35. Діаграмма коносекундъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 4 сентября).

Послѣ того, какъ была составлена діаграмма плоскихъ конопримъ, естественно возникло желаніе расширить ее въ примѣненіи къ коносекундамъ.

Углубившись въ сущность дѣла, я составилъ прилагаемую при семъ діаграмму, воспользовавшись, также, какъ и для діаграммы сферическихъ конопримъ, стереографическою сѣткою, исключивъ изъ послѣдней малые круги.

Діаграмма коносекундъ, также какъ и діаграмма плоскихъ конопримъ, построена на принципѣ подобія то есть всѣ подобныя коносекунды приняты за одну. Вытекающая отсюда неполнота діаграммы разсмотрѣна въ замѣткѣ о діаграммѣ плоскихъ конопримъ.

Главную цѣль діаграммы я усмотрѣлъ въ томъ, чтобы опредѣлить по отношенію трехъ главныхъ осей коносекунды тѣ три конопримы, которыя въ коносекундѣ образуются въ трехъ плоскостяхъ ея симметріи.

Этого я достигъ, принявъ триполярныя координаты съ центрами A, B и C [1]).

Каждая гипербола характеризуется угломъ (половиннымъ) между ассимптотами, какъ вещественными двойными діаметрами инволюціи въ центрѣ. Величины этихъ угловъ обнимаютъ значенія 0°—90°.

Каждый эллипсъ характеризуется угломъ (половиннымъ) между двойными мнимыми діаметрами; но для нихъ значенія чиселъ заключаются уже только въ предѣлахъ 0°—45°. Вотъ эти то числа я и принялъ за величины координатъ и, ради наглядности, отмѣтилъ на діаграммѣ послѣдовательность ихъ отсчета, считая углы между меридіанами въ каждомъ изъ трехъ полюсовъ.

Но въ этой діаграммѣ нужно прибѣгнуть къ нѣкоторой искусственности, различая смыслъ положительныхъ значеній координатъ отъ отрицательныхъ въ томъ, что первыя относятся къ угламъ между мнимыми, а вторыя—къ угламъ между вещественными двойными діаметрами [1]).

При соблюденіи этихъ условій всѣ точки треугольника ADK выразятъ эллипсоиды, считая всѣ соотвѣтственныя значенія координатъ положительными.

Такъ какъ значеніямъ 45° соотвѣтствуютъ круги, если координаты положительны и равностороннія гиперболы (тетрапримы), если координаты отрицательны, то ясно, что точка K изображаетъ единственный шаръ, а точка T изображаетъ тотъ однополый гипербслоидъ вращенія, который во всѣхъ сѣченіяхъ чрезъ ось вращенія даетъ равностороннюю гиперболу.

Всѣмъ очертаніямъ AKDTC соотвѣтствуютъ поверхности вращенія, причемъ спеціально AK выражаетъ отрицательные эллипсоиды вращенія то есть такіе, ось вращенія которыхъ есть малая ось, KD—положительные эллипсоиды вращенія то есть тѣ, ось вращенія которыхъ есть большая ось эллипсоида.

Въ частности, точка A изображаетъ крайній отрицательный эллипсоидъ вращенія то есть плоскость, а точка D крайній положительный эллипсоидъ вращенія то есть параболоидъ вращенія; но такъ какъ всѣ параболоиды вращенія, какъ подобные, изо-

