

36. Основные формулы сферической и плоской тетрагонометрии.

Е. С. Федорова

(доложено 14 января).

I. Формулы сферической тетрагонометрии.

Система зональных вычислений, специально приспособленная к целям кристаллографии и приводящая к простейшим из возможных математических операций ¹⁾, конечно станет делом совершенной необходимости при более широком распространении кристаллохимического анализа, в котором принимают преобладающее участие чистые химика. Необходимость этого особенно выяснена в статье „Простейший ход операций кристаллографического исследования“.

В этих работах приведены все формулы, неизбежно необходимые при этих вычислениях.

Можно сказать утвердительно, что для практических целей кристаллохимического анализа употребляющиеся графические приемы вполне достаточны, несмотря на связанную с ними неточность. Но с течением времени, по мере расширения материала, все больше и больше будет ощущаться потребность в замене более грубо полученных чисел более точными, что во многих случаях сократит все усложняющийся труд отыскания в таблицах вещества, определенного в виде символа комплекса.

Но так как приведенные раньше формулы еще не дают возможности производить таких вычислений, то потребность в расширении их круга дает себя чувствовать.

Конечно, все такие формулы по существу должны извлекаться из сферической тригонометрии, имющей и исчерпывающей определенную задачу таких вычислений, несмотря на малое место, занимаемое ею в области анализа. Эта законченность ее в отношении решения столь важных вопросов даже де-

лает из нее науку, необходимо входящую в состав общего образования.

Однако специально в отношении кристаллографических вычислений по зональной системе формулы этой науки являются недостаточными, так как в них не входят та специальная особенность вычисляемых величин, по которой все они вполне определяются именно четырьмя точками на сфере.

Ближайшее ознакомление с предстоящею задачей показывает, что здесь не просто приходится решать сферические треугольники по трем данным углам, что именно исчерпывается сферической тригонометрией, но что здесь представляется возможность вычислять сферические элементы, в неопределенном числе получающиеся построением по данным четырем точкам, и находить для каждого такого элемента соответствующую формулу, выражающую его даже при произвольном изменении в положении четырех основных точек. Разрешимость этой задачи вытекает из следующих соображений.

Взяв по четырем данным точкам, проводя чрез них попарно сначала шесть дуг большого круга и находя затем новые точки пересечения этих дуг, мы получаем определенную таким построением безгранично развивающуюся совокупность точек.

Как на плоскости, так и на сфере, мы воспроизводим таким образом геометрическую сферу Мебиуса ¹⁾, которая и совпадает с лежащим в основании кристаллографии понятием комплекса.

¹⁾ В статье «Крайнее упрощение зональных вычислений и кристаллографических вычислений вообще». (Записки И. СПб. Минералогич. Общес., 1906 44 199).

¹⁾ В его соч. «Der barycentrische Calcul» собственно воспроизведена только геометрическая сфера на плоскости, имьющая в своем основании четыре произвольные данные точки.

При этомъ каждая точка (на сферѣ собственно пара) диаметально-противоположныхъ точекъ пересѣченія дугъ большого круга опредѣляется ими однозначно, а изъ этого слѣдуетъ, что такъ какъ рѣшеніе можетъ быть по существу только одно, мы имѣемъ здѣсь дѣло съ линейными связями. Другими словами, тригонометрическія функціи, выражающія рѣшенія для каждого даннаго элемента связаны съ основными данными линейными уравненіями, и значить могутъ быть всегда выведены въ явномъ видѣ.

Такимъ образомъ, для рѣшенія этой частной задачи мы имѣемъ спеціальныя условія, дѣлающія возможнымъ выводъ общихъ формулъ для каждого элемента; этотъ отдѣлъ, выдѣляясь по этой особенноти отъ тригонометріи вообще, составляетъ какъ бы ея особый самостоятельный отдѣлъ, который еще не подвергался систематической обработкѣ. Ради опредѣленности, мы назовемъ его сферическою тетрагонометріею. Задача этой статьи и есть выводъ основныхъ формулъ этого отдѣла то есть формулъ для элементовъ, простѣйшимъ образомъ выводимыхъ изъ четырехъ данныхъ (паръ) точекъ.

Конечно, какъ выраженіе паръ точекъ мы должны имѣть въ уравненіяхъ такія функціи, которыя и опредѣляютъ эти пары.

Принадлежность такой пары точекъ на сферѣ къ геометрической сѣти, какъ извѣстно изъ кристаллографіи, можетъ быть выражена особыми символами изъ цѣлыхъ чиселъ.

Въ основу такого обозначенія мы можемъ положить для нѣкоторыхъ трехъ изъ данныхъ точекъ произвольныя цѣлыя числа (лишь бы они не имѣли общихъ множителей); но для четвертой изъ данной точекъ, какъ непосредственно изъ нихъ выводимой и опредѣляющей геометрическую сѣть, мы должны взять три числа, составляющія суммы соответственныхъ чиселъ трехъ другихъ символовъ. Но конечно, для того, чтобы эта четвертая точка могла служить для опредѣленія сѣти, она не можетъ находиться ни на одной изъ дугъ большого круга, опредѣляемыхъ данными точками, взятыми попарно; при этомъ точка, числа (индексы) которой составляются суммированіемъ изъ трехъ другихъ, должна именно находиться внутри трехугольника, опредѣляемаго этими точками.

Совокупность точекъ на одной дугѣ большого круга или совокупность такихъ дугъ, проходящихъ чрезъ одну точку также составляютъ часть общей сѣти, насколько они пересѣкаются другими дугами, получающимися при развитіи сѣти или опредѣляются, кромѣ данной общей, еще какою-нибудь точкою,

входящею въ сѣть. Для такихъ точекъ (и дугъ круга) требуется уже не три, а только два опредѣляющія числа, которыя мы назовемъ поясовыми индексами.

Изъ данныхъ четырехъ точекъ выдѣлимъ особую пару точекъ a и b и назовемъ ихъ исходными точками. Дуга большого круга ab опредѣлитъ собою исходный поясъ. Двѣ другія точки c и d каждая отдѣльно, съ каждою изъ исходныхъ точекъ опредѣлитъ нѣкоторый поясъ, и два такихъ пояса проходящіе чрезъ одну изъ исходныхъ точекъ, могутъ быть точно опредѣлены углами съ исходными поясами.

Отсюда видимъ, что каждыя изъ двухъ точекъ c и d вполне и однозначно опредѣляются двумя углами пересѣкающихся въ ней поясовъ, проходящихъ чрезъ исходныя точки.

Въ совокупности же положеніе всѣхъ четырехъ точекъ на сферѣ опредѣлится пятью константами, считая кромѣ упомянутыхъ двухъ паръ угловъ еще и уголъ ab какъ первую константу сѣти. Обозначимъ остальные четыре константы соответственно чрезъ A_1 , B и B_1 , причѣмъ буквы A относятся къ исходной грани a и буквы B къ b , и, въ частности, A и B — къ точкѣ c , а A_1 и B_1 — къ точкѣ d .

Теперь выведемъ простую формулу, по которой опредѣляются такіе сферическія координаты любой точки геометрической сѣти, данной числами (индексами) символа.

Ради простоты примемъ точкѣ a символъ (100) , точкѣ b — (010) , точкѣ c — (001) , а четвертой точкѣ d , находящейся внутри трехугольника abc — (111) , и зададимся вопросомъ, какими координатами опредѣлится нѣкоторая точка съ символомъ $(p_1 p_2 p_3)$, гдѣ, какъ объяснено выше, всѣ три числа цѣлыя, что и выразить принадлежность къ геометрической сѣти? Съ точкою a она опредѣлитъ поясъ $\begin{vmatrix} 100 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [0 p_3 p_2]$, а съ точкой b — поясъ $\begin{vmatrix} 010 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [p_3 0 p_1]$.

Въ точкѣ a пересѣкаются теперь четыре пояса, изъ которыхъ исходный ab отмѣтимъ $[10]$ вмѣсто $[001] = \begin{vmatrix} 101 \\ 010 \end{vmatrix}$, а c отмѣтимъ $[01]$ вмѣсто $[010] = \begin{vmatrix} 100 \\ 001 \end{vmatrix}$; символъ пояса $ad = [11]$ составитъ изъ $[10]$ и $[01]$, также какъ $[011] = \begin{vmatrix} 100 \\ 111 \end{vmatrix}$ составитъ изъ $[001]$ и $[010]$; соответственно этому при точкѣ b получимъ для пояса ba $[10]$ вмѣсто $[001] = \begin{vmatrix} 010 \\ 100 \end{vmatrix}$, для bc — $[01]$ вмѣсто $[100] = \begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix}$ и для bd $[11] = [10] + [01]$, какъ $[101] = \begin{vmatrix} 010 \\ 111 \end{vmatrix}$ составляется изъ $[001]$ и $[100]$.

Такъ какъ символъ $[0\bar{p}_3p_2] = p_2[001] - p_3[010]$ и $p_2[10] - p_3[01] = [p_2p_3]$, и $[p_30p_1] = p_1[001] + p_3[100]$, и $p_1[10] + p_3[01] = [p_1 + p_3]$, то такимъ образомъ находимъ поясовые символы въ точкахъ a и b , соответствующіе данной точкѣ.

Теперь, переходя къ выводу самой формулы, связывающей числа символа съ величины угловъ, замѣтимъ, что проще всего для этого воспользоваться свойствами гномонической проекціи.

Предположимъ, что точка O (фиг. 1) есть гномоническая проекція грани a (то есть той, для которой точка a есть гномостереографическая проекція) и пусть рядъ точекъ $A, B, E, G \dots$ выражаетъ рядъ гномоническихъ проекцій граней одного пояса причемъ одна изъ нихъ, точка A , представлена точкою въ безконечности. Каждый лучъ, соединяющій точку O съ другими, изображаетъ нѣкоторый поясъ, и тотъ изъ нихъ, который соответствуетъ точкѣ A примемъ за исходный и означимъ символомъ $[10]$; поясу OB припишемъ символъ $[01]$, а поясу OE —символъ $[11]$.

По свойствамъ гномонической проекціи сейчасъ найдемъ поясъ $[mn]$, если отрѣзокъ BE раздѣлимъ на n равныхъ частей, и отложимъ m такихъ частей считая отъ точки B ; пусть найденная точка есть G ; кромѣ того, означимъ чрезъ F основаніе перпендикуляра изъ O .

$$\text{Имѣемъ } BG = \frac{m}{n} BE,$$

$$\text{и также } FB + BG = FG = FB + \frac{m}{n} BE =$$

$$= \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n} (FB + BE) = \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n} FE$$

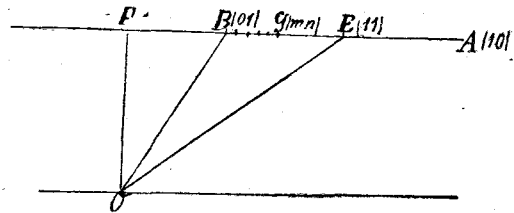
$$\text{то есть } n \cdot FG = (n-m) FB + m FE$$

Если разстояніе OF примемъ за единицу, то величины отрѣзковъ на прямой AF , считаемыя отъ точки F , прямо выразятъ величины тангенсовъ угловъ, считаемыхъ отъ перпендикуляра, или, что все равно, котангенсовъ угловъ считаемыхъ отъ луча OA (фиг. 1).

$$\text{Слѣдовательно } n \cdot \cotg [mn] = (n-m) \cotg [01] + m \cotg [11] \dots \dots \dots 1)$$

Вотъ это то и есть основная формула сферической тетрагонометріи ¹⁾, которая позволяетъ чрезъ

вычайню просто (путемъ алгебраическаго сложения котангенсовъ по ихъ натуральнымъ числамъ и безъ употребленія логарифмовъ) вычислить угловые ко-



Фиг. 1.

