33. Разряды конусовъ и простой способъ распознаванія этихъ разрядовъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 4 сентября).

Если, принявъ центръ конуса за центръ сферы пересѣчемъ его поверхностью этой сферы, то конусъ замѣнится *сферическою конопримою*, почему поставленная задача сводится къ распознаванію разрядовъ конопримъ на сферѣ.

Аналогичная ей задача опредѣленія разрядовъ плоскихъ конопримъ разрѣшается опредѣленіемъ вида инволюціи точекъ конопримы на экстрапрямой (безконечно удаленной) или инволюціи лучей въ ея центрѣ.

Такой принципъ раздѣленія не примѣнимъ для сферическихъ конопримъ по отсутствію экстрапримы точекъ и, вслѣдствіе этого, также отсутствію одного центра, такъ какъ здѣсь имѣется ихъ три [1]).

Гиперболами называются тѣ конопримы, для которыхъ эта инволюція съ двумя вещественными, эллипсы это тѣ, для которыхъ инволюція съ двумя мнимыми двойными точками; въ промежуткѣ находится парабола, для которой эти двойныя точки сливаются въ одну. Слѣдовательно, это есть частный разрядъ конопримъ, такъ какъ въ сущности онъ уже сводится къ опредѣленію величины угла, соотвѣтствующаго этимъ двумъ точкамъ, который для параболъ имѣетъ величину нуль. Въ сущности такой же частный разрядъ составляютъ и тѣ конопримы, для которыхъ уголъ этотъ прямой. Изъ гиперболъ такимъ образомъ выдѣляется такъ называемая равносторонняя гипербола, а изъ эллипсовъ кругъ. Такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ прямой уголъ относится къ мнимымъ двойнымъ точкамъ инволюціи, то получается неопредѣленность, такъ какъ въ этомъ случаѣ каждой парѣ такихъ точекъ принадлежитъ одинаковая роль и инволюція становится изотропной.

Въ виду того, что названіе *равносторонней гиперболы* очень длинно и въ то же время не выражаетъ въ точности ея наиболѣе существенныхъ свойствъ, я полагалъ бы цѣлесообразнымъ замѣнить это названіемъ словомъ *тетраприма* точекъ, ясно выражающимъ, что эта коноприма опредѣляется любыми четырьмя точками. Въ этомъ смыслѣ равносторонняя гипербола есть во всякомъ случаѣ тетраприма.

При полной коррелятивности конопримъ на плоскости и на сферѣ, между этими двумя неродственными геометрическими системами получаются въ подраздѣленіяхъ глубокія различія.

Прежде всего различіе проявляется въ примѣненіи къ первой системѣ понятія подобія, которое совершенно не примѣнимо къ сферическимъ системамъ вообще. Всѣ упомянутые частные разряды конопримъ на плоскости подобны, на данной же сферѣ подобныхъ конопримъ не имѣется, а только равныя [1]). Съ другой стороны, каждой конопримѣ на сферѣ коррелятивна полярная коноприма: если одну изъ нихъ принять за коноприму точекъ, другая будетъ конопримою лучей, огибаемую которой мы тоже можемъ и должны принять за коноприму точекъ, и тогда обѣ конопримы окажутся вообще существенно различными.

Такія двѣ конопримы какъ бы всегда *сопровождаютъ* другъ друга.

Правда, мы можемъ найти такія *сопровождающія* и для конопримъ на плоскости: стоитъ заставить скользить по конопримѣ описанный прямой

[1]) Названіе (главнаго) центра для сферической конопримы примѣняется для внутренней точки соотвѣтственно главной оси конуса. Въ конопримахъ лучей, коррелятивныхъ конопримамъ точекъ, центрамъ послѣднихъ коррелятивны меридіаны; изъ нихъ внѣшній, полярный главному центру, можно назвать *экваторомъ*.

[1]) Но за то на концентрическихъ шарахъ имѣются совокупности подобныхъ конопримъ.

уголъ, и вершина этого угла опишетъ такую сопровождающую коноприму точекъ, а поляры этихъ вершинъ обогнутъ другую коноприму — коноприму лучей.

Такія сопровождающія для плоскихъ конопримъ всегда есть, какъ извѣстно, круги; но, помимо того, такія сопровождающія имѣются, въ свою очередь, и у сферическихъ конопримъ, и, какъ увидимъ, онѣ играютъ въ ихъ теоріи не малую роль.

Раздѣленій сферическихъ конопримъ на разряды по экстраэлементамъ не существуютъ по той причинѣ, что въ этой системѣ (и даже сферическихъ вообще), экстраэлементовъ не существуетъ.

Весьма естественно поэтому искать различенія на разряды въ тѣхъ признакахъ, которыми эти конопримы наиболѣе существенно отличаются отъ плоскихъ и каковыя, въ свою очередь, отсутствуютъ у плоскихъ конопримъ, напр. въ отношеніи другъ къ другу сопровождающихъ.

Но первый признакъ сопровожденія въ полярныхъ парахъ связанъ съ отношеніемъ между полюсомъ и полярою: точки каждой изъ паръ полярныхъ конопримъ есть полюсы касательныхъ другой конопримы пары, какъ въ прямомъ трехугольникѣ (соотвѣтствующемъ прямому трехгранному углу) каждая вершина есть полюсъ противоположной стороны.

Второй признакъ сопровожденія также связанъ съ прямымъ трехугольникомъ, такъ какъ, если мы заставимъ скользить таковой по нѣкоторой конопримѣ, то одна изъ вершинъ трехугольника опишетъ сопровождающую коноприму, двѣ другія будутъ одновременно скользить по ея полярной, а сторона, противоположная первой вершинѣ, обогнетъ коноприму, полярную сопровождающей.

Такимъ образомъ видимъ, что если данной конопримѣ сопровождающая получается траекторіей вершины скользящаго прямого угла (двухъ касательныхъ), то у полярной къ ней сопровождающая получается отъ движенія отрѣзка сферической прямой равнаго прямому углу.

Но не во всякой конопримѣ можетъ скользить такой отрѣзокъ, и не около всякой можетъ скользить прямой уголъ.