---

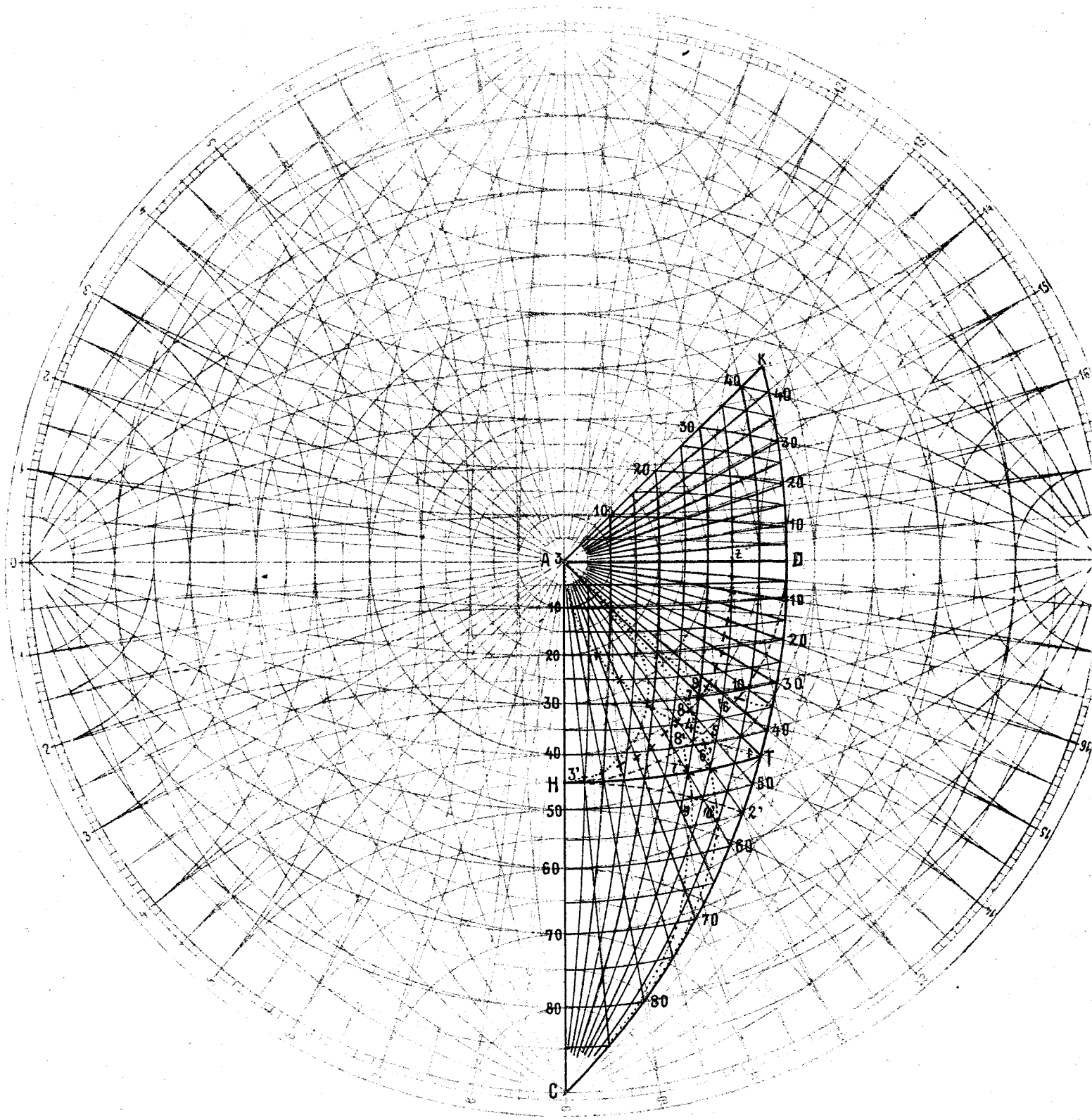
[1]) Значеніе этихъ координатъ (если ихъ величины для какой-нибудь точки на сферѣ означимъ соотвѣтственно чрезъ α, β γ,) усматривается изъ слѣдующаго (сферическое разстояніе точки отъ A означено a):

$\operatorname{tang} a . \sin\alpha = \operatorname{tang}\beta$; $\operatorname{tang} a . \cos\alpha = \operatorname{tang}\gamma$.

Отсюда $\operatorname{tang}\beta : \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\gamma$.

Въ частности, при $\alpha = \beta$ имѣемъ $\gamma = \pi/_2$.

[1]) Въ случаѣ мнимыхъ угловъ α и β имѣемъ $i . \operatorname{tang}\beta : i . \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\gamma$.



Изданіе проф. Е. С. Федорова.

бражаются одною точкою, то сюда же входитъ и прямая, какъ предѣльная.

Эта же прямая то есть сама ось вращенія можетъ быть разсматриваема какъ предѣльный ассимтотическій конусъ гиперболоида вращенія; этотъ конусъ характеризуется угломъ 0°. Подвигаясь отъ D къ T, мы получаемъ ассимтотическіе конусы все съ большимъ угломъ вплоть до главнаго конуса вращенія T, которому соотвѣтствуетъ упомянутый уже главный гиперболоидъ вращенія (какъ мы обозначимъ тотъ, который получается отъ вращенія равносторонней гиперболы около ея мнимой оси). Мы могли бы назвать этотъ рядъ гиперболоидовъ вращенія положительными, и тогда рядъ TC выразитъ отрицательные гиперболоиды вращенія. Въ частности, точка C, также какъ и A, выразитъ плоскость, но уже какъ предѣльную для отрицательныхъ гиперболоидовъ, а не отрицательныхъ эллипсоидовъ.