ординаты каждой точки на сферѣ, опредѣленной символомъ.

Если четвертая точка гармонически сопряжена съ точкою $[11]$, то ея символъ есть $[\bar{1}\bar{1}]$, а потому для нея получимъ формулу, выведенную еще Миллеромъ ²⁾.

$$\cotg [\bar{1}\bar{1}] = 2 \cotg [01] - \cotg [11] \dots (1a)$$

Но если вообще эта формула даетъ возможность столь просто вычислить координаты какой угодно точки геометрической сѣти, то кающимся образомъ она непримѣнима къ точкамъ исходнаго пояса имѣющимъ всегда угловые координаты 0 или π .

Однако и этотъ спеціальнй случай нетрудно привести къ общему, примѣняя особый ходъ соображеній.

Дѣйствительно, въ этомъ спеціальномъ случаѣ координаты пріобрѣтаютъ другое значеніе, такъ какъ относятся уже не къ угламъ между поясомъ, а непосредственно къ угламъ съ исходными точками a и b ; достаточно вычислить такіе углы еще для какой-нибудь одной точки, и основная формула 1) становится примѣнимою для всѣхъ остальныхъ.

Вычислимъ углы той точки e съ исходными, числа символа которой слагаются изъ чиселъ символа исходныхъ точекъ; въ нашемъ случаѣ ей принадлежитъ символъ (110) .

Чрезъ (110) и еще какую-нибудь произвольную точку проведемъ поясъ; ясно, что форм. 1) непосредственно примѣнима ко всѣмъ точкамъ пояса (входящимъ въ составъ сѣти) за исключеніемъ самой

¹⁾ Эта формула приводится и въ элементарныхъ учебникахъ кристаллографіи напр. въ сокращенномъ курсѣ (1910) автора.

²⁾ Philosophical Magazine 1857, Febr. 98. Она приведена и выведена во второмъ этюдѣ по аналитической кристаллографіи (глава III фор. 8).

(110), какъ предѣльной; но въ числѣ точекъ этого пояса есть и такія, которыя столь приближены къ этой предѣльной точкѣ, что углы ихъ съ точками a и b можно считать практически одинаковыми съ углами, опредѣляемыми точкою e ; перейдя къ предѣлу, найдемъ математически точное ихъ выражение.

Въ виду произвольности третьей точки, какъ вспомогательной для опредѣленія пояса, мы, ради простоты, можемъ взять и точку (001), и тогда каждая точка этого пояса выразится символомъ x_1 (110) + x_2 (001) то есть $(x_1 x_2)$.

Поэтому легко опредѣлить и символы поясовъ, образуемыхъ этою точкою съ исходными, а именно:

$$\left. \begin{matrix} 100 \\ x_1 x_2 \end{matrix} \right\} = [Ox_1 x_1] \text{ и } \left[\begin{matrix} 010 \\ x_1 x_2 \end{matrix} \right] = [x_2 O x_2];$$
 поясовые же символы ихъ при обѣихъ исходныхъ точкахъ легко опредѣлятся какъ $|x_1 x_2|$.

Слѣдовательно $x_2 \cotg |x_1 x_2| = (x_2 - x_1) \cotg |01| + x_1 \cotg |11| \dots \dots \dots \text{А).}$

Если точка x бесконечно близка къ точкѣ e то въ сферическомъ треугольникѣ abc имѣемъ $\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \frac{\sin(abx)}{\sin(bax)}$; последнее отношеніе бесконечно

близко къ отношенію $\frac{\cotg(bax)}{\cotg(abx)}$, потому что обѣ величины $\cos(abx)$ и $\cos(bax)$ бесконечно близки къ 1-цѣ.

Формула А) имѣетъ двоякое примѣненіе, какъ къ точкѣ a , такъ и къ точкѣ b ; различимъ послѣднее примѣненіе отъ перваго прибавленіемъ апострофа, и тогда получимъ

$$\frac{\cotg' |x_1 x_2|}{\cotg |x_1 x_2|} = \frac{(x_2 - x_1) \cotg A + x_1 \cotg A_1}{(x_2 - x_1) \cotg B + x_1 \cotg B_1}$$

Переходя къ предѣлу, когда значеніе $x_2 = 0$, получимъ

$$\begin{aligned} \frac{\cotg |x_1 x_2|}{\cotg' |x_1 x_2|} &= \frac{\sin' |x_1 x_2|}{\sin |x_1 x_2|} = \frac{\sin(ae)}{\sin(be)} = \\ &= \frac{\cotg A_1 - \cotg A}{\cotg B_1 - \cotg B} = k^1) \dots \dots \dots 2) \end{aligned}$$

1) Эту формулу можно вывести и изъ формулъ сферической тригонометрии, а именно:

$$a) \cotg de \cdot \sin ae = \cotg A_1 \cdot \sin(aed) + \cos ae \cdot \cos(aed)$$

$$b) \cotg de \cdot \sin be = \cotg B_1 \cdot \sin(bed) + \cos be \cdot \cos(bed)$$

$$c) \cotg ce \cdot \sin(ae) = \cotg A \cdot \sin(aec) + \cos ae \cdot \cos(aed)$$

$$d) \cotg ce \cdot \sin(be) = \cotg B \cdot \sin(bec) + \cos be \cdot \cos(bed)$$

если раздѣлимъ $a)$ на $b)$ и $c)$ на $d)$ и затѣмъ въ равныхъ дробяхъ произведемъ вычитаніе въ числитель и знаменателѣ, и примемъ во вниманіе, что $\cos(aed) = -\cos(bed)$.

На это обратилъ мое вниманіе проф. В. И. Бауманъ.

Впервые эта формула дана въ этихъ Запискахъ IV на стр. 65.

Отсюда выводится

$$\sin^2 (be) = \frac{\sin^2 (ab)}{k^2 + 2k \cos(ab) + 1} = \frac{\sin^2 (ab)}{[k + \cos(ab)]^2 + \sin^2(ab)} \cdot 3$$

$$\text{и также } \cotg (be) = \frac{k + \cos(ab)}{\sin(ab)} \text{ и}$$

$$\cotg (ae) = \frac{1/k + \cos(ab)}{\sin(ab)} = \frac{1 + k \cos(ab)}{k \sin(ab)} \dots \dots \dots 3a)$$

Также для точкѣ e' , гармонически сопряженной съ e (по отношенію къ ab) найдемъ

$$\sin^2 (be') = \frac{\sin^2 (ab)}{k^2 - 2k \cos(ab) + 1} = \frac{\sin^2 (ab)}{[k - \cos(ab)]^2 + \sin^2(ab)} 3b)$$

$$\text{и } \cotg (be') = \frac{-k + \cos(ab)}{\sin(ab)} \text{ и еще}$$

$$\cotg (ae') = \frac{1/k - \cos(ab)}{\sin(ab)} = \frac{1 - k \cos(ab)}{k \sin(ab)}, \dots \dots \dots 3c)$$

$$\begin{aligned} \text{причемъ } 2 \cotg (ab) &= (\cotg (ae) - \cotg (ae')) = \\ &= \cotg (be) + \cotg (be') \end{aligned}$$

Далѣе выводимъ еще

$$\begin{aligned} \cotg (ee') &= \cotg (ae + ae') = \cotg (be' - be) = \\ &= \sin \frac{1 - k^2}{2k \sin(ab)} \dots \dots \dots 4) \end{aligned}$$

Въ частности, если $k = 1$, находимъ

$$\sin (ae) = \sin (be) = \sin \frac{ab}{2},$$

$$\text{и отсюда изъ 3) } \sin^2 \frac{ab}{2} = \frac{\sin^2(ab)}{2[1 + \cos(ab)]} = \frac{1 - \cos(ab)}{2}$$

$$\text{„ изъ 3a) } \cotg \frac{ab}{2} = \frac{1 + \cos(ab)}{\sin(ab)}$$

$$\text{„ изъ 4) } \cotg (ee') = 0,$$

что впрочемъ понятно само собою.

Теперь перейдемъ къ выводу формулъ для угловъ любыхъ точекъ съ исходными.

Для нѣкоторой точки c имѣемъ, какъ извѣстно,

$$\tan g \frac{ac + bc}{2} = \tan g \frac{ab}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(B-A)}{\cos \frac{1}{2}(B+A)}$$

$$\text{и } \operatorname{tang} \frac{ac-bc}{2} = \operatorname{tang} \frac{ab}{2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}(B+A)}$$

Примем еще во внимание формулы

$$\operatorname{tang} \left\{ \frac{ac+bc}{2} + \frac{ac-bc}{2} \right\} \operatorname{tang}(ac)$$

$$\text{и } \cos \frac{1}{2}(B-A) = \cos B/2 \cos A/2 + \sin B/2 \sin A/2$$

$$\cos \frac{1}{2}(B+A) = \cos B/2 \cos A/2 - \sin B/2 \sin A/2$$

$$\sin \frac{1}{2}(B-A) = \sin B/2 \cos A/2 - \cos B/2 \sin A/2$$

$$\sin \frac{1}{2}(B+A) = \sin B/2 \cos A/2 + \cos B/2 \sin A/2$$

$$\text{и наконец } \operatorname{tang}(M+N) = \frac{\operatorname{tang} M + \operatorname{tang} N}{1 - \operatorname{tang} M \cdot \operatorname{tang} N}$$

Подставляя найденные значения и произведя сокращения, получаем окончательно

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cosec}(ab) \cdot \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cdot \cos B \quad 5)$$

$$\text{и } \operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cosec}(ab) \cdot \sin A + \operatorname{cotg}(ab) \cdot \cos A \quad 5a)$$

В частности, при $A = B$, получим

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} \frac{ab}{2} \cos A;$$

если же $A = B = \pi/2$, то $ac=bc=\pi/2$, что понятно само собою

Мы видим, что формулы 5) позволяют вычислять углы каких угодно точек сѣти съ исходными, если для них определим величины координат, а для этого служить основная формула 1).

Для применения къ кристаллографии эти формулы, послѣ основной, представляют наибольшую важность, такъ какъ при юстировкѣ кристалла по исходнымъ гранямъ непосредственно отсчитываются на лимбахъ именно 1) углы между поясами и 2) углы между всѣми остальными гранями и исходными.

Для нѣкотораго трехугольника ace мы получили такимъ образомъ выражение величинъ его сторонъ ae и ac и угла A между ними, который представляетъ данную константу для точекъ пояса ae и легко вычисляется по основной формулѣ въ остальныхъ случаяхъ. Это даетъ намъ возможность найти выражение и для второго угла E при точкѣ e .