Ясно, что къ первымъ относятся тѣ конопримы у которыхъ малая ось больше прямого, а ко вторымъ тѣ, у которыхъ большая ось меньше прямого. На границѣ тѣхъ и другихъ стоятъ конопримы, у коихъ одна изъ осей измѣряется прямымъ угломъ.

Такимъ образомъ мы съ самаго начала получаемъ два разряда конопримъ, соотвѣтствующіе, по степени общности, гиперболамъ и эллипсамъ плоскихъ конопримъ. Слѣдовательно, конопримы промежуточныя, составляющія уже частный разрядъ конопримъ, до нѣкоторой степени аналогичны параболамъ.

Назовемъ макроаксіальными тѣ конопримы въ которыхъ можетъ скользить прямоугольный отрѣзокъ, а микроаксіальными тѣ, около которыхъ можетъ скользить пара перпендикулярныхъ лучей.

Каждую коноприму мы можемъ опредѣлить двумя данными напр. величинами полуосей; слѣдовательно полная совокупность ихъ есть секунда. Только что отмѣченныя подраздѣленія не представляютъ частныхъ разрядовъ конопримъ, а только отдѣльные районы секунды. Но районы должны разграничиваться другъ отъ друга частными разрядами, представляющими уже примы конопримъ. Такими разграничительными разрядами представляются конопримы Паппуса и Гашетта. Оба разряда характеризуются тѣмъ, что одна изъ осей есть прямоугольный отрѣзокъ; но въ первыхъ конопримахъ этотъ отрѣзокъ составляетъ малую, а во вторыхъ большую ось.

Конусы Паппуса, послѣ конусовъ вращенія находятъ наибольшее примѣненіе, такъ какъ являются проектирующими конусами стереографической проекціи.

О свойствахъ этихъ конусовъ мною составлена особая замѣтка (эти Записки стр. 322).

Какъ особый спеціальный случай такихъ конусовъ является особый конусъ вращенія (соотв. сфероприма со сферическимъ радіусомъ въ 45^0), который поляренъ самъ себѣ и одинаково относится какъ конусамъ Паппуса, такъ и къ конусамъ Гашетта, и даже одинаково принадлежитъ какъ макроаксіальнымъ, такъ и микроаксіальнымъ конопримамъ. Онъ имѣется въ единичномъ числѣ и въ наибольшей степени представляетъ аналога круга на плоскости, являющагося также въ единичномъ числѣ [1]) (такъ какъ всѣ круги связаны подобіемъ).

Наибольшая величина полуоси вообще есть прямой уголъ, а потому для этого предѣльнаго случая коноприма Паппуса становится двумя перпендикулярными лучами, а полярная ей коноприма Гашетта парою точекъ со сферическимъ прямымъ угломъ, и совокупность ея лучей составляетъ двѣ

---

[1]) И въ этомъ отношеніи проявляется глубокое различіе между системами на плоскости и на сферѣ. Въ первой сферопримѣ (круги) являются въ единичномъ числѣ, а на сферѣ онѣ представлены цѣлою примою, отдѣльные члены которой отличаются величинами сферическихъ радіусовъ; хотя всѣ, по существу сферопримъ, опредѣляются тремя элементами. Соотвѣтственные конусы есть конусы вращенія.

линейныя примы, какъ совокупность точекъ конопримы Паппуса составитъ двѣ линейныя примы точекъ.

Однако, разсмотрѣнные виды конопримъ не раздѣляютъ всей области конопримъ на двѣ равноправныя части. Конопримы Паппуса макроаксіальны, но стоятъ на рубежѣ съ микроаксіальными, такъ какъ становятся таковыми при произвольно маломъ уменьшеніи малой оси.

Также микроаксіальныя конопримы Гашетта становятся макроаксіальными при произвольномъ маломъ увеличеніи большой оси.

Слѣдовательно, имѣется общій районъ конопримъ одновременно макро- и микроаксіальныхъ [1]).

Но имѣется замѣчательный разрядъ гармоническихъ конопримъ [2]), которыя совпадаютъ со своими полярными. Онѣ цѣликомъ принадлежатъ этому общему району макро- и микроаксіальныхъ и представляютъ естественное раздѣленіе всего района конопримъ на макроконопримы и микроконопримы. Къ первымъ относятся тѣ, которыя по сферической площади превышаютъ свои полярныя, а ко вторымъ тѣ, которыя по площади меньше своихъ полярныхъ.

Концы большихъ и малыхъ осей такихъ двухъ полярныхъ конопримъ составляютъ съ концами сферопримы съ діаметромъ, измѣряемымъ прямымъ угломъ, пары инволюціи (гармонически-сопряженныя)

Гармоническія конопримы занимаютъ во всей области возможныхъ конопримъ нѣкоторымъ образомъ симметричное положеніе, такъ какъ какую бы пару полярныхъ конопримъ мы ни взяли въ разсмотрѣніе всегда одна изъ нихъ имѣетъ большую площадь и слѣдовательно относится къ макроконоприматъ, а другая къ микроконоприматъ, и всегда въ промежуткѣ между ними стоитъ коноприма гармоническая, занимая нейтральное положеніе, такъ какъ не относится ни къ тѣмъ ни къ другимъ.

Теперь перейдемъ къ другому важнѣйшему частному разряду конопримъ, непосредственно выводящемуся изъ отношенія сопровождающихъ.

Предварительно, однако, докажемъ теорему о сопровождающихъ, подразумѣвающуюся выше.

Возьмемъ какую-нибудь пару полярныхъ конопримъ съ ихъ сопровождающими, про которыя именно и требуется доказать, что они также конопримы.

Теперь мы знаемъ, что одна изъ полярныхъ конопримъ есть микро-, а другая макроконоприма. Ради опредѣленности примемъ первую за коноприму точекъ и тогда вторая будетъ коноприма лучей. Впишемъ въ макроконоприму два прямыхъ трехугольника ABC и AB_1C_1 такъ чтобы ихъ вершина A была общею (конечно общею будетъ и противоположная сторона a, касательная къ микропримѣ), а двѣ стороны b и b_1 были двумя касательными къ микроконоприматъ; тогда двѣ вершины B и B_1 принадлежатъ макро-, двѣ вершины C и C_1 есть точки сопровождающей микроконопримы, а двѣ стороны c и c_1 есть лучи сопровождающей макроконоприму.