Такъ какъ значенію угла между двойными діаметрами, все равно вещественными или мнимыми, равному нулю, соотвѣтствуютъ параболы, то ясно, что какъ коносекунды ряда AD, такъ и коносекунды ряда AC выразятъ параболоиды, но параболоиды существенно различные; рядъ AD изображаетъ параболоиды собственно (или эллиптическіе), а рядъ AC—гиперболическіе параболоиды, то есть поверхности линейчатыя. Посреди первыхъ нѣтъ особенно замѣчательнаго члена, если не считать крайнихъ, уже разсмотрѣнныхъ. Въ рядѣ же AC есть особый членъ H, сѣченіе котораго экстраплоскостью даетъ пару перпендикулярныхъ лучей, а вообще всѣми плоскостями, перпендикулярными къ тому направленію, которое выражается точкою пересѣченія пары лучей на экстраплоскости, даетъ равностороннія гиперболы.

Таковыя гиперболы сѣченія получаются также для всѣхъ однополыхъ гиперболоидовъ въ рядѣ HT и въ рядѣ AT.

Хотя мы повидимому и исчерпали значеніе всѣхъ точекъ, входящихъ въ составъ діаграммы, но на дѣлѣ это не совсѣмъ такъ, потому что діаграмма выражаетъ ихъ вдвойнѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, кромѣ вещественныхъ эллипсовъ, существуютъ еще мнимые. При характеристикѣ коносекундъ этого совершенно обойти невозможно, такъ какъ мы можемъ нѣкоторую коносекунду характеризовать отчасти и такими эллипсами, хотя по начертанію они совершенно не отличаются отъ вещественныхъ, но отличаются уже тѣмъ, что по нимъ въ плоскостяхъ симметріи коносекунды не даютъ вещественныхъ сѣченій.

Итакъ, мы должны принять для каждой точки діаграммы два значенія; при одномъ эллипсы, характеризующіеся координатами изъ центра C, а равно и изъ центровъ A и B, есть эллипсы вещественные. Этотъ случай мы исчерпали.

Но теперь примемъ тѣ же эллипсы за мнимые. Тогда ясно, что трехугольникъ ADK ограничитъ собою всѣ точки, выражающія мнимые эллипсоиды, которые по начертанію не отличаются отъ эллипсоидовъ вещественныхъ, но отличаются по построенію полюсовъ и поляръ, по нахожденію въ линейныхъ и другихъ совокупностяхъ конопримъ и пр. Въ частности, точка K выразитъ мнимый шаръ, который при геометрическихъ изслѣдованіяхъ столь часто служитъ для вывода полярныхъ отношеній.

Отрѣзокъ AD въ такомъ случаѣ долженъ былъ бы выразить мнимые параболоиды, но таковыхъ не существуетъ, а потому необходимо выяснить значеніе какъ этого отрѣзка, такъ и всѣхъ остальныхъ точекъ трехугольника ADC.

Разъ мы перемѣнили въ діаграммѣ смыслъ координатъ, замѣнивъ вещественные элементы мнимыми, то должны и для координатъ изъ центровъ A и B принять значеніе мнимыхъ гиперболъ.

Но мнимыхъ гиперболъ не существуетъ потому, что если какой-нибудь гиперболѣ придадимъ смыслъ мнимой, то получимъ тотъ же результатъ, какъ если бы мы взяли вещественную гиперболу съ тѣмъ же отношеніемъ осей, но съ перемѣною ихъ смысла: вещественная ось стала бы мнимою, а мнимая вещественною [1]). Геометрически это выражается замѣною угла между ассимтотами дополнительнымъ до прямого; а такъ какъ наши координаты гиперболъ выражаютъ собою именно этотъ уголъ, то выходитъ, что въ предѣлахъ трехугольника ABC мы должны перемѣнить счетъ угловыхъ величинъ координатъ, замѣнивъ ихъ дополнительными углами.

Въ такомъ случаѣ точкамъ отрѣзка AB теперь принадлежатъ координаты изъ A и B, выражающія угловую величину не 0, а 90^0 то есть не параболы, а прямыя. Впрочемъ, эти прямыя не есть опредѣленныя, такъ какъ обѣ координаты A и B не имѣютъ опредѣленныхъ пересѣченій; таковыми являются всѣ точки этихъ координатъ. Такимъ образомъ эти перпендикулярныя прямыя выражаютъ направленія или нѣкоторую плоскость, а третья координата мнимый эллипсъ на этой плоскости, а вмѣстѣ съ тѣмъ и величину угла между мнимыми двойными діаметрами.