Если чрезъ C означимъ величину третьяго угла, трехугольника, то имѣемъ общеизвѣстные равенства

$$\operatorname{cotg} \frac{E+C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \cdot \frac{\cos \frac{ac+ae}{2}}{\cos \frac{ac-ae}{2}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{E-C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin \frac{ac+ae}{2}}{\sin \frac{ac-ae}{2}}$$

Кромѣ того примемъ во внимание еще формулы

$$\operatorname{cotg} \left\{ \frac{E+C}{2} + \frac{E-C}{2} \right\} = \operatorname{cotg} E \text{ и}$$

$$\cos \frac{ac+ae}{2} = \cos \frac{ac}{2} \cos \frac{ae}{2} - \sin \frac{ac}{2} \sin \frac{ae}{2}$$

$$\cos \frac{ac-ae}{2} = \cos \frac{ac}{2} \cos \frac{ae}{2} + \sin \frac{ac}{2} \sin \frac{ae}{2}$$

$$\sin \frac{ac+ae}{2} = \sin \frac{ac}{2} \cos \frac{ae}{2} + \cos \frac{ac}{2} \sin \frac{ae}{2}$$

$$\sin \frac{ac-ae}{2} = \sin \frac{ac}{2} \cos \frac{ae}{2} - \cos \frac{ac}{2} \sin \frac{ae}{2}$$

$$\text{и наконец } \operatorname{cotg}(M+N) = \frac{\operatorname{cotg} M \cdot \operatorname{cotg} N - 1}{\operatorname{cotg} M + \operatorname{cotg} N}$$

Сдѣлавъ соответствующія подстановки и сокращения, получаемъ окончательно

$$\operatorname{cotg} E = \operatorname{cotg}(ac) \operatorname{cosec} A \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \cos(ae) \quad 6)$$

Въ этой формулѣ мы можемъ еще замѣнить выражение $\operatorname{cotg}(ae)$ по форм. 5a), и тогда получимъ

$$\operatorname{cotg} E = \{ \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) + \operatorname{cotg} A [\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(ae)] \} \sin(ae) \quad \dots \quad 6a)$$

$$\text{и } -\operatorname{cotg} E = \{ \operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) + \operatorname{cotg} B [\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(be)] \} \sin(be)^1)$$

а отсюда естественно вытекаетъ и равенство

$$\operatorname{cotg} E' = \{ \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) + \operatorname{cotg} A [\operatorname{cotg}(ab) + \operatorname{cotg}(ae')] \} \sin(ae') \quad \dots \quad 7)$$

¹⁾ Понятно, что сумма этихъ двухъ выражений равна нулю

Принимая во вниманіе форм. 3а) и 3б), мы можемъ формулы 6) представить въ болѣе простомъ

$$\text{видѣ, а именно } \cotg E \sin(ab) = \left(\cotg B - \frac{\cotg A}{k} \right) \sin(ae)$$

$$\text{и } -\cotg E \sin(ab) = (\cotg A - k \cotg B) \sin(be),$$

$$\text{то есть } \cotg E \sin(ab) = (k \cotg B - \cotg A) \sin(be).$$

$$= \cotg B \sin(ae) - \cotg A \sin(be) \dots 6a')$$

Такъ какъ въ эту замѣчательную формулу вовсе не входятъ константы A_1 и B_1 , то она получаетъ общее значеніе, то есть точка e можетъ быть замѣнена какою угодно точкою x исходнаго пояса, и тогда получимъ выраженіе

$$\cotg X \sin(ab) = \cotg B \sin(ax) - \cotg A \sin(bx) \dots 8)$$

Въ частности, для точки e' получаемъ

$$-\cotg E' \sin(ab) = \cotg B \sin(ae') - \cotg A \sin(be') \dots 8a)$$

Замѣнивъ точку e точкою d , также найдемъ

$$\cotg X_1 \sin(ab) = \cotg B_1 \sin(ax) - \cotg A_1 \sin(bx)^2 \dots 8b)$$

$$\text{Въ частности, если } X_1 = \pi/2, \text{ имѣемъ } \cotg A_1 \sin(bx) = \cotg B_1 \sin(ax) \dots 8c)$$

По этимъ формуламъ при любой точкѣ исходнаго пояса x вычисляются для любой точки сѣти двѣ координаты x и x_1 ; отсюда видно, что мы весьма простымъ преобразованиемъ можемъ отъ исходныхъ точекъ a и b перейти къ двумъ другимъ любымъ точкамъ исходнаго пояса, какъ къ точкамъ исходнымъ.

При толкованіи формулы 8) нужно принять во вниманіе направленіе, въ которомъ мы отсчитываемъ координатные углы, считая отъ исходнаго пояса. Въ основаніе мы приняли для угловъ при a и b противоположныя направленія отсчета и получили противоположные знаки котангенсовъ. Для точекъ же B и X мы приняли одинаковое направленіе. Поэтому въ этой формулѣ знакъ—перемѣнится на $+$, если и уголъ при a мы будемъ отсчитывать въ томъ же направленіи, что и другіе.

2) Изъ 6a) и 8b) слѣдуетъ $\cotg E \sin(ab) = \cotg B \sin(ae) - \cotg A \sin(be) = \cotg B_1 \sin(ae) - \cotg A_1 \sin(be)$ то есть $\sin(ae) (\cotg A - \cotg B) = \sin(be) (\cotg A_1 - \cotg B_1)$ или $\sin(ae) = k \sin(be)$, что приводится къ форм. 2).

Формула 8) разрѣшаетъ не только задачу вычисленія угловъ при любой точкѣ исходнаго пояса, но также и задачу вычисленія угловъ между двумя любыми точками k и l геометрической сѣти.

Для вычисленія стороны se мы имѣемъ въ треугольникѣ ase данными—сторону ae и оба прилежащіе угла A и E , и такіе же данныя мы имѣемъ въ треугольникѣ ade для вычисленія стороны de .

Но точки e и d мы можемъ замѣнить двумя произвольно взятыми точками k и l , для чего сначала необходимо вычислить координаты Ak , Al , Bk и Bl ; формула 8 позволяетъ вычислить уголъ axk , гдѣ x —точка пересѣченія пояса kl съ исходнымъ и аналогична точкѣ e . Такимъ образомъ мы найдемъ углы xk и xl , разность которыхъ и есть искомый уголъ.

Вычисленіе сторонъ se и de производится по формулѣ 5), для чего достаточно точку b замѣнить точкою e ; что теперь возможно, такъ какъ извѣстны сторона ae и прилежащіе углы A и E .

Такимъ образомъ значительная часть основныхъ задачъ сферической тетрагонометріи является разрѣшенной. Остается найти выраженіе для угла между двумя поясами, пересѣкающимися въ произвольной точкѣ сѣти.

Для этого достаточно рѣшить задачу для какой-нибудь точки напр. c . Нужно доказать, что и такой уголъ можетъ найти рациональное выраженіе въ видѣ формулы, заключающей только константы сѣти.

Какъ видимъ изъ форм. 6) при замѣнѣ точки e точкою c , а также угла E угломъ C мы имѣемъ дѣло съ функциями $\sin(ac)$ и $\cos(ac)$, а не съ $\cotg(ac)$, которая непосредственно давала бы рациональное рѣшеніе по 5a). Поэтому этотъ прямой путь нужно замѣнить косвеннымъ.

Эту формулу мы можемъ представить въ видѣ

$$\frac{\cotg C}{\sin(ac)} = \cotg(ac) \operatorname{cosec} A - \cotg(ac) \cotg A$$

Вторая часть равенства приняла видъ, годный для рациональнаго рѣшенія; но въ первой остается членъ $\sin(ac)$, который предстоитъ элиминировать; это вполне осуществимо въ силу равенства отношеній $\sin(ac) : \sin(bc)$ и $\sin B : \sin A$.

Такимъ образомъ, если не котангенсамъ, то отношеніямъ котангенсовъ угловъ при точкѣ c мы можемъ придать рациональный видъ; пользуясь же выраженіемъ котангенса суммы нѣсколькихъ угловъ, имѣющей определенное значеніе, а именно 0 , мы можемъ придти къ рациональному рѣшенію поставленной задачи.

Мы примѣнимъ эти соображенія именно къ слѣдующимъ четыремъ угламъ:

$$\begin{aligned} 1) \frac{\cotg C_1}{\sin(ac)} &= \cotg(ac) \cotg A + \cotg(ae') \operatorname{cosec} A \\ &= \frac{1}{\sin A \sin(ab)} [\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A + \\ &\quad + \cos^2 A + \cotg(ae') \sin(ab)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\cotg(C-C_1)}{\sin(ac)} &= -\cotg(ac) \cotg A + \cotg(ae) \operatorname{cosec} A \\ &= \frac{1}{\sin A \sin(ab)} [-\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A \\ &\quad - \cos^2 A + \cotg(ae) \sin(ab)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{\cotg(C-1-C)}{\sin(bc)} &= -\cotg(bc) \cotg B + \cotg(be) \operatorname{cosec} B \\ &= \frac{1}{\sin B \sin(ab)} [-\cotg A \cos(ab) \cos B \sin B \\ &\quad - \cos^2 B + \cotg(be) \sin(ab)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } 4) \frac{\cotg(-C-1)}{\sin(be)} &= \cotg(bc) \cotg B - \cotg(be') \operatorname{cosec} B \\ &= \frac{1}{\sin B \sin(ab)} [\cotg A \cos(ab) \cos B \sin B \\ &\quad + \cos^2 B - \cotg(be') \sin(ab)] \end{aligned}$$

Взявъ отношеніе послѣднихъ трехъ членовъ къ первому, получимъ сокращенія равенства $\sin(ac) : \sin(bc) = \sin B : \sin A$, и $\sin(ac) : \sin(ac) = 1$.

Этимъ мы и элиминируемъ величины $\sin(ac)$ и $\sin(bc)$.

Сумма же четырехъ угловъ равна нулю, потому что

$$C_1 + (C-C_1) + (C-1-C) + (-C-1) = 0$$

Слѣдовательно котангенсъ этой суммы есть ∞ .

Для выраженія этой суммы находимъ

$$\cotg(1+2+3+4) = \frac{M'}{\cotg 1 + \cotg 2 + (1-\cotg 1 \cdot \cotg 2) \cotg 3 + [1 - \cotg 1 \cdot \cotg 2 - (\cotg 1 + \cotg 2) \cotg 3] \cotg 4}$$

Такъ какъ сумма угловъ равна нулю, то долженъ быть равенъ нулю знаменатель дроби второй части равенства.

Ради краткости отмѣтимъ отношенія $\frac{\cotg 1}{\cotg 1}$ чрезъ (1),

$\frac{\cotg 2}{\cotg 1}$ чрезъ (2), $\frac{\cotg 3}{\cotg 1}$ чрезъ (3) и $\frac{\cotg 4}{\cotg 1}$ чрезъ (4), получимъ

$$\tan^2(1) = \frac{(2)(3) + (2)(4) + (3)(4) + (2)(3)(4)}{(1) + (2) + (3) + (4)} : \dots \quad C)$$

Отсюда видимъ, что котангенсъ угла C_1 (то есть ae') станетъ извѣстнымъ, если мы произведемъ соответствующія замѣщенія; этимъ задача и будетъ рѣшена.