Такъ какъ на точки B и B_1 можно смотрѣть какъ на точки пересѣченія сопровождающей микроконоприму сферическою прямою a и такъ какъ мы взяли эту прямую произвольно изъ числа сторонъ прямого трехугольника, то значитъ, всѣ такія сферическія прямыя пересѣкаютъ сопровождающую въ двухъ точкахъ, въ томъ числѣ и прямыя c и c_1, пересѣкающіяся въ точкѣ A. Проводя линейную приму такихъ лучей изъ A, мы найдемъ, что при движеніи AB до AC_1 (также какъ отъ AB_1 до AC_1) мы дойдемъ до такихъ лучей, которые не имѣютъ съ микроконоприматъ вещественныхъ общихъ точекъ, а слѣдовательно, на этомъ пути лучи пройдутъ чрезъ положеніе касательныхъ къ микроконоприматъ и таковыхъ будетъ двѣ; допустимъ, что при обратномъ движеніи лучей въ промежуткѣ между AB и AB_1 при какомъ-нибудь положеніи луча появится большее чѣмъ двѣ числа пересѣкаемыхъ точекъ въ такомъ случаѣ эта должна быть третья касательная къ сопровождающей микроконоприматъ и она же должна ее пересѣкать, а это невозможно, потому что по самому опредѣленію сопровождающей ея касательныя находятся внѣ микроконоприматъ и не могутъ имѣть съ нею вещественныхъ точекъ пересѣченія.

Итакъ, никакой лучъ не можетъ пересѣкать сопровождающую больше чѣмъ въ двухъ точкахъ. Отсюда тоже слѣдуетъ, что ни изъ какой точки нельзя къ сопровождающей микроконоприматъ провести болѣе двухъ касательныхъ.

Если точку A возьмемъ на концѣ большой оси микроконоприматъ, то лучъ a будетъ касателенъ въ концѣ малой оси микроконоприматъ. Будемъ увеличивать эту ось, оставляя другую неизмѣнною. Ясно, что дойдемъ до такой микроконоприматъ, что точки B и B_1 станутъ точками макроконоприматъ, и тогда сопровождающая микроконоприматъ станетъ ея полярною макроконоприматъ, и обратно, сопровождающая макроконоприматъ станетъ ея полярною микроконоприматъ.

---

[1]) Теперь стало ясно, что помимо полярныхъ, для конопримъ этого района имѣется двѣ сопровождающихъ смотря потому, будемъ ли мы ихъ разсматривать какъ макроаксіальныя или микроаксіальныя.

[2]) Эти записки IV. 306.

Это конечно будетъ особый случай, а потому такія конопримы составятъ особый разрядъ, характеризующійся тѣмъ, что въ макроконоприме каждая точка есть вершина прямого трехугольника, въ ней вписаннаго и описаннаго около полярной ей микроконопримы.

Такія макроконопримы и ихъ свойства изслѣдованы Шретеромъ и названы равносторонними (названіе собственно отнесено къ соотвѣтствующимъ конусамъ). Отсюда слѣдуетъ, что въ конопримахъ Шретера каждая точка есть одна изъ вершинъ вписаннаго въ нихъ прямого трехугольника, а въ полярныхъ микроконопримахъ Шретера каждая касательная есть одна изъ сторонъ описаннаго прямого трехугольника. Эти конопримы представляютъ собою тотъ частный видъ конопримъ, когда полярныя совпадаютъ съ сопровождающими.

Мы легко воспроизведемъ всю приму конопримъ Шретера, если зададимся всѣми конопримами, опредѣляемыми вершинами одного прямого трехугольника, въ которомъ выдѣлимъ одну изъ плоскостей симметріи, и перемѣнною парою точекъ, симметричныхъ по отношенію къ этой плоскости; для этого достаточно одну изъ точекъ этой пары двигать по какому-нибудь лучу изъ вершины треугольника, находящейся въ принятой плоскости симметріи.

Въ томъ спеціальномъ случаѣ, когда избранная точка совпадаетъ съ вершиной трехугольника, съ нею же совпадаетъ и симметричная точка, а потому коноприма Шретера становится сферопримою Шретера, а именно тою, которая проходитъ чрезъ вершины трехугольника. Легко вычислить ея сферическій радіусъ, равный $54^0 44'$; сферическій радіусъ полярной сферопримы Шретера $35^0 16'$).

Если пару точекъ возьмемъ на сторонѣ трехугольника, то коноприма составится изъ этой стороны и слѣда плоскости симметріи какъ двухъ перпендикулярныхъ лучей. Это уже особый спеціальный случай конопримы Шретера; въ этомъ случаѣ полярная коноприма состоитъ изъ концовъ отрѣзка, измѣряющагося прямымъ угломъ; всѣ ея лучи составятъ двѣ линейныя примы лучей, какъ въ первой всѣ точки составляютъ двѣ линейныя примы точекъ. Въ этомъ предѣльномъ случаѣ конопримы Шретера совпадутъ со спеціальными разностями конопримъ Паппуса и Гашетта.

1) Выражаясь съ математическою точностью, это углы, тангенсъ и котангенсъ которыхъ есть $\sqrt{2}$.

Въ своемъ знаменитомъ трактатѣ о коническихъ сѣченіяхъ Штейнеръ доказалъ, что для опредѣленія равностороннихъ гиперболъ достаточно четырехъ точекъ. Если данныя точки A, B, C, D, то четырехугольникъ, для коего эти точки есть вершины, можно различнымъ образомъ раздѣлить на четыре трехугольника, и точки высотъ всѣхъ этихъ трехугольниковъ находятся вмѣстѣ съ вершинами четырехугольника на одной и той же равносторонней гиперболѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что построивъ любой изъ этихъ трехугольниковъ напр. ABC, и, отыскавъ въ немъ точку высотъ H мы на основаніи теоремы Паскаля можемъ построить коноприму, въ данномъ случаѣ равностороннюю гиперболу по даннымъ четыремъ точкамъ съ присоединеніемъ къ нимъ пятой точки H.