Вообще же для всѣхъ точекъ внутри трехуголь-

[1]) Ср. эти Записки IV 311.

ника ADC мы имѣемъ въ сѣченіи на одной изъ плоскостей симметріи мнимый эллипсъ, а на двухъ другихъ гиперболы и значитъ коносекунды эти есть двуполые гиперболоиды.

Въ частности, меридіанъ CD выражаетъ двуполые гиперболоиды вращенія, такъ какъ для этихъ коносекундъ мнимый эллипсъ становится мнимымъ кругомъ. Изъ нихъ выдается коносекунда, изображаемая точкою T, обѣ гиперболы которой есть гиперболы равностороннія, почему эту коносекунду, можно назвать главнымъ двуполымъ гиперболоидомъ вращенія. Если всѣмъ вообще гиперболоидамъ вращенія принадлежитъ ассимтотическій конусъ вращенія, то именно этой секундѣ принадлежитъ главный конусъ вращенія (соотвѣтственно главной сферопримѣ на сферѣ). Точка D выражаетъ плоскость или крайній отрицательный двуполый гиперболоидъ вращенія; для него ассимтотическій конусъ становится спеціальнымъ и отмѣчаетъ на экстраплоскости прямую. Отрицательные гиперболоиды вращенія послѣ точки T переходятъ въ положительные гиперболоиды вращенія, крайній членъ которыхъ выражается точкою C и есть двойная прямая, такъ какъ въ ней приходятъ въ совпаденіе всѣ лучи ассимтотическаго конуса.

Наконецъ точкамъ радіуса CA соотвѣтствующіе гиперболоиды сводятся къ своимъ ассимптотическимъ конусамъ, которые въ свою очередь, представляютъ пару ассимптотъ подъ угломъ, который указывается координатой изъ B (не забудемъ, что координату слѣдуетъ считать дополнительно до прямого угла тому, который написанъ на діаграммѣ).

Такимъ образомъ, въ совокупности, мы получили въ качествѣ ассимптотическихъ всѣ конусы, которые вообще существуютъ; но конусы эти различны для однополыхъ и для двуполыхъ гиперболоидовъ. Въ этомъ различіи мы можемъ убѣдиться хотя бы по различію ассимптотическихъ конусовъ, соотвѣтствующихъ радіусу AC. Въ первой системѣ эти конусы выражаются парою экстралучей, во второй системѣ—парою экстраточекъ, причемъ въ обоихъ случаяхъ углы дополнительны до прямого.

Также точкамъ отрѣзка AD въ первой системѣ соотвѣтствуютъ ассимптотическіе конусы въ видѣ экстраточекъ, во второй—въ видѣ экстралучей.

Въ совокупности ассимптотическихъ сфероконусовъ меридіана CD различія нѣтъ: но въ отдѣльныхъ точкахъ различіе между сфероконусами такое, какое принадлежитъ двумъ полярнымъ.

Мы видимъ такимъ образомъ, что по всему периметру трехугольника ACD различіе въ значеніи каждой точки для обѣихъ системъ такое, какое существуетъ для двухъ полярныхъ конусовъ. Конечно, это распространяется и на всѣ внутреннія точки трехугольника, что можно доказать слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ конусъ, соотвѣтствующій какой-нибудь точкѣ радіуса AC, и другой, соотвѣтствующей какой-нибудь точкѣ меридіана CD, и составимъ изъ нихъ линейную прима (предполагаемъ совмѣщеніе ихъ центровъ, если таковые есть опредѣленныя точки); тогда совокупность полярныхъ конусовъ есть также линейная прима, и въ то же время она состоитъ изъ конусовъ, соотвѣтственно полярныхъ конусамъ первой примы; и это соотношеніе остается справедливымъ для всѣхъ такихъ линейныхъ примъ.

Итакъ одна и та же точка діаграммы, смотря потому, будемъ лимыее считать принадлежащей къ системѣ однополыхъ или двуполыхъ гиперболоидовъ, выразить два полярные ассимптотическіе конуса.

Отсюда слѣдуетъ, что двумъ коррелятивнымъ гиперболоидамъ, представленнымъ на діаграммѣ одною и тою же точкою, изъ которыхъ одинъ однополый, а другой двуполый, принадлежатъ полярные ассимптотическіе конусы.