Если тѣ триномы, которые входятъ въ составъ приведенныхъ четырехъ формулъ, мы отмѣтимъ соответственно чрезъ (1'), (2'), (3') и (4'), то найдемъ

$$(2) = \frac{(2')}{(1')} ; (3) = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{(3')}{(1')} ; (4) = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{(4')}{(1')}.$$

Поэтому числитель въ формулѣ C) приметъ видъ

$$\frac{\sin B [(1') + (2')] + \sin A [(3') + (4')]}{\sin B (1')}$$

а знаменатель представится въ видѣ

$$\frac{1}{(1')^3} \left\{ \frac{\sin A}{\sin B} [(1')(2')(3') + (1')(2')(4')] + \right.$$

$$\left. \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} [(1')(3')(4') + (2')(3')(4')] \right\}$$

$$= \frac{(1')(2')(3')(4') \left\{ \sin A \sin B \left[\frac{1}{(4')} + \frac{1}{(3')} \right] + \sin^2 A \left[\frac{1}{(2')} + \frac{1}{(1')} \right] \right\}}{\sin^2 B (1')^3}$$

$$= \frac{\sin^2 A [(1') + (2')](3')(4') + \sin A \sin B [(3') + (4')](1')(2')}{\sin^2 B (1')^3}$$

Но такъ какъ $(1') + (2') = \sin(ab) [\cotg(ae) + \cotg(ae')] =$

$$= \sin(ab) [2 \cotg(ab) + 2 \cotg(ae')] = \frac{2}{k}$$

и $(3') + (4') = \sin(ab) [\cotg(be) - \cotg(be')] =$

$$= \sin(ab) [2 \cotg(ab) - 2 \cotg(be')] = 2k$$

M')

¹⁾ Значеніе M мы не приводимъ, такъ какъ для дальнѣйшаго оно не понадобится.

$$\text{и еще } (1')(2') = -[\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A \cos^2 A]^2 + \\ + [\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A] \sin(ab) [\cotg(ae) - \\ - \cotg(ae')] + \cotg(ae) \cotg(ae') \sin^2(ab)$$

и принимая во внимание равенства

$$\cotg(ae) - \cotg(ae') = 2 \cotg(ab)$$

$$\text{и } \cotg(ae) \cotg(ae') \sin^2(ab) = -\cos^2(ab) + \frac{1}{k^2},$$

$$\text{находимъ } (1')(2') = -[\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A + \\ + \cos^2 A - \cos(ab)]^2 + \frac{1}{k^2}$$

Также получимъ

$$(3')(4') = -[\cotg A \cos(ab) \cos B \sin B + \\ + \cos^2 B - \cos(ab)]^2 + k^2,$$

а потому, означая для краткости чрезъ K^2 дробь

$$1 + k^2 \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$k^2 - [\cotg A \cos(ab) \cos B \sin B + \cos^2 B - \cos(ab)]^2 + \frac{\sin B}{\sin A} [\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A - \cos(ab)]^2$$

находимъ окончательно

$$\cotg C_1 + \frac{\sin B}{\sin A} K(1'), \text{ и отсюда } \cotg(C - C_1) = \frac{\sin B}{\sin A} K(2') \text{ 9)}$$

$$\cotg(C_{-1} - C) = \frac{\sin A}{\sin B} K(3')$$

$$\cotg(-C_{-1}) = \frac{\sin A}{\sin B} K(4')$$

$$\text{гдѣ } (1') = \cotg B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A + \cotg(ae') \sin(ab) \\ = (\cotg B \cos A \sin A - 1) \cos(ab) + \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(2') = -\cotg B \cos(ab) \cos A \sin A - \cos^2 A + \cotg(ae) \sin(ab) \\ = (-\cotg B \cos A \sin A + 1) \cos(ab) - \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(3') = -\cotg A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B + \cotg(be) \sin(ab) \\ = (-\cotg A \cos B \sin B + 1) \cos(ab) - \cos^2 B + k$$

$$\text{и } (4') = \cotg A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B - \cotg(be') \sin(ab) \\ = (\cotg A \cos B \sin B - 1) \cos(ab) + \cos^2 B + k$$

Такимъ образомъ основная теорема сферической тетрагонометрии относительно рациональности выражения всѣхъ элементовъ геометрической сѣти доказана.

Однако полученная форм. 9) не принадлежитъ къ числу такихъ, по которымъ удобно было бы производить вычисления. Практически, конечно, предпочтительнѣе замѣнить рѣшеніе въ одинъ приемъ по этой формулѣ двумя или даже большимъ числомъ приемовъ по простѣйшимъ формуламъ.

И именно для этого рода вычислений легко вывести весьма простыя формулы.

Для этого вывода мы исходимъ изъ общеизвѣстныхъ формулъ вычисления сторонъ сферическаго треугольника по даннымъ его угламъ.

Принявъ поэтому обозначеніе $2P'$ для величины $(A + B + C' - \pi)$, найдемъ

$$N = \sin^2 \frac{ab}{2} \sin A \sin B = \sin P \sin(C' - P) =$$

$$\sin\left(\frac{C'}{2} + \frac{A+B-\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{C'}{2} - \frac{A+B-\pi}{2}\right).$$

Отсюда легко выводится

$$N = \sin^2 \frac{C'}{2} \sin^2 \frac{A+B}{2} - \cos^2 \frac{C'}{2} \cos^2 \frac{A+B}{2} = \\ = \sin^2 \frac{C'}{2} - 1 + \sin^2 \frac{A+B}{2}$$

$$\text{и значить } \sin^2 \frac{C'}{2} = \sin A \sin B \sin^2 \frac{ab}{2} - \sin^2 \frac{A+B}{2} + 1$$

$$\text{и } \cos^2 \frac{C'}{2} = \sin A \sin B \sin^2 \frac{ab}{2} + \sin^2 \frac{A+B}{2}$$

$$\text{Слѣдовательно } \sin^2 C' = \sin^2(A+B) - 4 \left[\sin A \sin B \right.$$

$$\left. \sin^2 \frac{ab}{2} + \cos^2 \frac{(A+B)}{2} \right]^2 + \cos^2(A+B)$$

$$\text{и } \cos^2 C' = \{2 \sin A \sin B \sin^2 \frac{ab}{2} + \cos(A+B)\}^2 = \\ = \{\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos(ab)\}^2$$

¹⁾ Буквою C' здѣсь отмѣчается уголь ACB .

При переходѣ къ квадратному корню мы должны принять

$$\cos C' = \sin A \sin B \cos(ab) - \cos A \cos B, \dots 10)$$

потому что при $A = \pi/2$ и $B = \pi/2$ величина $\cos C'$ должна стать равною $\cos(ab)$ (а не $-\cos(ab)$).

Эта простая формула и служить самымъ общимъ рѣшеніемъ поставленной задачи, такъ какъ она применима не только къ точкамъ a и b , но къ произвольнымъ точкамъ исходнаго пояса, также какъ по форм. 8) вычисляются углы не только A и B при исходныхъ точкахъ, но за таковыя могутъ быть приняты и всякія другія двѣ точки исходнаго пояса при условіи примѣненія форм. 2), 3) и основной формулы 1).

Такое рѣшеніе задачи будетъ конечно практичнымъ, чѣмъ рѣшеніе по форм. 9).

Если попутно опредѣлялись и другіе углы напр. (ac) , то можно примѣнить общезвѣстныя, еще болѣе простыя формулы напр. $\frac{\sin C}{\sin(ab)} = \frac{\sin B}{\sin(ac)}$

Этимъ задача вывода основныхъ формулъ исчерпывается, и въ заключеніе мы посвятимъ нѣсколько словъ примѣненію этихъ формулъ къ задачамъ кристаллографіи и приведемъ таблицу этихъ формулъ для простѣйшихъ и преобладающимъ образомъ встречающихся въ практикѣ кристаллографіи случаевъ.

Тѣ угловыя величины, которыя мы приняли за характеристичныя для геометрической сѣти константы, получаются непосредственнымъ отчетомъ на универсальномъ гониометрѣ, если кристаллъ будемъ два раза юстировать по исходнымъ гранямъ, соответствующимъ точкамъ a и b ¹⁾. При достаточномъ числѣ повтореній измѣренія и извлеченіи изъ нихъ средней величины, мы получаемъ простѣйшимъ образомъ не только наиболѣе точныя величины для характеристичныхъ константъ, но и величины, которыя приходится вставлять въ формулу 1), и такимъ образомъ легко можемъ сравнить величины наблюдаемыя и вычисленныя.

Кромѣ того тоже измѣреніе даетъ какъ среднія величины и для угловъ между всѣми наблюденными гранями и исходными. Но эти же углы мы можемъ и вычислить частью по форм. 2)—4) (для граней исходнаго пояса), частью по форм. 5) для остальныхъ, и такимъ образомъ опять можемъ сравнить величины наблюдаемыя и вычисленныя.

Не только въ томъ случаѣ, когда въ комплексѣ имѣется симметрія и за грани a и b приняты именно двѣ симметричныя, мы можемъ обойтись безъ двукратнаго юстированія и при отсутствіи всякой симметріи, если предварительно на основаніи наиболѣе

¹⁾ Собственно въ значительномъ большинствѣ случаевъ такая двукратная юстировка не нужна уже потому что на опытѣ рѣдко отсутствуетъ плоскость симметріи; а если за a и b примемъ двѣ симметричныя точки, то симметричныя то есть равныя будутъ и величины угловъ $A = B$ и $A_1 = B_1$.

точныхъ изъ полученныхъ величинъ вычислимъ константы B и B_1 .

Къ сожалѣнію однако, для такого вычисленія нельзя дать разъ навсегда опредѣленныхъ готовыхъ формулъ, такъ какъ эти формулы будутъ зависѣть отъ того, какія именно величины будутъ положены въ основаніе вычисленій.

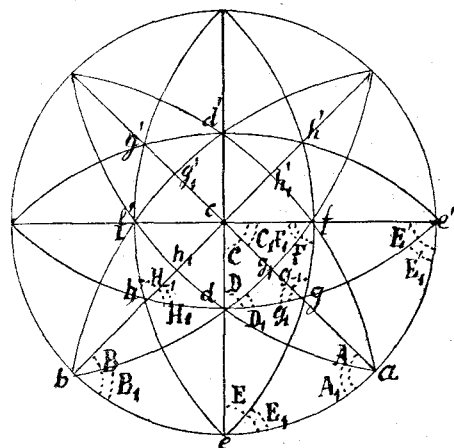
Приведемъ въ видѣ примѣра рѣшеніе по крайней мѣрѣ для двухъ наиболѣе важныхъ случаевъ.

1) Пусть кромѣ (ab) , A и A_1 даны еще углы (ac) и (ad) . Тогда по форм. 5) получаемъ (фиг. 2)

$$\cotg(ac) = \cotg B \operatorname{cosec}(ab) \sin A + \cotg(ab) \cos A;$$

$$\text{Слѣдовательно } \cotg B = \frac{\cotg(ac) \sin(ab) - \cos(ab) \cos A}{\sin A}$$

$$= \cotg(ac) \sin(ab) \operatorname{cosec} A - \cos(ab) \cotg A \dots 11)$$



Фиг. 2.

$$\text{и } \cotg B_1 = \frac{\cotg(ad) \sin(ab) - \cos(ab) \cos A_1}{\sin A_1}$$

$$= \cotg(ab) \sin(ab) \operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab) \cotg A_1 \dots 11a)$$

2) Если даны углы (ag_1) и (ah_1) получимъ

$$\cotg B = \frac{\cotg(ah_1) - \cotg(ab) \cos A_1}{\operatorname{cosec}(ab) \sin A_1}$$

$$= \cotg(ah_1) \sin(ab) \operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab) \cotg A_1 \dots 12)$$

$$\text{и } \cotg B_1 = \frac{\cotg(ag_1) - \cotg(ab) \cos A}{\operatorname{cosec}(ab) \sin A}$$

$$= \cotg(ag_1) \sin(ab) \operatorname{cosec} A - \cos(ab) \cotg A \dots 12a)$$

Итакъ, для цѣлей точнаго вычисленія всегда можно обойтись одной единственной юстировкой кристалла; но степень простоты дальнѣйшихъ операцій будетъ зависѣть въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ какъ отъ избранной для юстировки грани, такъ и отъ тѣхъ среднихъ угловъ, которые мы изберемъ для вычисленія константъ B и B_1 .

Такъ какъ всѣ встречающіеся въ кристаллографіи случаи существенно сводятся къ тремъ, то соответственно съ этимъ и приводимая таблица формулъ распадается на три части.

Первый случай: основная грань a иОсновные константы: угол (ab)

Триклинная сингония.

