомъ всегда вещественныхъ, если хоть одна изъ данныхъ паръ есть пара мнимая.

Такимъ образомъ на обоихъ лучахъ пары мы получаемъ инволюціи, а по этимъ инволюціямъ легко построимъ кривую Якоби, если воспользуемся свойствами системы паръ на лучахъ, изложенными въ одной изъ работъ автора [1]).

Мы можемъ именно эти пары коррелятивно связать съ нѣкоторыми точками на томъ же лучѣ, получающимися какъ гармонически-сопряженныя съ нѣкоторою постоянною точкою C, за которую примемъ центръ пары лучей.

Такимъ образомъ мы установимъ гомологичность этихъ гармоническихъ точекъ на обоихъ лучахъ, и притомъ гомологичныя точки будутъ находиться въ перспективномъ положеніи, такъ какъ четвертая гармоническая по отношенію къ парѣ линейной примы, содержащей точку C, будетъ сама эта точка, которая будетъ, слѣдовательно и общею гомологичною точкою для обоихъ лучей.

Такъ какъ гомологичныя пары точекъ на обоихъ лучахъ принадлежатъ одной и той же конопримѣ, то, соединяя эти пары перекрестными лучами, получаемъ двѣ точки кривой Якоби, если только эти пары вещественны, а каждый изъ лучей пары всегда веществененъ, будетъ ли на немъ представлена гиперболическая или эллиптическая инволюція, а потому въ данномъ построеніи мы соединяемъ лучами только вещественныя пары точекъ, а въ совокупности можемъ получить всѣ точки кривой Якоби, хотя достаточно получить и три пары лучей, чтобы построить эту кривую. Этой кривой принадлежитъ и центръ взятой произвольной пары лучей и двойныя точки инволюціи на каждомъ изъ лучей.

---

[1]) Эти Записки I, 323 и слѣд.