Отсюда слѣдуетъ далѣе, что въ линейной примѣ конопримъ, опредѣленной четырьмя данными точками, непремѣнно находится равносторонняя гипербола, и притомъ необходимо одна единственная.

Это означаетъ, что подобно тому, какъ тремя точками вполнѣ и однозначно опредѣляется сфероприма, то есть кругъ, такъ четырьмя точками вполнѣ и однозначно опредѣляется равносторонняя гипербола.

Если обозначимъ для всѣхъ геометрическихъ системъ такіе образы (то есть опредѣляемыя четырьмя элементами) тетрапримами, то можемъ сказать, что таковая есть тотъ спеціальный видъ конопримъ, который въ каждой ихъ линейной примѣ представленъ какъ одинъ единственный членъ, по существу отличающійся отъ всѣхъ остальныхъ. Поэтому онъ въ такой примѣ играетъ роль экстраэлемента. Если мы зададимся двумя такими экстраэлементами, то вся линейная прима сплошь составится изъ таковыхъ, а полная ихъ совокупность имѣетъ ступень, на 1-ую низшую, чѣмъ ступень самихъ конопримъ.

Теоремы, относящіяся до равностороннихъ гиперболъ, доказаны Штейнеромъ на основаніи теоремы Дезарга по инволюціямъ, вызываемымъ на экстрапрямой; а такъ какъ въ сферическихъ системахъ точекъ и лучей, экстраэлементовъ не имѣется, то непосредственно перенести теоремы Штейнера къ разсматриваемымъ системамъ нельзя.

Вопросъ о перенесеніи теоремъ изъ системы точекъ на плоскости къ системѣ точекъ на сферѣ, мною разсмотрѣнъ въ статьѣ „Конфокальныя совокупности“ [1]) и тамъ доказано, что непосредственно нельзя переносить теоремы, относящіяся къ метри-

1) Эти Записки IV 298.

ческимъ свойствамъ отрѣзковъ, но можно переносить теоремы, основанныя на метрическихъ свойствахъ угловъ.

Поэтому напр. можно сюда перенести теорему о существованіи въ трехугольникахъ точекъ высотъ, такъ какъ она основана исключительно на мѣрѣ угловъ (три высоты перпендикулярны къ соотвѣтственнымъ сторонамъ трехугольниковъ), что впрочемъ для системы на сферѣ давно общеизвѣстно.

Но такъ какъ именно она лежитъ въ основѣ построенія равносторонних гиперболъ, то значитъ это построеніе мы, дѣйствительно, можемъ перенести въ систему на сферѣ.

Но такъ какъ система точекъ на сферѣ родственна системѣ лучей на сферѣ, то эти же теоремы можно перенести и въ послѣднюю систему.

Если мы имѣемъ на сферѣ трехугольникъ ABC и его точку высотъ H, то въ полярной системѣ будемъ имѣть трехугольникъ *abc* и нѣкоторую сферическую прямую (меридіанъ) *h*, на которой находятся полюсы AH, BH и CH; такъ какъ AH перпендикулярна къ BC, то точка *ah* образуетъ прямой уголъ съ точкою *bc*; такимъ же образомъ найдемъ прямые углы между точками *bh* и *ac*,*ch* и *ab*.

Если по ABCH можемъ построить линейную приму тетрапримъ точекъ, проходящихъ чрезъ точки ABCH, то по *abch* можемъ построить линейную приму тетрапримъ лучей то есть къ огибаемой кривой будутъ касательны *a*, *b*, *c* и *h*.

Но обѣ тетрапримы находятся въ полярныхъ отношеніяхъ другъ къ другу, а слѣдовательно точкамъ тетрапримы точекъ будутъ полярны касательныя къ тетрапримѣ лучей, то есть собственно къ полярной тетрапримѣ.

Это и есть коноприма Шретера и ея полярная [1]).

Итакъ, тетраприма точекъ на сферѣ есть коноприма Шретера, а тетраприма лучей огибаетъ полярную коноприму Шретера.

По построенію, примѣненному по Штейнеру для равносторонних гиперболъ, мы можемъ видѣть, что оно непозиціонно [2]) и значитъ тетрапримы разныхъ геометрическихъ системъ не имѣютъ коррелятивной связи, какъ это имѣетъ мѣсто и для сферопримъ.

Въ частности, это имѣетъ мѣсто и для разсматриваемыхъ теперь тетрапримъ, которыя не имѣютъ съ равносторонними гиперболами коррелятивной связи, хотя и громадную аналогію.

Но въ родственныхъ системахъ, въ которыхъ связаны коррелятивностью даже сферопримы, переносимы всѣ построенія и теоремы вообще, коррелятивны также и тетрапримы.

Это мы и видимъ здѣсь на примѣрѣ конопримы Шретера и имъ полярныхъ.

Побочно мы получаемъ теорему: въ двухъ коррелятивныхъ линейныхъ секундахъ лучей и плоскостей конопримамъ Шретера первой системы коррелятивны полярныя конопримы Шретера во второй.

Вѣдь четырьмя произвольными лучами и четырьмя произвольными плоскостями одновременно опредѣляется и коррелятивность линейныхъ секундъ, и конопримы Шретера.

Для плоскихъ конопримъ Штейнеръ доказалъ слѣдующую теорему: центры конопримъ линейной примы конопримъ точекъ составляютъ также коноприму; ей принадлежатъ три діагональныя точки полнаго четырехугольника и шесть срединъ его сторонъ.

Для системы конопримъ на сферѣ соотвѣтствующей теоремы, сколько мнѣ извѣстно, еще не было выведено. Но если принять во вниманіе, что въ сферическихъ конопримахъ три центра [1]), образующихъ въ совокупности вершины прямого трехугольника и задача отысканія центра имѣетъ слѣдовательно всегда три вещественныя рѣшенія, то станетъ ясно, что эта задача третьяго порядка. Слѣдовательно, въ частности, сферическая кривая центровъ конопримъ есть кривая 3-го порядка и пересѣкается всякою сферическою прямою въ трехъ точкахъ, изъ которыхъ одна пара точекъ можетъ быть мнимою, а одна точка пересѣченія непремѣнно вещественна.