МОНОКЛИННАЯ

 $(A = B).$ $(ab) = \pi/2, A = \pi/2.$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\cotg A_1 - \cotg A}{\cotg B_1 - \cotg B} \\
 \sin (ae) &= k \sin (be) \\
 \cotg (be) &= \frac{k + \cos (ab)}{\sin (ab)} \\
 \cotg (ae) &= \frac{1 + k \cos (ab)}{k \sin (ab)} \\
 \cotg (be') &= \frac{-k + \cos (ab)}{\sin (ab)} \\
 \cotg (ae') &= \frac{1 - k \cos (ab)}{k \sin (ab)} \\
 \cotg (ee') &= \frac{1 - k^2}{2k \sin (ab)} \\
 \cotg A_{-1} &= 2 \cotg A - \cotg A_1 \\
 \cotg B_{-1} &= 2 \cotg B - \cotg B_1 \\
 \cotg A_2 &= 2 \cotg A_1 - \cotg A \\
 \cotg A_{-2} &= 3 \cotg A - 2 \cotg A_1 \\
 \cotg B_2 &= 2 \cotg B_1 - \cotg B \\
 \cotg B_{-2} &= 3 \cotg B - 2 \cotg B_1 \\
 \cotg (ac) &= \cotg B \operatorname{cosec} (ab) \sin A + \cotg (ab) \cos A \\
 \cotg (ad) &= \cotg B_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin A_1 + \cotg (ab) \cos A_1 \\
 \cotg (ad') &= \cotg B_{-1} \operatorname{cosec} (ab) \sin A_{-1} + \cotg (ab) \cos A_{-1} \\
 \cotg (af) &= \cotg B_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin A_{-1} + \cotg (ab) \cos A_{-1} \\
 \cotg (af') &= \cotg B_{-1} \operatorname{cosec} (ab) \sin A_1 + \cotg (ab) \cos A_1 \\
 \cotg (ag_1) &= \cotg B_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin A + \cotg (ab) \cos A \\
 \cotg (ag_{-1}) &= \cotg B_{-1} \operatorname{cosec} (ab) \sin A + \cotg (ab) \cos A \\
 \cotg (ag) &= 2 \cotg (ag_1) - \cotg (ac) \\
 \cotg (ag') &= -2 \cotg (ag_1) + 3 \cotg (ac) \\
 \cotg (ah) &= \cotg B \operatorname{cosec} (ab) \sin A_2 + \cotg (ab) \cos A_2 \\
 \cotg (ah') &= \cotg B \operatorname{cosec} (ab) \sin A_{-2} + \cotg (ab) \cos A_{-2} \\
 \cotg (ah_1) &= \cotg B \operatorname{cosec} (ab) \sin A_1 + \cotg (ab) \cos A_1 \\
 \cotg (ah'_{-1}) &= \cotg B \operatorname{cosec} (ab) \sin A_{-1} + \cotg (ab) \cos A_{-1} \\
 \cotg E &= [\cotg B \sin (ae) - \cotg A \sin (be)] \operatorname{cosec} (ab) \\
 \cotg E_1 &= [\cotg B_1 \sin (ae) - \cotg A_{-1} \sin (be)] \operatorname{cosec} (ab) \\
 \cotg E_{-1} &= [\cotg B_{-1} \sin (ae) - \cotg A_1 \sin (be)] \operatorname{cosec} (ab) \\
 \cotg E' &= [\cotg B \sin (ae') + \cotg A \sin (be')] \operatorname{cosec} (ab) \\
 \cotg E'_1 &= [\cotg B_1 \sin (ae') + \cotg A_1 \sin (be')] \operatorname{cosec} (ab) \\
 \cotg E'_{-1} &= [\cotg B_{-1} \sin (ae') + \cotg A_{-1} \sin (be')] \operatorname{cosec} (ab)
 \end{aligned}$$

1	$\frac{\cotg A_1}{\cotg B_1 - \cotg B}$
$\sin (be)$	тоже
$\cotg \frac{ab}{2}$	k
$\cotg \frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
$-\tan g \frac{ab}{2}$	$-k$
$\tan g \frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
0	$\frac{1 - k^2}{2k}$
тоже	$-\cotg A_1$
$2 \cotg A - \cotg A_1$	тоже
тоже	$2 \cotg A_1$
тоже	$-2 \cotg A_1$
тоже	тоже
тоже	тоже
$\cotg \frac{ab}{2} \cos A$	$\cotg B$
$\cotg \frac{ab}{2} \cos A_1$	$\cotg B_1 \sin A_1$
$\cotg \frac{ab}{2} \cos A_{-1}$	$\cotg B_{-1} \sin A_{-1}$
тоже	$\cotg B_1 \sin A_{-1}$
тоже	$\cotg B_{-1} \sin A_1$
тоже	$\cotg B_1$
тоже	$\cotg B_{-1}$
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	$\cotg B \sin A_2$
тоже	$\cotg B \sin A_{-2}$
тоже	$\cotg B \sin A_1$
тоже	$\cotg B \sin A_{-1}$
0	$\cotg B \sin (ae)$
$\frac{1}{2} (\cotg A_1 - \cotg A_{-1}) \sec \frac{ab}{2}$	$\cotg B_2 \sin (ae)$
$\frac{1}{2} (\cotg A_{-1} - \cotg A_1) \sec \frac{ab}{2}$	$\cotg B_{-2} \sin (ae)$
$\cotg A \operatorname{cosec} \frac{ab}{2}$	$\cotg B \sin (ae)$
$\cotg A_1 \operatorname{cosec} \frac{ab}{2}$	$\cotg B_2 \sin (ae)$
$\cotg A_{-1} \operatorname{cosec} \frac{ab}{2}$	$\cotg B_{-2} \sin (ae)$

добавочная b какъ исходныя грани.

въ главномъ поясѣ и углы A , A_1 , B и B_1 .

с и н г о н і я.

$$(ab) = \pi/2, B = \pi/2.$$

$$A = \pi/2, B = \pi/2.$$

$$\frac{\cotg A_1 - \cotg A}{\cotg B_1}$$

тоже

$$k$$

$$\frac{1}{k}$$

$$-k$$

$$\frac{1}{k}$$

$$\frac{1-k^2}{2k}$$

тоже

$$-\cotg B_{-1}$$

тоже

тоже

$$2 \cotg B_1$$

$$-2 \cotg B_1$$

0

$$\frac{\cotg A_1}{\cotg B_1}$$

тоже

тоже

тоже

тоже

тоже

тоже

$$-\cotg A_1$$

$$-\cotg B_1$$

$$2 \cotg A_1$$

$$-2 \cotg A_1$$

$$2 \cotg B_1$$

$$-2 \cotg B_1$$

0

$$\cotg B_1 \sin A_1$$

$$-\cotg B_1 \sin A_{-1}$$

$$\cotg B_1 \sin A_{-1}$$

$$-\cotg B_1 \sin A_1$$

$$\cotg B_1 \sin A$$

$$-\cotg B_1 \sin A$$

$$2 \cotg (ag_1)$$

$$-2 \cotg (ag_1)$$

0

0

0

0

$$-\cotg A \cos (ae)$$

$$-\cotg A_{-2} \cos (ae)$$

$$-\cotg A_2 \cos (ae)$$

$$\cotg A \cos (ae')$$

$$\cot A_2 \cos (ae)$$

$$\cotg A_{-2} \cos (ae)$$

$$\cotg (ae) \cos A_1$$

$$-\cotg (ae) \cos A_{-1}$$

$$\cotg (ae) \cos A_1$$

$$-\cotg (ae) \cos A_{-1}$$

$$\cotg B_1 \operatorname{cosec} (ab)$$

$$\cotg B_{-1} \operatorname{cosec} (ab)$$

$$2 \cotg (ag_1)$$

$$-2 \cotg (ag_1)$$

$$\cotg (ab) \cos A_2$$

$$\cotg (ab) \cos A_{-2}$$

$$\cotg (ab) \cos A_1$$

$$\cotg (ab) \cos A_{-1}$$

0

$$2 \cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin (be)$$

$$-2 \cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin (be)$$

0

$$2 \cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin (be')$$

$$-2 \cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab) \sin (be')$$

Ромбическая сингонія.

$$(A=B); A = \pi/2, B = \pi/2.$$

$$(ab) = \pi/2; A = \pi/2, B = \pi/2.$$

1

$$\sin (be)$$

$$\cotg \frac{ab}{2}$$

$$\cotg \frac{ab}{2}$$

$$-\tan g \frac{ab}{2}$$

$$\tan g \frac{ab}{2}$$

0

$$-\cotg A_1$$

$$-\cotg A_1$$

$$2 \cotg A_1$$

$$-2 \cotg A_1$$

$$2 \cotg A_1$$

$$-2 \cotg A_1$$

0

$$\cotg \frac{ab}{2} \cos A_1$$

$$-\cotg \frac{ab}{2} \cos A_{-1}$$

$$\tan g \frac{ab}{2} \cos A_1$$

$$-\tan g \frac{ab}{2} \cos A_{-1}$$

$$\cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab)$$

$$-\cotg A_1 \operatorname{cosec} (ab)$$

$$2 \cotg (ag_1)$$

$$-2 \cotg (ag_1)$$

$$\cotg (ab) \cos A_2$$

$$-\cotg (ab) \cos A_{-2}$$

$$\cotg (ab) \cos A_1$$

$$\cotg (ab) \cos A_{-1}$$

0

$$\cotg A_1 \sec \frac{ab}{2}$$

$$-\cotg A_1 \sec \frac{ab}{2}$$

0

$$\cotg A \operatorname{cosec} \frac{ab}{2}$$

$$-\cotg A_1 \operatorname{cosec} \frac{ab}{2}$$

$$\frac{\cotg A_1}{\cotg B_1}$$

тоже

$$k$$

$$\frac{1}{k}$$

$$-k$$

$$\frac{1}{k}$$

$$\frac{1-k^2}{2k}$$

$$-\cotg A_1$$

$$-\cotg B_1$$

$$2 \cotg A_1$$

$$-2 \cotg A_1$$

$$2 \cotg B_1$$

$$-2 \cotg B_1$$

0

$$\cotg B_1 \sin A_1$$

$$-\cotg B_1 \sin A_{-1}$$

$$\cotg B_1 \sin A_{-1}$$

$$-\cotg B_1 \sin A_1$$

$$\cotg B_1 \sin A$$

$$-\cotg B_1 \sin A$$

$$2 \cotg (ag_1)$$

$$-2 \cotg (ag_1)$$

0

0

0

0

$$2 \cotg A_1 \cos (ae)$$

$$-2 \cotg A_1 \cos (ae)$$

0

$$2 \cotg A_1 \cos (ae)$$

$$-2 \cotg A_1 \cos (ae)$$

Триклинная сингония.

