34. Діаграмма плоскихъ конопримъ.

Е. С. Федорова

(доложено 4 сентября).

Тѣ многочисленные и полезные результаты, которые получились отъ составленія діаграммы сферическихъ конопримъ, побудили меня заняться, какъ болѣе простымъ случаемъ, составленіемъ діаграммы плоскихъ конопримъ.

Конечно, въ обоихъ случаяхъ разница громадная. Тамъ мы имѣемъ дѣло съ секундою конопримъ; здѣсь только съ примою, такъ какъ совокупность всѣхъ подобныхъ конопримъ приходится разсматривать какъ одну единственную. Тамъ каждая коноприма характеризуется угловою величиною двухъ осей, которыя всегда вещественны; здѣсь вещественна всегда только главная (большая) ось, малая же ось въ гиперболахъ есть ось мнимая.

Естественно, поэтому, начать составленіе діаграммы съ ряда эллипсовъ, для которыхъ обѣ оси вещественны. Но за то для нихъ мнимыми являются двойные діаметры (каждая пара сопряженныхъ діаметровъ входитъ въ составъ эллиптической инволюціи), хотя углы между ними вещественны и имѣютъ опредѣленную величину, а именно тангенсъ половиннаго угла есть отношеніе величинъ малой и большой оси.

Принимаю точку A за начало прямоугольныхъ координатъ, причемъ по оси AB откладываю величины малыхъ, а по оси AC величины большихъ осей. Но въ виду вышесказаннаго объ единичности всѣхъ подобныхъ конопримъ достаточно для одной изъ координатъ принять постоянную единичную величину.

Это я дѣлаю для большой оси, принявъ за эту 1-цу сторону начерченнаго квадрата. Но величины малыхъ осей откладываю не въ арифметической прогрессіи, а въ порядкѣ величинъ угловъ (половинныхъ) между двойными мнимыми діаметрами всѣхъ эллипсовъ. Соотвѣтственныя величины этихъ угловъ отмѣчены цифрами отъ 0 до 45^0, когда большая и малая ось дѣлаются равными. Слѣдовательно, кругъ на плоскости выражается на діаграммѣ точкою съ цифрою 45. Ясно также, что точка съ цифрою 0 выражаетъ спеціальный эллипсъ съ величиною малой оси, равною нулю то есть пару точекъ.

Этимъ изображеніе эллипсовъ и исчерпывается, причемъ по діаграммѣ мы видимъ относительную длину малой оси и одновременно соотвѣтственный уголъ между двойными мнимыми сопряженными діаметрами. Требуетъ поясненія только опредѣленіе относительной длины отрѣзка между фокусами. Для этой цѣли проведенъ кругъ, имѣющій діаметромъ сторону квадрата и рядъ концентрическихъ круговъ, центръ коихъ есть вершина квадрата, отмѣченная цифрою 0.

Положимъ, нужно найти относительную длину фокуснаго отрѣзка (половиннаго) для конопримы, характеризующейся угломъ 35^0. Соотвѣтственный кругъ отмѣчаетъ на кругѣ C точку D. Получаемъ прямоугольный при D трехугольникъ, въ которомъ одинъ катетъ есть величина малой полуоси, а гипотенуза—сторона квадрата—величина большой полуоси. Слѣдовательно, мы можемъ принять точку D за центръ конопримы, въ которомъ пересѣкаются большая и малая оси, причемъ точка A на первой есть одинъ фокусъ этой конопримы и значитъ отрѣзокъ AD то есть другой катетъ трехугольника и есть искомый (половинный) фокусный отрѣзокъ.

Также очевидно, мы можемъ найти фокусные отрѣзки всѣхъ эллипсовъ; въ частности, для эллипса 45^0, то есть круга, найдемъ этотъ отрѣзокъ равнымъ нулю.

Для изображенія гиперболъ эта діаграмма служитъ еще болѣе непосредственно, если за ихъ центръ примемъ вершину A квадрата, а стороны послѣдняго за направленія осей. Пусть та же точка D вы

ражаетъ гиперболу, которой полуоси есть катеты прямоугольнаго трехугольника, а гипотенуза послѣдняго AD есть величина фокуснаго отрѣзка, такъ какъ кругъ системы A, проходящій чрезъ эту точку, проходитъ и чрезъ фокусъ гиперболы. Отношеніе величинъ осей опредѣляется тангенсомъ угла образуемаго съ главною осью ассимптотой AD. Мы читаемъ этотъ уголъ непосредственно на окружности, въ которой вписанъ квадратъ. Въ данномъ случаѣ гипербола близка къ равносторонней.

Такимъ образомъ всѣ гиперболы выражаются точками на кругѣ въ обѣ стороны отъ точки O, составляющей центръ квадрата и выражающей равностороннюю гиперболу, вплоть до точки, отмѣченной цифрою 0, которая выражаетъ гиперболы съ угломъ между ассимптотами, равнымъ нулю то есть параболу съ одной стороны и до точки A (90^0), изображающей двойную прямую, съ другой стороны.

Всѣ цѣли, ставимыя такою объединяющею діаграммою, достигнуты.

Обѣ системы проведенныхъ концентрическихъ круговъ пересѣкаютъ другъ друга прямоугольно въ точкахъ круга C; напр. въ точкѣ D пересѣкаются два катета, которые находятся на касательныхъ къ двумъ кругамъ, пересѣкающимся въ ней же.

Въ этой діаграммѣ лучи изъ A, которые спеціально для гиперболъ составляютъ ассимптоты, устанавливаютъ проективность между эллипсами и гиперболами. Проективными конопримами при этомъ соотвѣтствіи будутъ тѣ, которымъ принадлежитъ одинаковый уголъ между двойными діаметрами; при этомъ кругу въ рядѣ эллипсовъ проективна равносторонняя гипербола, а парѣ точекъ—парабола.

Въ заключеніе замѣчу, что эта діаграмма основана на соединеніи въ одно всѣхъ подобныхъ конопримъ. Но въ составѣ гиперболъ есть поразительное исключеніе въ отношеніи подобія, а именно крайняя разность гиперболъ съ равными углами между ассимптотами то есть сама пара ассимптотъ, какъ гипербола, не можетъ быть названа подобною всѣмъ остальнымъ.

По этой причинѣ въ діаграмму вовсе не вошли спеціальныя гиперболы, состоящія изъ паръ лучей.

Впрочемъ, это замѣчаніе слѣдуетъ распространить и на крайне спеціальныя разности всѣхъ конопримъ. Оно относится и къ спеціальнымъ кругамъ которые состоятъ изъ прямыхъ и отдѣльныхъ точекъ и конечно тоже не подобны остальнымъ. Оно относится и къ парамъ точекъ, которыя вообще связаны подобіемъ, но въ ихъ крайнихъ разностяхъ—парѣ въ которой имѣется одна экстра точка, а тѣмъ болѣе въ двойныхъ точкахъ подобія съ остальными не имѣется.

Наконецъ, діаграмма не полна еще въ томъ отношеніи, что не содержитъ въ себѣ мнимыхъ эллипсовъ (какъ извѣстно, мнимыхъ гиперболъ не существуетъ). Но по начертанію они не отличаются отъ эллипсовъ вещественныхъ, почему ту часть, которая относится къ эллипсамъ, можно считать вдвойнѣ, или же отнести ее къ сторонѣ квадрата 45—B.