По основному свойству этой кривой, если по отношенію къ какой-нибудь ея точкѣ проведемъ поляру, то послѣдняя пересѣчетъ кривую въ парѣ вещественныхъ точекъ, которая вмѣстѣ съ заданною точкою составитъ прямой трехугольникъ, и значитъ касательныя кривой, полярной по отношенію къ кривой 3-го порядка, пред-

---

1) Потому что она входитъ въ составъ линейной примы конопримъ, которую можно опредѣлить двумя парами перпендикулярныхъ лучей; въ составѣ таковой всѣ есть конопримы Шретера.

2) Въ основѣ его лежитъ построеніе точки высотъ трехугольника и вообще проведеніе перпендикуляровъ, а метрическія отношенія угловъ вообще не переносимы изъ одной системы въ другую.

1) Изъ коихъ тотъ, который находится внутри конопримы, называется главнымъ.

ставляющей совокупность центровъ конопримъ линейной примы, пересѣкаютъ послѣднюю въ парахъ вещественныхъ точекъ, и эта пара вмѣстѣ съ полюсомъ касательной составляетъ вершины прямого трехугольника, то есть всѣ пересѣченія этой кривой касательными къ полярной ей кривой есть пересѣченія вещественныя, а сама полярная кривая есть кривая третьяго класса (или иначе она есть кривая третьяго порядка въ системѣ лучей на сферѣ).

Обѣ эти кривыя можно опредѣлить произвольно заданными четырьмя точками A, B, C, D.

Прежде всего ясно, что если четырехугольникъ ABCD примемъ за полный, то кривой центровъ принадлежатъ три діагональныя точки то есть точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ: вѣдь сами пары противоположныхъ сторонъ есть спеціальныя конопримы, опредѣляемыя данными четырьмя точками то есть сами входятъ *въ составъ линейной примы*, а ихъ точки пересѣченія есть центры этихъ спеціальныхъ конопримъ.

Въ составъ линіи центровъ входятъ также и среднія точки всѣхъ сторонъ полнаго четырехугольника.

Возьмемъ напр. одну изъ среднихъ точекъ стороны CD, и примемъ ее за центръ четырехугольника, двѣ вершины котораго есть точки A и B. Чрезъ четыре вершины можемъ провести линейную приму конопримъ, и всѣ эти конопримы будутъ имѣть общій центръ по закону симметріи, а потому если по теоремѣ Паскаля или при помощи двухъ проективныхъ линейныхъ примъ лучей проведемъ коноприму чрезъ пятую точку C, то она же пройдетъ и чрезъ точку D.

Такимъ образомъ мы получили уже 15 точекъ линіи центровъ, этого больше чѣмъ достаточно для опредѣленія кривой.

Если бы мы ограничились изложеннымъ, то, не смотря на неродственность и вообще глубокое различіе въ системахъ на плоскости и на сферѣ мы нашли бы поразительную аналогію, а именно:

Система на плоскости.	**Система на сферѣ.**
Гиперболы (конопримы съ двумя экстраточками).	Макроаксіальныя конопримы.
Эллипсы (конопримы безъ экстраточекъ).	Микроаксіальныя конопримы.
Параболы, какъ промежуточныя между ними.	Конопримы гармоническія какъ промежуточныя между ними въ системѣ конопримъ лучей.
Равносторонніе гиперболы какъ экстраэлементы (тетрапримы) системы конопримъ точекъ.	Конопримы Шретера какъ экстраэлементы (тетрапримы) системы конопримъ точекъ.
Параболы какъ экстраэлементы (тетрапримы) система лучей.	Полярныя конопримы Шретера какъ экстраэлементы (тетрапримы) системы конопримъ лучей.
Кругъ какъ сфероприма точекъ и лучей.	Сферопримы точекъ и лучей (конопримы вращенія).
Кругъ какъ единичная въ своемъ родѣ коноприма.	Сфероприма со сферическимъ радіусомъ $45^0$0, какъ единичная въ своемъ родѣ коноприма.

Но хотя обѣ системы и коррелятивны, но нѣтъ сомнѣнія, что система на сферѣ гораздо сложнѣе, а слѣдовательно и разнообразнѣе въ деталяхъ, чѣмъ система на плоскости. Достаточно сказать, что если со сферическою системою мы будемъ оперировать по методу геометріи древнихъ, то должны будемъ признать сферическую коноприму и даже сфероприму точекъ за пространственную кривую 4-го порядка, такъ какъ она плоскостью пересѣкается въ четырехъ точкахъ. Вотъ еще обстоятельство, которое съ высокою наглядностью указываетъ на преимущества метода новой геометріи; вѣдь, благодаря установленію коррелятивности, для большинства фундаментальныхъ теоремъ въ системѣ на сферѣ нетолько не требуется болѣе сложныхъ операцій, чѣмъ въ системѣ на плоскости, но вообще не требуется никакихъ, такъ какъ теоремы ея есть лишь перефразировка соотвѣтственныхъ теоремъ на плоскости. Это относится какъ извѣстно, ко всѣмъ позиціоннымъ построеніямъ.

Но, переходя къ деталямъ, гдѣ коррелятивность прекращается, приходится теоремы выводить отдѣльно для каждой системы, причемъ для такой сложной системы, какъ сферическая, дѣло весьма облегчено тѣмъ, что все фундаментальное выведено уже изъ коррелятивности.