моноклиная

$(F = F').$

$(ff') = \pi/2; F = \pi/2.$

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{\cotg F_1 - \cotg F}{\cotg F'_1 - \cotg F} \\
 \sin(fc) &= \frac{1}{k} \sin(f'c) \\
 \cotg(f'c) &= \frac{k + \cos(ff')}{\sin(ff')} \\
 \cotg(fc) &= \frac{1 + k \cos(ff')}{k \sin(ff')} \\
 \cotg(fe') &= \frac{-k + \cos(ff')}{\sin(ff')} \\
 \cotg(fe) &= \frac{1 - k \cos(ff')}{k \sin(ff')} \\
 \cotg(ce') &= \frac{1 - k^2}{2k \sin(ff')} \\
 \cotg F_{-1} &= 2 \cotg F - \cotg F_1 \\
 \cotg F'_{-1} &= 2 \cotg F' - \cotg F'_1 \\
 \cotg F_2 &= 2 \cotg F_1 - \cotg F \\
 \cotg F'_{-2} &= 3 \cotg F - 2 \cotg F_1 \\
 \cotg F_3 &= -2 \cotg F + 3 \cotg F_1 \\
 \cotg F'_{-3} &= 4 \cotg F - 3 \cotg F_1 \\
 \cotg(fe) &= \cotg F' \operatorname{cosec}(ff') \sin F + \cotg(ff') \cos F \\
 \cotg(fd) &= \cotg F'_1 \operatorname{cosec}(ff') \sin F_1 + \cotg(ff') \cos F_1 \\
 \cotg(fd') &= -\cotg F'_{-1} \operatorname{cosec}(ff') \sin F_{-1} - \cotg(ff') \cos F_{-1} \\
 \cotg(fa) &= \cotg F'_1 \operatorname{cosec}(ff') \sin F_{-1} + \cotg(ff') \cos F_{-1} \\
 \cotg(fb) &= \cotg F'_{-1} \operatorname{cosec}(ff') \sin F_1 + \cotg(ff') \cos F_1 \\
 \cotg(fg) &= \cotg F'_2 \operatorname{cosec}(ff') \sin F + \cotg(ff') \cos F \\
 \cotg(fh) &= -\cotg F'_{-2} \operatorname{cosec}(ff') \sin F - \cotg(ff') \cos F \\
 \cotg(fg') &= \cotg F' \operatorname{cosec}(ff') \sin F_2 + \cotg(ff') \cos F_2 \\
 \cotg(fg'') &= -\cotg F' \operatorname{cosec}(ff') \sin F_{-2} - \cotg(ff') \cos F_{-2} \\
 \cotg(fg_1) &= \cotg F'_3 \operatorname{cosec}(ff') \sin F_1 + \cotg(ff') \cos F_1 \\
 \cotg(fh_1) &= -\cotg F'_{-3} \operatorname{cosec}(ff') \sin F_{-1} - \cotg(ff') \cos F_{-1} \\
 \cotg(fh_2) &= \cotg F' \operatorname{cosec}(ff') \sin F_3 + \cotg(ff') \cos F_3 \\
 \cotg(fg'_1) &= -\cotg F'_{-1} \operatorname{cosec}(ff') \sin F_{-3} - \cotg(ff') \cos F_{-3} \\
 \cotg C &= [\cotg F' \sin(cf) - \cotg F \sin(cf')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg C_1 &= [\cotg F'_1 \sin(cf) - \cotg F_{-1} \sin(cf')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg C_{-1} &= [\cotg F'_{-1} \sin(cf) - \cotg F \sin(cf')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg E' &= [\cotg F' \sin(e'f) + \cotg F \sin(e'f')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg(E' - E_1) &= [\cotg F'_1 \sin(e'f) + \cotg F_1 \sin(e'f')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg(E'_{-1} - E) &= [\cotg F'_{-1} \sin(e'f) + \cotg F_{-1} \sin(e'f')] \operatorname{cosec}(ff') \\
 \cotg(ce) &= \cotg F \operatorname{cosec}(fc) \sin C + \cotg(fc) \cos C \\
 \cotg(dc) &= \cotg F_1 \operatorname{cosec}(fc) \sin C + \cotg(fe) \cos C \\
 \cotg(ce') &= -\cotg F \operatorname{cosec}(fe') \sin E' + \cotg(fe') \cos E' \\
 \cotg(ae) &= -\cotg F_{-1} \operatorname{cosec}(fe') \sin E' + \cotg(fe') \cos E' \\
 \cotg(be') &= -\cotg F_1 \operatorname{cosec}(fe') \sin E' + \cotg(fe') \cos E' \\
 \sin(E - E_1) &= \sin(fc) \sin F \operatorname{cosec}(ce) \\
 \sin(E_{-1} - E) &= \sin(f'c) \sin F' \operatorname{cosec}(ce)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &1 \\
 &\sin(f'c) \\
 &\cotg \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg \frac{ff'}{2} \\
 &-\operatorname{tang} \frac{ff'}{2} \\
 &\operatorname{tang} \frac{ff'}{2} \\
 &0 \\
 &\text{тоже} \\
 &2 \cotg F - \cotg F_1 \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\cotg \frac{ff'}{2} \cos F \\
 &\cotg \frac{ff'}{2} \cos F_1 \\
 &\cotg \frac{ff'}{2} \cos F_{-1} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &0 \\
 &\frac{1}{2} (\cotg F_1 - \cotg F_{-1}) \sec \frac{ff'}{2} \\
 &\frac{1}{2} (\cotg F_{-1} - \cotg F_1) \sec \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg F \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg F_1 \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg F_{-1} \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg F \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\
 &\cotg F_1 \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\cotg F_1 \\
 &\cotg F'_1 - \cotg F' \\
 &k \sin(f'c) \\
 &k \\
 &\frac{1}{k} \\
 &-k \\
 &\frac{1}{k} \\
 &\frac{1 - k^2}{2k} \\
 &-\cotg F_1 \\
 &\text{тоже} \\
 &2 \cotg F_1 \\
 &-2 \cotg F_1 \\
 &3 \cotg F_1 \\
 &-3 \cotg F_1 \\
 &\cotg F' \\
 &\cotg F'_1 \sin F_1 \\
 &-\cotg F'_{-1} \sin F_1 \\
 &\cotg F'_1 \sin F_1 \\
 &\cotg F'_{-1} \sin F_1 \\
 &\cotg F'_2 \\
 &-\cotg F'_{-2} \\
 &\cotg F' \sin F_2 \\
 &-\cotg F' \sin F_2 \\
 &\cotg F'_3 \sin F_1 \\
 &-\cotg F'_{-3} \sin F_1 \\
 &\cotg F'_1 \sin F_3 \\
 &-\cotg F'_{-1} \sin F_3 \\
 &\cotg F' \sin(fe) \\
 &\cotg F'_2 \sin(fc) \\
 &\cotg F'_{-2} \sin(fc) \\
 &\cotg F' \sin(fc) \\
 &\cotg F'_2 \sin(fc) \\
 &\cotg F'_{-2} \sin(fc) \\
 &\cotg(fa) \cos C \\
 &\text{тоже} \\
 &\cotg(fc) \cos C \\
 &\text{тоже} \\
 &\text{тоже} \\
 &\sin(fc) \operatorname{cosec}(ce) \\
 &\text{тоже}
 \end{aligned}$$

добавочная f' какъ исходная грани.

385

не въ главномъ поясѣ и углы F , F_1 , F' и F'_1 .

с и н г о н і я.

$$(ff') = \pi/2; F' = \pi/2.$$

$$F = \pi/2; F' = \pi/2.$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cotg F_1 - \cotg F}{\cotg F'_1} \\ & \text{тоже} \\ & k \\ & \frac{1}{k} \\ & -k \\ & \frac{1}{k} \\ & \frac{1-k^2}{2k} \\ & \text{тоже} \\ & -\cotg F'_1 \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & 0 \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & \cotg F'_1 \sin F_{-1} \\ & \cotg F'_1 \sin F_{-1} \\ & -\cotg F'_{-1} \sin F_1 \\ & 2 \cotg F'_1 \sin F \\ & 2 \cotg F'_1 \sin F \\ & 0 \\ & 0 \\ & 3 \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & 3 \cotg F'_{-1} \sin F_{-1} \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & \cotg F'_1 \sin F_{-1} \\ & -\cotg F \cos (fc) \\ & \cotg F_2 \cos (fc) \\ & -\cotg F_2 \cos (fc) \\ & \cotg F \cos (fc) \\ & \cotg F_2 \cos (fc) \\ & \cotg F_2 \cos (fc) \\ & \cotg (fc) \cos C \\ & \text{тоже} \\ & \cotg (fc) \cos C \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \cos (fc) \operatorname{cosec} (ce) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cotg F_1}{\cotg F'_1} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & -\cotg F_1 \\ & -\cotg F'_1 \\ & 2 \cotg F_1 \\ & -2 \cotg F_1 \\ & 3 \cotg F_1 \\ & -3 \cotg F_1 \\ & 0 \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & 2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \\ & 2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \\ & \cotg (ff') \cos F_2 \\ & \cotg (ff') \cos F_2 \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & 0 \\ & 2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \sin (fc) \\ & -2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \sin (fc) \\ & 0 \\ & 2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \sin (fe') \\ & 2 \cotg F'_1 \operatorname{cosec} (ff') \sin (fe') \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fc) \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fe') \\ & -\cotg F_1 \operatorname{cosec} (fe') \\ & \sin (fc) \\ & \cos (fc) \end{aligned}$$

Ромбическая сингонія.

$$(F = F'); F = \pi/2; F' = \pi/2.$$

$$(ff') = \pi/2; F = \pi/2; F' = \pi/2.$$

$$\begin{aligned} & 1 \\ & \sin (fc) \\ & \cotg \frac{ff'}{2} \\ & \cotg \frac{ff'}{2} \\ & -\tan \frac{ff'}{2} \\ & \tan \frac{ff'}{2} \\ & 0 \\ & -\cotg F_1 \\ & -\cotg F_1 \\ & 2 \cotg F_1 \\ & -2 \cotg F_1 \\ & 3 \cotg F_1 \\ & -3 \cotg F_1 \\ & 0 \\ & \cotg \frac{ff'}{2} \cos F_1 \\ & \cotg \frac{ff'}{2} \cos F_1 \\ & \tan \frac{ff'}{2} \cos F_1 \\ & \tan \frac{ff'}{2} \cos F_1 \\ & 2 \cotg F_1 \operatorname{cosec} (ff') \\ & 2 \cotg F_1 \operatorname{cosec} (ff') \\ & \cotg (ff') \cos F_2 \\ & \cotg (ff') \cos F_2 \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & \text{тоже} \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \sec \frac{ff'}{2} \\ & -\cotg F_1 \sec \frac{ff'}{2} \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} \frac{ff'}{2} \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fe') \\ & -\cotg F_1 \operatorname{cosec} (fe') \\ & \sin (fc) \\ & \sin (fc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\cotg F_1}{\cotg F'_1} \\ & k \sin (fc) \\ & k \\ & \frac{1}{k} \\ & -k \\ & \frac{1}{k} \\ & \frac{1-k^2}{2k} \\ & -\cotg F_1 \\ & -\cotg F'_1 \\ & 2 \cotg F_1 \\ & -2 \cotg F_1 \\ & 3 \cotg F_1 \\ & -3 \cotg F_1 \\ & 0 \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & -\cotg F'_1 \sin F_1 \\ & 2 \cotg F'_1 \\ & 2 \cotg F'_1 \\ & 0 \\ & 0 \\ & \cotg F'_1 \sin F_1 \\ & \cotg F'_{-1} \sin F_{-1} \\ & \cotg F'_{-1} \sin F_{-1} \\ & \cotg F'_{-1} \sin F_{-1} \\ & 0 \\ & 2 \cotg F'_1 \cos (fc) \\ & 2 \cotg F'_1 \cos (fc) \\ & 0 \\ & 2 \cotg F'_1 \cos (fc') \\ & 2 \cotg F'_1 \cos (fc') \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fc) \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fc) \\ & 0 \\ & \cotg F_1 \operatorname{cosec} (fc) \\ & -\cotg F_1 \operatorname{cosec} (fc) \\ & \sin (fc) \\ & \cos (fc) \end{aligned}$$

Третій случай: основная грань g и добавочная h .Основные константы: уголь (gh) и углы G, G_1, H и H_1 .

Триклинная сингония.

Моноклиная синг.

Ромбическая синг.