Сравнивая распредѣленіе ассимптотическихъ конусовъ съ распредѣленіемъ конусовъ по ихъ спеціальной діаграммѣ (стр. 362), мы не можемъ не замѣтить коренного различія. Ясно, что меридіану сфероконусовъ CD на діаграммѣ конусовъ (конопримъ на сферѣ) соотвѣтствуетъ меридіанъ ZOC, а меридіану AC въ системѣ однополыхъ гиперболоидовъ меридіанъ BC (въ системѣ же двуполыхъ гиперболоидовъ меридіанъ BZ). Тутъ уголъ между этими меридіанами $\pi/4$, а тамъ $\pi/2$. Еще рѣзче различіе проявляется въ значеніи отрѣзка AD. Здѣсь, въ системѣ однополыхъ гиперболоидовъ ихъ точки выражаютъ ассимптотическій конусъ въ видѣ простого луча; въ діаграммѣ конусовъ этому соотвѣтствуетъ одна единственная точка Z.

Тѣмъ не менѣе по діаграммѣ конусовъ мы легко найдемъ и ассимптотическій конусъ, принадлежащій любому гиперболоиду. Въ самомъ дѣлѣ, координаты при точкахъ A и B есть тѣ самыя координаты, которыми на діаграммѣ конусовъ мы опредѣляемъ тѣ конусы, которые для даннаго гиперболоида служатъ конусами ассимптотическими. Разница лишь въ самой системѣ координатъ.

Здѣсь координатами служатъ углы между меридіанами, проходящими чрезъ оба полюса или центра A и B. На діаграммѣ конусовъ тѣ же углы отсчи-

тываются отъ соотвѣтственныхъ центровъ по сферическимъ разстояніямъ и равнымъ величинамъ координатъ соотвѣтствуютъ сферопримы. Въ системѣ однополыхъ гиперболоидовъ центрамъ A и C соотвѣтственны центры B и Z; въ системѣ двуполыхъ гиперболоидовъ тѣмъ же центрамъ соотвѣтственны центры B и C; слѣдовательно, въ обѣихъ системахъ мы имѣемъ двѣ системы конусовъ, расположенныхъ симметрично относительно примы гармоническихъ конусовъ, что, впрочемъ, и выражается вышеприведенною теоремою. Понятно, что въ обоихъ случаяхъ конусамъ вращенія CD соотвѣтствуетъ ZOC, но въ противоположной послѣдовательности.

Въ виду такого соотвѣтствія между гиперболоидами и ассимптотическими конусами, мы могли бы и для первыхъ принять тѣ же координаты, что и для конусовъ. Единственное неудобство въ такихъ координатахъ было бы, что въ системѣ однополыхъ гиперболоидовъ всѣмъ параболоидамъ, то есть точкамъ отрѣзка AD соотвѣтствовалъ одинъ и тотъ же ассимптотическій конусъ въ видѣ прямыхъ одного направленія (параллельныхъ) и вовсе не было бы представлено пары лучей, а въ системѣ двуполыхъ гиперболоидовъ ассимптотическій конусъ въ видѣ простой плоскости былъ бы представленъ безконечное число разъ и вовсе не было бы представлено конусовъ въ видѣ пары плоскостей.

Тѣмъ не менѣе всѣ особые виды ассимптотическихъ конусовъ, какъ конусовъ, могутъ характеризовать соотвѣтственные гиперболоиды, такъ что и на гиперболоиды мы могли бы перенести названія, заимствованныя у конусовъ. Мы могли бы непосредственно на діаграммѣ читать эти названія, если бы провели ту же совокупность кривыхъ, что и въ діаграммѣ. Это и намѣчено на діаграммѣ пунктирными линіями съ подписаніемъ для главнѣйшихъ ассимптотическихъ конусовъ тѣхъ же цифръ, что и въ діаграммѣ.

Для системы однополыхъ гиперболоидовъ: цифра 1 отмѣчаетъ главный конусъ вращенія, 2—полярный конусъ вращенія Шретера, 2′—конусъ вращенія Шретера, въ точкѣ 3 сосредоточиваются изображенія и двойной плоскости и всѣхъ вообще паръ лучей, въ томъ числѣ и пары перпендикулярныхъ лучей, 3′ отмѣчаетъ пары перпендикулярныхъ плоскостей, 4—гармоническій ортофокальный, а слѣдовательно и ортоциклическій конусъ, 5—гармоническій ортогональный, а слѣдовательно и полярно-ортогональный конусъ, 6—ортогональный конусъ Гашетта, 6′—полярно-ортогональный конусъ Паппуса, 7—ортоциклическій конусъ Гашетта, 7′—ортофокальный конусъ Паппуса, 8—ортоциклическій полярно-ортогональный конусъ, 8′—ортофокальный ортогональный конусъ, 9—ортоциклическій полярный конусъ Шретера, 9′—ортофокальный конусъ Шретера, 10—ортогональный полярный конусъ Шретера и 10′—полярно-ортогональный конусъ Шретера.