Константы сферическихъ конопримъ гораздо разнообразнѣе, чѣмъ это имѣетъ мѣсто для плоскихъ. Въ сферическихъ мы имѣемъ опредѣленную величину угла между фокусами, между циклическими точками,[1]) не говоря уже объ угловыхъ величинахъ

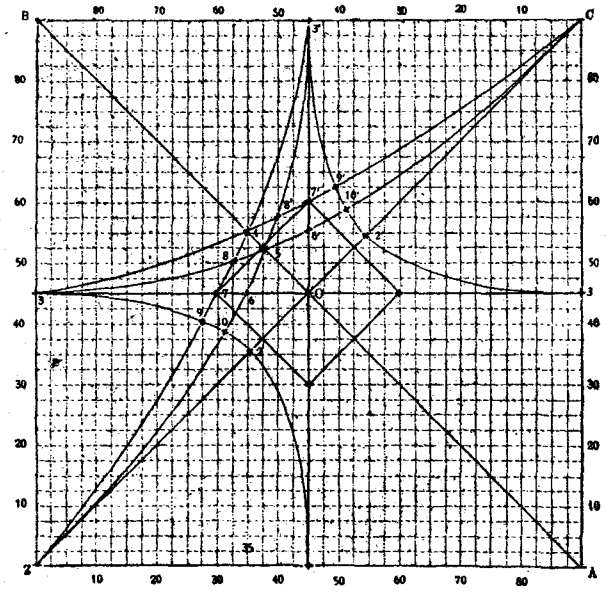
[1]) Циклическія точки соотвѣтствуютъ перпендикулярамъ къ плоскостямъ круговыхъ сѣченій конусовъ.

осей конопримъ. Значеніе прямыхъ угловъ во всѣхъ этихъ случаяхъ устанавливаетъ новый разрядъ конопримъ, чего нѣтъ на плоскости.

Вотъ теперь мы и перейдемъ къ этимъ деталямъ.

Прежде всего упомянемъ о конопримахъ Паппуса и Гашетта, которымъ не нашлось мѣста въ таблицѣ аналогій, и понятно почему? вѣдь онѣ характеризуются величиною прямого угла для одной изъ осей; такимъ константамъ нѣтъ аналогичныхъ въ системѣ на плоскости.

Мы можемъ при помощи простой діаграммы наглядно выразить отношенія разсмотрѣнныхъ конопримъ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Съ этою цѣлью мы просто примемъ двѣ прямоугольныя координаты A и B съ началомъ Z, и на каждой изъ нихъ будетъ откладывать соотвѣтственныя угловыя величины полуосей. Такъ какъ малыя полуоси не могутъ быть больше большихъ въ тѣхъ же конопримахъ, ясно, что въ изображеніи конопримъ попадетъ не вся площадь квадрата, а только его верхняя и лѣвая половина.

Сама точка Z выразитъ точечную коноприму; точка B выразитъ тоже точечную коноприму, какъ вообще всѣ точки координаты ZB выражаютъ конопримы въ видѣ пары точекъ съ угломъ, виднымъ изъ положенія точки на координатѣ. Для точки B этотъ уголъ будетъ 90^0+90^0 то есть обѣ точки сольются въ одну, тогда какъ коноприма 3 выразитъ пару точекъ, образующихъ прямой уголъ.

Прямая BC выразитъ конопримы въ видѣ двухъ лучей съ угломъ между ними, величина котораго прочитывается на діаграммѣ по положенію соотвѣтствующей точки, напр. точка 3′ выражаетъ пару перпендикулярныхъ лучей; для точки C уголъ 90^0+90^0, и слѣдовательно точка C выражаетъ двойной лучъ.

Изъ всѣхъ остальныхъ конопримъ исключительною является та, которая соотвѣтствуетъ центру O квадрата и отмѣчена цифрой 1; это главная сфероприма системы со сферическимъ радіусомъ въ 45^0.

Къ сферопримамъ относятся нетолько Z, C и O, но и всѣ точки на этой прямой; это непосредственно ясно (большая ось равна малой).

Такимъ образомъ мы отмѣтили полную совокупность конопримъ, ограничивающихъ районъ всѣхъ конопримъ. Въ этомъ районѣ каждая точка представляетъ опредѣленную коноприму; а каждая ихъ непрерывная совокупность выражается кривою, конечно, въ частности, и прямою.

Какъ разъ прямыми, изъ разсмотрѣнныхъ выше, выразятся конопримы Паппуса, представленныя отрѣзкомъ 13′, конопримы Гашетта, представленныя отрѣзкомъ 13 и гармоническія конопримы, представленныя отрѣзкомъ OB—слѣдомъ плоскости симметріи всей области конопримъ.

Упомянутый выше выводъ о симметричномъ положеніи этихъ конопримъ получаетъ такимъ образомъ чрезвычайно наглядное выраженіе, на которомъ полезно остановиться подробнѣе.

Разъ мы имѣемъ дѣйствительную плоскость симметріи въ изображеніи, не можетъ быть недоразумѣнія относительно парныхъ то есть симметричныхъ точекъ. Отсюда видимъ, что какая-бы ни была намъ дана коноприма, всегда имѣется единственная съ нею сопряженная.

Не требуетъ особыхъ поясненій, что двѣ симметричныя точки выражаютъ пару полярныхъ конопримъ.

Напр. точкѣ Z соотвѣтствуетъ точечная коноприма, а точкѣ C—лучъ то есть поляра первой точки; точкѣ 3 соотвѣтствуетъ пара точекъ а точкѣ 3′ пара лучей подъ прямымъ угломъ.

Подъ тѣмъ же угломъ точкѣ B соотвѣтствуетъ двойная точка; ея поляра есть любой проходящій чрезъ нея, лучъ, а потому она сама себѣ полярна, а слѣдовательно она принадлежитъ совокупности гармоническихъ примъ, что и представлено на чер-

тежѣ; къ той же совокупности относится и главная сфероприма 1: изъ другихъ сферопримъ той, которая представлена точкою 2 (полярная сфероприма Шретера со сферическимъ радіусомъ 35°16) полярна сфероприма Шретера со сферическимъ радіусомъ 54°44).

Вообще, ради наглядности, я всѣ пары полярныхъ конопримъ отмѣчалъ одинаковыми цифрами.