 $G = H; D = \pi/2.$ $G = H; D = \pi/2; E' = \pi/2.$

$$k = \frac{\cotg G_1 - \cotg G}{\cotg H_1 - \cotg H}$$

$$\sin(gd) = k \sin(hd)$$

$$\cotg(hd) = \frac{k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$$

$$\cotg(gd) = \frac{1 + k \cos(gh)}{k \sin(gh)}$$

$$\cotg(he') = \frac{-k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$$

$$\cotg(ge') = \frac{1 - k \cos(gh)}{k \sin(gh)}$$

$$\cotg(de') = \frac{1 - k^2}{2k \sin(gh)}$$

$$\cotg G_{-1} = 2 \cotg G - \cotg G_1$$

$$\cotg G_3 = -2 \cotg G + 3 \cotg G_1$$

$$\cotg G_{-3} = 4 \cotg G - 3 \cotg G_1$$

$$\cotg G_{13} = \frac{1}{3} (4 \cotg G - \cotg G_1)$$

$$\cotg G_5 = -4 \cotg G + 5 \cotg G_1$$

$$\cotg H_{-1} = 2 \cotg H - \cotg H_1$$

$$\cotg H_3 = -2 \cotg H + 3 \cotg H_1$$

$$\cotg H_{-3} = 4 \cotg H - 3 \cotg H_1$$

$$\cotg H_5 = -4 \cotg H + 5 \cotg H_1$$

$$\cotg(ga) = -\cotg H_{-3} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 - \cot(gh) \cos G_1$$

$$\cotg(gb) = -\cotg H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-3} - \cotg(gh) \cos G_{-3}$$

$$\cotg(gc) = \cotg H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_1 + \cotg(gh) \cos G_1$$

$$\cotg(gd') = \cotg H \operatorname{cosec}(gh) \sin G + \cotg(gh) \cos G$$

$$\cotg(ge) = -\cotg H_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} - \cotg(gh) \cos G_{-1}$$

$$\cotg(gf) = \cotg H_3 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \cotg(gh) \cos G_{-1}$$

$$\cotg(gf') = \cotg H_{-1} \operatorname{cosec}(gh) \sin G_3 + \cotg(gh) \cos G_3$$

$$\cotg(gg') = \frac{1}{2} [\cotg(gc) - \cotg(ga)]$$

$$\cotg(gg_1) = 3 \cotg(gc) - 2 \cotg(gg')$$

$$\cotg(gg_1) = \frac{1}{3} [\cotg(gc) + 2 \cotg(gg')]$$

$$\cotg(gh') = \cotg H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1} + \cotg(gh) \cos G_{-1}$$

$$\cotg(gh'_1) = \cotg H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_{-1/3} + \cotg(gh) \cos G_{-1/3}$$

$$\cotg(gh_1) = \cotg H_1 \operatorname{cosec}(gh) \sin G_5 + \cotg(gh) \cos G_5$$

$$\cotg D = [\cotg H_1 \sin(gd) - \cotg G_1 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$$

$$\cotg D_1 = [\cotg H_3 \sin(gd) - \cotg G_1 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$$

$$\cotg D_{-1} = [\cotg H_1 \sin(gd) - \cotg G_3 \sin(hd)] \operatorname{cosec}(gh)$$

$$\cotg E' = [-\cotg H_1 \sin(ge') + \cotg G_{-1} \sin(he')] \operatorname{cosec}(gh)$$

$$\cotg(E' - E'_1) = [\cotg H_1 \sin(ge') + \cotg G_1 \sin(he')] \operatorname{cosec}(gh)$$

$$\sin(E - E_1) = -\sin(gd) \sin G_{-1} \operatorname{cosec}(de)$$

$$\sin(E_{-1} - E) = \sin(hd) H_{-1} \operatorname{cosec}(de)$$

$$\cotg(e'a) = \cotg G_1 \operatorname{cosec}(ge') \sin E'_1 - \cotg(ge') \cos E'_1$$

$$\cotg(e'e) = \cotg G_{-1} \operatorname{cosec}(ge') \sin E'_1 - \cotg(ge') \cos E'_1$$

$$\cotg(e'e) = -\cotg G_1 \operatorname{cosec}(ge') \sin(E' - E'_1) + \cotg(ge') \cos(E' - E')$$

$$\cotg(e'b) = 2 \cotg(e'e) - \cotg(e'a)$$

$$\cotg(de) = \cotg G_{-1} \operatorname{cosec}(gd) \sin D + \cotg(gd) \cos D$$

$$\cotg(de) = \cotg G_1 \operatorname{cosec}(gd) \sin D - \cotg(gd) \cos D$$

$$\cotg(dd') = \cotg G \operatorname{cosec}(gd) \cotg D - \cotg(gd) \cos D$$

1	1
$\sin(hd)$	$\sin(hd)$
$\cotg \frac{gh}{2}$	$\cotg \frac{gh}{2}$
$\cotg \frac{gh}{2}$	$\cotg \frac{gh}{2}$
$-\tan g \frac{gh}{2}$	$-\tan g \frac{gh}{2}$
$\tan g \frac{gh}{2}$	$\tan g \frac{gh}{2}$
0	0
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
$\cos G_1 \cotg \frac{gh}{2}$	$\cos G_1 \cotg \frac{gh}{2}$
$\cos G \cotg \frac{gh}{2}$	$\cos G \cotg \frac{gh}{2}$
$-\cos G_{-1} \cotg \frac{gh}{2}$	$-\cos G_{-1} \cotg \frac{gh}{2}$
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	$\cotg(2gc)$
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
0	0
тоже	тоже
тоже	тоже
$-\cotg G_{-1} \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$	$-\cotg G_{-1} \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$
$\cotg G_1 \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$	$\cotg G_1 \operatorname{cosec} \frac{gh}{2}$
тоже	тоже
тоже	тоже
тоже	тоже
0	0
0	0
$-\cotg(e'a)$	$-\cotg(e'a)$
$\cotg E'_1$	$\cotg E'_1$
$\cotg(E' - E'_1)$	$\cotg(E' - E'_1)$
$\cotg(E'_{-1} - E'_1)$	$\cotg(E'_{-1} - E'_1)$

Въ самомъ дѣлѣ, уже выше было отмѣчено, что всегда можно ограничиться одною единственною юстировкой и изъ нея вывести пять константъ, принявъ двѣ соответственныя грани за исходныя для биполярныхъ координатъ. Для всѣхъ видовъ сингонии, кромѣ триклинной, эти соответственныя грани есть грани симметричныя, причемъ эти грани или 1) находятся въ главномъ поясѣ, или 2) находятся въ поясѣ, проходящемъ чрезъ главную грань; и только въ томъ случаѣ, когда на кристаллѣ не имѣется ни граней главнаго пояса, ни главной грани, нельзя пользоваться первыми двумя таблицами.

Это относится къ сравнительно рѣдкимъ случаямъ, почти исключительно къ комплексамъ додекаэдрической структуры; но и въ этихъ случаяхъ необходимо представлены грани I періода $\{111\}$ и значить въ этихъ случаяхъ приходится обращаться къ таблицѣ III съ ея болѣе сложными формулами. Но даже и въ этомъ случаѣ только тогда, когда представлена модальность I рода, потому что въ случаѣ модальности II рода мы можемъ пользоваться таблицею II, и, въ частности, для моноклинныхъ кристалловъ столбцамъ ($F=F'$), если лучшія грани симметричны и столбцомъ $F=\pi/2$, $F'=\pi/2$, если лучшія грани перпендикулярны къ плоскости симметріи.

Особый случай составляютъ сильно, и особенно крайне положительные комплексы, представленные пластинчатыми кристаллами.

Въ этомъ случаѣ единственная грань, по которой можно юстировать, есть грань пластинчатости то есть грань пинакоида, по отношенію къ которой не имѣется симметричной ни въ какомъ случаѣ.

Если кромѣ нея имѣется еще хоть одинъ изъ двухъ пинакоидовъ главнаго пояса, то случай не представляетъ ничего особеннаго, и только не можетъ быть (въ случаѣ моноклинныхъ или ромбическихъ кристалловъ) отнесенъ къ колоннѣ ($F=F'$).

Если представленъ комплексъ додекаэдрической структуры и модальности II рода, то по парѣ граней какъ симметричныхъ, такъ и перпендикулярныхъ къ плоскости симметріи легко вычислить уголъ главнаго пинакоида съ однимъ изъ пинакоидовъ главнаго пояса, и принять этотъ второй пинакоидъ за добавочную исходную грань (соответственное вычисленіе легко произвести и для триклиннаго кристалла).

Наиболѣе сложнымъ будетъ опять случай додекаэдрической структуры и модальности I рода. Пусть представлены кромѣ $\{001\}$ только четыре грани $\{111\}$ ¹⁾.

Въ такомъ случаѣ непосредственно извѣстными будутъ углы: 1) два угла при вершинѣ $\{001\}$ и 2) четыре угла между $\{001\}$ и каждой изъ граней $\{111\}$.

Сначала въ треугольникѣ $(111)\wedge(001)\wedge(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ вычисляемъ углы при вершинахъ (111) и $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ и уголъ $(111):(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$; затѣмъ въ треугольникѣ $(111)\wedge(001)\wedge(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ вычисляемъ уголъ при вершинѣ (111) , а въ треугольникѣ $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})\wedge(001)\wedge(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ уголъ при вершинѣ $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Этого достаточно, потому что имѣемъ всѣ константы, принимая (111) и $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ за исходныя грани биполярныхъ координатъ. Остальныя вычисленія можемъ уже производить по формуламъ таблицы III.

Нѣсколько проще случай пластинчатого тригонального кристалла, когда имѣются только грани $\{111\}$ и притомъ приходится юстировать по пластинчатой грани (111) .

Въ этомъ случаѣ всѣ углы при вершинѣ $\{001\}$ частью извѣстны, частью можно вычислить.

Затѣмъ въ треугольникахъ $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})\wedge(111)\wedge(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ и $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})\wedge(111)\wedge(111)$ мы вычисляемъ углы при вершинѣ $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Этого достаточно. Грани (111) и $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ есть обѣ исходныя грани биполярныхъ координатъ. Если комплексъ моноклинный, то всѣ остальныя вычисленія можно произвести по формуламъ таблицы II колонна $F=\pi/2$, $F'=\pi/2$.

II. Формулы плоской тетрагонометріи.

Всѣ выведенныя въ первой части формулы непосредственно приложимы и для плоской тетрагонометріи, и только могутъ подвергнуться сокращенію, такъ какъ относятся къ частному случаю.

Вѣдь сама плоскость есть лишь частный случай шара, для котораго нужно признать радіусъ безконечно большой длины. Главная особенность этого случая есть равенство нулю сферического избытка, а вмѣстѣ съ тѣмъ и равенство π суммы внутреннихъ угловъ треугольника. Это упрощеніе особенно бросается въ глаза по отношенію къ формулѣ 10), для которой уголъ C непосредственно выводится изъ суммы угловъ A и B и совершенно не зависитъ отъ отрезка ab . Въ этомъ случаѣ $C=\pi-(A+B)$, и значить для $\cos C$ получимъ

$$\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (10')$$

стала $\{111\}$ выражаетъ то же, что $\{111\}$ то есть четыре пары граней, для кубическаго кристалла $\{110\}$ выражаетъ то же, что $\{110\}$ то есть шесть паръ граней.