Для системы двуполыхъ гиперболоидовъ нужно простыя цифры переставить съ тѣми же цифрами съ апострофами, чтобы получить для нихъ то же геометрическое значеніе.

Въ теоріи конусовъ наиболѣе важную роль играютъ гармоническіе, по отношенію къ которымъ всѣ остальные конусы располагаются симметрическими парами. Здѣсь прима ассимптотическихъ гармоническихъ конусовъ, къ которой принадлежатъ конусы № 1, 4, 5, уже не играетъ той роли, и вся заключается внутри трехугольника AHT.

Однако, если терминологію конусовъ мы перенесемъ и на гиперболоиды, то на основаніи выведенной выше теоремы получаемъ какъ слѣдствіе: въ коррелятивныхъ гармоническихъ гиперболоидахъ (однополомъ и двуполомъ) однии тѣ же ассимптотическіе конусы.

При этомъ новомъ способѣ изображенія конусовъ нѣкоторыя совокупности ихъ особыхъ видовъ получили видъ болѣе сложныхъ кривыхъ, напр. примы конусовъ Паппуса и Гашетта, помимо упомянутой уже примы гармоническихъ конусовъ; но за то другія получили болѣе простой видъ въ изображеніи, а именно: ортогональные ассимптотическіе конусы въ системѣ однополыхъ (а слѣдовательно полярно-ортогональные въ системѣ двуполыхъ гиперболоидовъ) получаютъ изображеніе въ видѣ сферопримъ, которымъ принадлежатъ конусы: № 3′, 8′ 5, 6, 10 и Z. То же въ системѣ однополыхъ гиперболоидовъ относится и къ примѣ конусовъ Шретера (а слѣдовательно въ системѣ двуполыхъ гиперболоидовъ къ примѣ полярныхъ конусовъ Шретера), къ которымъ принадлежатъ конусы № 3′, 9′, 10′, 2′.

Наконецъ особою пунктирною кривою—второю кривою, вполнѣ заключающеюся внутри треухгольника AHT, отмѣчена прима главныхъ антифокальныхъ ассимптотическихъ конусовъ; крайними членами ея являются конусы 3 и 3′.

Разсмотрѣнная діаграмма основана на принципѣ подобія, и потому можно было не ожидать, что въ нее войдутъ изображенія конусовъ какъ коносекундъ; вѣдь ассимптотическіе конусы составляютъ предѣльные члены рядовъ подобныхъ гиперболоидовъ, однополыхъ съ одной стороны и двуполыхъ съ другой, и именно эти предѣльные члены составляютъ исклю-

ченіе въ смыслѣ подобія, такъ какъ не подобны ни тѣмъ, ни другимъ.

Однако, какъ видимъ, конусы эти нетолько вошли въ изображенія діаграммы, но и съиграли въ ней особую роль, такъ какъ дали возможность установить для самихъ гиперболоидовъ болѣе детальную терминологію и поспособствовали сильному повышенію наглядности въ отношеніяхъ между ними, между коррелятивными однополыми и двуполыми гиперболоидами. Тѣ самыя точки, которыя выражаютъ опредѣленные ассимптотическіе конусы и свойства которыхъ мы можемъ подробнѣе видѣть на спеціальной діаграммѣ конусовъ, изображаютъ и всѣ подобныя коносекунды, для которыхъ эти конусы являются ассимптотическими.

Если дана точка на діаграммѣ, то по координатамъ ея и съ помощью діаграммы плоскихъ конопримъ опредѣлимъ всѣ три конопримы сѣченія въ плоскостяхъ симметріи, а если эта точка выражаетъ гиперболоидъ, то съ такою же отчетливостью мы съ помощью діаграммы конусовъ, найдемъ и свойства ассимптотическихъ конусовъ.

Если даны три оси коносекунды, вещественныя или мнимыя, мы сейчасъ же находимъ соотвѣтственную точку на діаграммѣ, а слѣдовательно становится извѣстнымъ все существенное, къ этой коносекундѣ относящееся.