Теперь съ полною наглядностью выдѣлились и главнѣйшія районы конопримъ, о коихъ рѣчь была выше. Всѣ макроаксіальныя конопримы находятся по одну сторону прямой 13; этотъ районъ ограничивается контуромъ OCB 3; также районъ микроаксіальныхъ конопримъ очерчивается контуромъ OZB3′: оба эти района на чертежѣ имѣютъ общій квадратъ, и, слѣдовательно совокупность очерчиваемыхъ имъ точекъ выражаетъ конопримы, одновременно макро- и микроаксіальныя.

Конопримы Шретера представлены двумя симметричными кривыми. Какъ всякая такая линія служитъ ограничивающей два района съ существеннымъ различіемъ, въ какомъ-нибудь отношеніи, свойствъ, то можно задаться вопросомъ и о томъ, какіе районы очерчиваютъ эти кривыя?

Въ макроконопримахъ Шретера, какъ мы также знаемъ, можно заставить скользить прямой треугольникъ; ясно, что соотвѣственная линія ограничиваетъ съ одной стороны (большую часть области) конопримы, въ которыхъ вовсе нельзя помѣстить такихъ трехугольниковъ, а съ другой тѣ, гдѣ такіе трехугольники не скользятъ, а помѣщаются свободно; вторыя мы можемъ отнести къ крайнимъ въ районѣ макроконопримъ C. 2′. 10′. 9′. 3′.

Аналогично найдемъ, что можно свободно помѣстить внутри такого трехугольника только крайнія микроконопримы, районъ которыхъ очерчивается полярными конопримами Шретера Z. 2. 10. 9. 3.

Благодаря раздѣленію всей области или всего поля конопримъ на двѣ симметричныя половины, собственно нѣтъ и надобности останавливаться на всѣхъ разрядахъ конопримъ и представляющихъ или линій, такъ какъ мы напередъ знаемъ, что изъ свойствъ одной конопримы мы можемъ вывести свойства полярной и общему свойству конопримъ одного ряда будетъ отвѣчать общее свойствъ конопримъ полярныхъ. Поэтому и для изображенія всѣхъ отношеній конопримъ можно было бы ограничиться одною половиною чертежа.

Но по этому пути можно идти и дальше, такъ какъ тотъ же чертежъ показываетъ, что и каждая половина, въ свою очередь, раздѣляется на двѣ симметричныя половины, и такими раздѣляющими прямыми въ области макроконопримъ являются конопримы Паппуса, а въ область микроконопримъ — конопримы Гашетта.

Слѣдовательно, въ каждой изъ областей конопримы группируются попарно, и по свойствамъ одной конопримы пары, также можно вывести свойства другой конопримы, какъ это общеизвѣстно относительно паръ полярныхъ.

Но мы разсмотримъ это подробнѣе дальше, а пока посмотримъ, какіе частные разряды конопримъ вообще можно выдѣлить на основаніи характерныхъ для нихъ константъ.

Наибольшее разнообразіе связывается съ циклическими точками.

И тутъ мы натыкаемся на раздѣленіе всего поля конопримъ на двѣ части: въ однихъ циклическія точки находятся внѣ, а въ другихъ—внутри конопримъ; назовемъ ихъ соотвѣтственно эксциклическими и инфрациклическими.

Очевидно, что эти два района раздѣляются линіей, представляющей частный разрядъ конопримъ; это такъ называемыя ортогональныя конопримы, въ которыхъ циклическія точки совпадаютъ съ концами малыхъ осей.

Линія этихъ конопримъ составляетъ кривую Z. 10. 6. 5, 8′, 3′. Такъ какъ всѣ сферопримы есть конопримы инфрациклическія, то по этой линіи намъ сейчасъ же раскрывается и районъ эксциклическихъ конопримъ. Въ частности, видимъ, что къ инфрациклическимъ относятся и всѣ конопримы Паппуса, и всѣ конопримы Шретера, но конопримы Гашетта раздѣляются особою ортогональною конопримою Гашетта (№ 6) на инфра- и эксциклическія; малая полуось этой конопримы, какъ легко вычислить, имѣетъ угловую величину 35°16.

Также конопримы гармоническія раздѣляются особою гармоническою ортогональною конопримою (№ 5) на инфра и эксциклическія; угловая величина ея малой полуоси 38° 10′ 18″, а слѣдовательно большой полуоси 51° 49′ 42″.

Такъ какъ циклическія точки есть одновременно фокусы полярныхъ конопримъ, то значитъ первое опредѣленіе можно замѣнить вторымъ, то есть, что если въ конопримѣ фокусы совпадаютъ съ концами малыхъ осей полярной конопримы, то послѣдняя есть ортогональная.

Отсюда же слѣдуетъ, что полярныя ортогональныя есть тѣ, коихъ углы между фокусами дополнительны до $2d$ величинамъ большихъ осей или же, что они есть полюсы касательныхъ къ нимъ въ концахъ большихъ осей (для соотвѣтственныхъ конусовъ фокусныя оси перпендикулярны къ касательнымъ плоско-

стямъ въ лучахъ главной плоскости симметріи, подразумѣвая подъ главными тѣ, въ коихъ находятся обѣ фокусныя оси). Въ гармонической ортогональной конопримѣ нетолько циклическія точки совпадаютъ съ концами ея малыхъ осей, но и фокусы совпадаютъ съ концами малыхъ полуосей конопримы.

Ясно, что инволюція лучей въ циклическихъ точкахъ для эксциклическихъ конопримъ есть инволюція гиперболическая, а для инфра-циклическихъ есть инволюція эллиптическая; въ промежуточныхъ же, ортогональныхъ, конопримахъ это инволюція параболическая.

Это раздѣленіе напоминаетъ раздѣленіе плоскихъ конопримъ на гиперболы, эллипсы и параболы по инволюціи лучей въ центрахъ конопримъ.

Но здѣсь, какъ видимъ, такое раздѣленіе раздваивается, и если мы приняли раздѣленіе поля конопримъ на эксцисклическія и инфрациклическія, то должны принять и симметричное раздѣленіе на эксфокальныя и инфрафокальныя.