¹⁾ Знакъ $\{p_1 p_2 p_3\}$ принять для совокупности граней, имѣющихъ въ символахъ одинаковые индексы, хотя и съ различными знаками. Напр. для ромбическаго кри-

Эта формула вывелась бы изъ форм. 10), если бы мы приняли въ послѣдней $ab=0$. Смыслъ этого равенства выяснится, если возьмемъ $A=\pi/2$, $B=\pi/2$; тогда получимъ два перпендикуляра къ исходной прямой ab то есть двѣ параллельныя прямыя или прямыя, образующія другъ съ другомъ уголъ 0. На какомъ бы конечномъ разстояніи мы ни взяли точку c , всегда при построеніи изъ нея трехугольника по даннымъ условіямъ, мы получимъ $ab=0$.

Какъ въ сферической тетрагонометріи мы имѣли дѣло со сферическою геометрическою сѣтью, такъ теперь мы имѣемъ дѣло съ плоскою геометрическою сѣтью или *геометрическою сѣтью Мебиуса* собственно. Едва ли нужно распространяться о томъ, что къ послѣдней, какъ къ частному случаю, приложимы всѣ соображенія, приведенныя для первой.

Для полного аналогичнаго повторенія выведенныхъ общихъ формулъ достаточно разсмотрѣнія выведенныхъ общихъ формулъ съ точки зрѣнія формы, которую онѣ примутъ для даннаго случая.

Въ основной формулѣ 1) котангенсы частью могутъ быть замѣнены величинами отрѣзковъ на одной прямой, частью относиться къ угламъ между прямыми сѣти. Соответственно этому различію, сама формула принимаетъ два различные вида, изъ коихъ одинъ тождественъ съ видомъ, служащимъ для сферическихъ угловъ, то есть и въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$n \cotg |mn| = (n-m) \cotg |01| + m \cotg |11| \quad . 1)$$

Второй же видъ получится, если отбросимъ выраженіе котангенсовъ то есть.

$$n |mn| = (n-m) |01| + m |11|$$

Этотъ видъ относится къ отрѣзкамъ на одной прямой, выраженнымъ въ поясовыхъ символахъ, причемъ символъ $|10|$ предполагается относящимся къ бесконечно-удаленной точкѣ (экстраточкѣ) на прямой.

Но отсчетъ длины отрѣзковъ здѣсь ведется иначе именно потому, что точка $|10|$ предполагается бесконечно-удаленною.

И дѣйствительно, теперь для опредѣленія отрѣзковъ уже нѣтъ надобности въ двухъ основныхъ, а необходимъ и достаточенъ только одинъ, который мы и будемъ считать отъ точки $|01|$, принимая положительное направленіе въ сторону точки $|11|$. При такомъ отсчетѣ величина отрѣзка $|01|$ есть 0, и слѣдовательно окончательный видъ формулы получится $n |mn| = m |11|$.

Уже изъ этой формулы для $|01|$ получаемъ

$$n |01| = 0, \text{ такъ какъ } m = 0.$$

Для точки $|\bar{1}1|$ получимъ $|\bar{1}1| = -|11|$, что очевидно; наконецъ, для точки $|10|$ получимъ $0 |10| = -|11|$, что равносильно $|10| = \infty$, и это также очевидно.

Формула 2) сохраняетъ свой видъ безъ перемѣны; въ остальномъ, кромѣ того, придется отбросить выраженіе синусовъ, то есть

$$\frac{(ae)}{(be)} = \frac{\cotg A_1 - \cotg A}{\cotg B_1 - \cotg B} = k \quad 2)$$

Но уже формулы 3) требуютъ спеціальнаго, хотя и весьма простаго вывода, который приводитъ къ формулѣ

$$(be) = \frac{(ab)}{k+1}, \text{ и } (ae) = \frac{k(ab)}{k+1} \quad 3)$$

Дуальность сферической сѣти.

Какъ извѣстно, геометрическая сѣть на сферѣ дуальна, такъ какъ каждая точка на ней можетъ быть принята за полюсъ дуги большого круга, и для каждой дуги большого круга имѣется коррелятивно связанная съ нею точка—ея полюсъ. Этотъ дуализмъ нагляднѣе всего выражается принятой системою символовъ.

Мы исходили изъ четырехъ точекъ a, b, c, d , которымъ соответственно придали символы (100) , (010) , (001) , (111) . Но имѣется и четыре дуги большого круга, которымъ мы также можемъ придать те же символы, а именно $\begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix} = [100]$, $\begin{vmatrix} 001 \\ 100 \end{vmatrix} = [010]$, $\begin{vmatrix} 100 \\ 010 \end{vmatrix} = [001]$, и $\begin{vmatrix} 011 \\ 101 \end{vmatrix} = [111]$.

Очевидно, что если для опредѣленія полюсовъ этихъ четырехъ дугъ мы въ основу положимъ также пять координатъ, какъ это мы сдѣлали для точекъ $a-d$, то рѣшительно всѣ выведенныя нами формулы для этой сѣти сохраняютъ свое значеніе для новоустроенной—дуальной сѣти.

Такимъ образомъ для полного вычисленія этой второй сѣти мы имѣемъ всѣ готовыя формулы остается только по константамъ первой сѣти опредѣлить константы второй.

Эта же задача сводится къ перенесенію величинъ отъ однихъ сферическихъ трехугольниковъ и трехугольникамъ полярнымъ, то есть въ сущнос

нужно замѣнить всякую найденную величину x величиною $\pi - x$.

Первая константа первой сѣти есть уголъ ab то есть (100):(010); такіе же символы, отнесенные ко второй сѣти, дадутъ намъ первую константу второй сѣти. Отнесенный къ первой сѣти, этотъ уголъ есть именно уголъ C' ; который вычисляемъ по форм. 10), и значить для второй сѣти, первая константа (ab) есть $\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos(ab)$ 1)

Остальныя четыре константы второй сѣти какъ разъ соответствуютъ угламъ между точками (стонамъ сферическихъ треугольниковъ) первой сѣти.

Двѣ изъ нихъ относятся къ угламъ AC и BC , которыя вычисляются по форм. 5), то есть для константы A имѣемъ

$$-\cotg A \operatorname{cosec}(ab) \sin B - \cotg(ab) \cos B \quad 2).$$

константы B имѣемъ

$$-\cotg B \operatorname{cosec}(ab) \sin A - \cotg(ab) \cos A \quad 3)$$

Наконецъ, что касается константъ A_1 и B_1 полярной сѣти, то ясно, что онѣ выразятся соответственно величинами угловъ ch'_1 и cg'_1 , которые легко опредѣляются какъ $bh'_1 - bc$ и $ag'_1 - ac$.

Поэтому, пользуясь для вычисления тѣми же формулами 5), найдемъ

$$\cotg bh'_1 = \cotg A_{-1} \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \cotg(ab) \cos B$$

$$\text{и } \cotg bc = \cotg A \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \cotg(ab) \cos B,$$

а отсюда вычислимъ и $\cotg(bh'_1 - bc)$, а для координаты возьмемъ уголъ, дополнительный до π .

Такимъ образомъ найдемъ для константы A_1 выражение

$$\frac{\cos(ab) \cotg B + \cotg A + \cotg A_{-1} \cos(ab) \cotg B + \cotg A_1 \cotg A_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 B}{\sin(ab) \operatorname{cosec} B (\cotg A - \cotg A_{-1})}$$

и для B_1

$$\frac{[\cos(ab) \cotg A + \cotg B + \cotg B_{-1}] \cos(ab) \cotg A + \cotg B \cotg B_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 A}{\sin(ab) \operatorname{cosec} A (\cotg B - \cotg B_{-1})}$$

Эти вторыя константы опредѣляютъ, слѣдовательно, полярную сферическую сѣть, и для вычисления элементовъ этой сѣти мы имѣемъ формулы, абсолютно одинаковыя съ тѣми, которыя выведены для вычисления соответственныхъ элементовъ первой сѣти.

Но, строго говоря, элементы обѣихъ сѣтей одинаковы и различаются только по отношенію къ ихъ выводу изъ основныхъ данныхъ. Такимъ образомъ является возможность вычислять каждый элементъ по двумъ различнымъ формуламъ, смотря по тому отнесемъ ли мы его къ первой или ко второй сѣти. Ясно, что этимъ можно пользоваться, чтобы въ томъ или другомъ случаѣ примѣнить болѣе простую формулу. Напр. вмѣсто того, чтобы вычислять по формулѣ 10), для чего при общемъ положеніи точки c пришлось бы предварительно вычислять всѣ входящія въ нее угловыя величины, можно пользоваться форм. 5), сохраняя въ качествѣ данныхъ углы при тѣхъ же исходныхъ граняхъ a и b (и привлекая сюда для добавочныхъ вычислений форм. 8).

Наконецъ, на практикѣ кристаллографическихъ

вычислений встрѣчается надобность въ опредѣленіи угловъ между элементами обѣихъ сѣтей. Разсмотримъ случай опредѣленія угла между двумя точками, принадлежащими по одной къ обѣимъ системамъ. Тогда точку x напр. полярной системы мы замѣнимъ поясомъ первой системы, для котораго она есть полюсъ. Пусть точка первой системы есть c , а поясъ проходить чрезъ a и опредѣляется координатой A_k . Въ такомъ случаѣ полюсъ этого пояса и точка C опредѣляютъ сферическій перпендикуляръ къ данному поясу, и мы имѣемъ прямоугольный сферическій треугольникъ съ гипотенузой ac и непрямымъ угломъ $A - A_k$, и мы получаемъ

$$\cos(cx) = \sin(ac) \sin(A - A_k) \quad 6)$$

Въ частномъ случаѣ, если полюсъ x_0 есть полюсъ исходнаго пояса, имѣемъ $A_k = 0$, и тогда

$$\cos(cx_0) = \sin(ac) \sin A = \sin(bc) \sin B = \cos \rho_c \quad 6a)$$

Также для точки d найдемъ

$$\cos(dx_0) = \sin(ad)\sin A_1 = \sin(bd)\sin B_1 = \cos \rho_d \quad \dots 6b)$$

Углы cx_0 , dx_0 и т. п. и есть тѣ самые, которые отсчитываются на универсальномъ гониометрѣ въ видѣ координатъ ρ при юстировкѣ кристалла по исходному поясу.

Изъ тѣхъ же прямоугольныхъ сферическихъ трехугольниковъ легко получаемъ выраженіе и для координатъ φ при той же юстировкѣ, потому что это будутъ другіе катеты.

Ясно, что для этихъ угловъ получимъ выраженіе

$$\tan \varphi_c = \tan(ac) \cos A;$$

$$\tan(ab - \varphi_c) = \tan(bc) \cos B \quad \dots 7a)$$

$$\text{и } \tan \varphi_d = \tan(ad) \cos A_1;$$

$$\tan(ab - \varphi_d) = \tan(bd) \cos B_1 \quad \dots 7b)$$

Понятно, что изъ этихъ формулъ можно вывести обратныя, то есть выражающія новыя константы какъ функціи тѣхъ, которыя непосредственно даются при измѣреніи на универсальномъ гониометрѣ и юстировкѣ по исходному поясу (ab).

Мы получимъ именно

$$\sec^2 A = \cotg^2 \rho_c \cotg^2 \varphi_c + \operatorname{cosec}^2 \rho_c \quad \dots 8a)$$

$$\sec^2 B = \cotg^2 \rho_c \cotg^2(ab - \varphi_c) + \operatorname{cosec}^2 \rho_c \quad \dots 8b)$$

$$\sec^2 A_1 = \cotg^2 \rho_d \cotg^2 \varphi_d + \operatorname{cosec}^2 \rho_d \quad \dots 8c)$$

$$\text{и } \sec^2 B_1 = \cotg^2 \rho_d \cotg^2(ab - \varphi_d) + \operatorname{cosec}^2 \rho_d \quad \dots 8d)$$