Къ первымъ относятся тѣ, въ которыхъ фокусы съ одной изъ вершинъ (то есть концовъ главной оси) дѣлаютъ уголъ больше прямого, а ко вторымъ тѣ, для которыхъ фокусы съ обѣими вершинами дѣлаютъ уголъ меньше прямого.

Изъ гармоническихъ конопримъ эксциклическія будутъ одновременно и эксфокальными; изъ конопримъ Паппуса эксфокальными будутъ тѣ, коихъ большая полуось измѣряется угломъ, большимъ, чѣмъ $54^0 44$ (эта же назовется полярноортогональною конопримою Паппуса (№ 6′). Наконецъ эксфокальными будетъ и часть конопримъ Шретера; обѣ части раздѣляются полярноортогональною конопримою Шретера (№ 10′).

Но если инволюція лучей въ циклическихъ точкахъ можетъ быть гиперболическою или эллиптическою, то представляется, что можно допустить, какъ частные случаи, что углы между двойными лучами, вещественными или мнимыми, есть прямые.

Однако оба допущенія не даютъ новыхъ разрядовъ. Второе потому, что тогда циклическая точка одновременно была бы и фокусомъ, а это означало бы сферопримы; конопримы этого разряда есть для поля конопримъ пограничныя, и не даютъ его раздѣленія.

Первое же допущеніе даетъ пару ортогональныхъ точекъ, полярною конопримою которой является пара ортогональныхъ лучей, и центръ послѣднихъ есть двойная циклическая точка первой; касательные лучи дѣйствительно дѣлаютъ прямые углы, такъ какъ они совпадаютъ съ лучами полярной конопримы.

Итакъ, это допущеніе даетъ извѣстную коноприму 3 какъ эксциклическую и полярную коноприму 3′ какъ эксфокальную.

Наконецъ мы можемъ произвольно задаваться угломъ между циклическими точками, и, въ частности, придать ему значенія 0 или $\pi/_2$.

Первое допущеніе опять-таки даетъ сферопримы.

Второму же соотвѣтствуетъ рядъ конопримъ, представленный въ видѣ кривой Z . 9, 7, 8, 4, 3′. Назовемъ эти конопримы ортоциклическими. По существу онѣ разграничиваютъ поле конопримъ на двѣ части, которыя мы также можемъ обозначить какъ эксортоциклическія, если этотъ уголъ между циклическими точками больше прямого и инфраортоциклическія, если этотъ уголъ меньше прямого.

Такъ какъ сферопримы имѣютъ величину этого угла, равную нулю, то изъ діаграммы видно, какой районъ соотвѣтствуетъ первымъ, и какой вторымъ.

Если уголъ между циклическими точками прямой, то, такъ какъ точки эти есть одновременно фокусы полярныхъ конопримъ, выйдетъ, что симметричное раздѣленіе поля конопримъ будетъ соотвѣтственно на инфраортофокальныя, къ которымъ относятся сферопримы и эксортофокальныя; пограничная линія C . 9′. 7′. 8′. 4. 3 выражаетъ ортофокальныя конопримы то есть тѣ, въ коихъ уголъ между фокусами прямой.

По отношенію къ этимъ конопримамъ большое значеніе имѣетъ слѣдующая теорема: если въ главныхъ вершинахъ ортофокальной конопримы проведемъ двѣ касательныя, то мы можемъ на нихъ такъ (симметрично) упереть двѣ вершины прямого трехугольника CDD_1 (фиг. 2), чтобы его вершина C совпала съ одною изъ циклическихъ точекъ [1]).

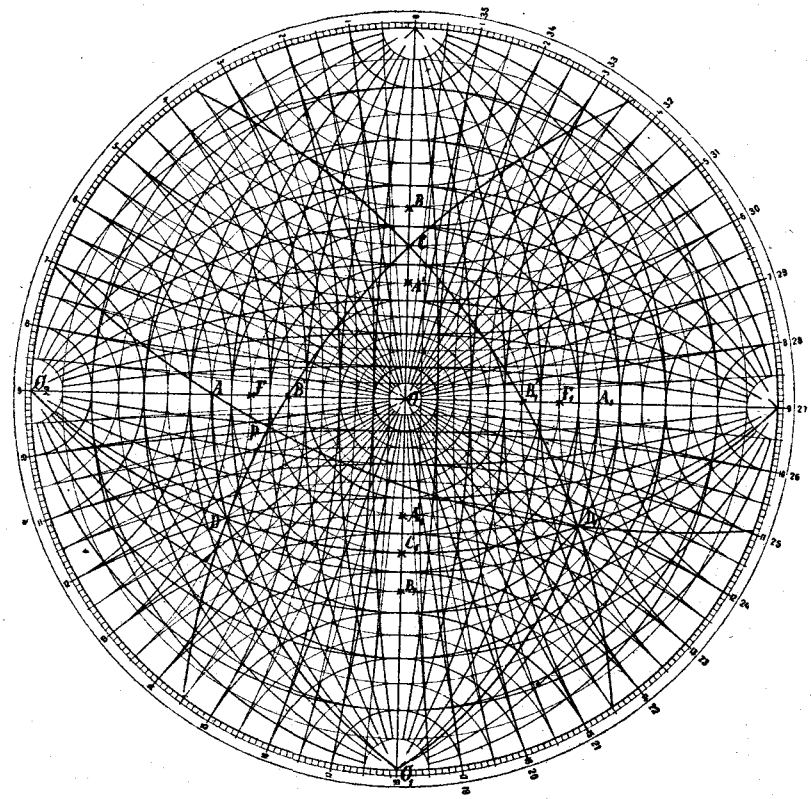
---

[1]) Пусть F, F_1 фокусы A, A_1 главныя вершины, B, B_1 вершины малой оси, C, C_1 циклическія точки, ортофокальной конопримы; въ полярной конопримѣ главныя вершины A′ и A_1', вершины малыхъ осей B′ и B_1'; наконецъ пусть O главный, а O_1 и O_2 два добавочные центра конопримы (фиг. 2).

Пусть для опредѣленія конопримы даны только вершины A и A_1. Если бы была найдена циклическая точка C, то на ея полярѣ двѣ точки D и D_1 (подъ угломъ 45° къ центру O_2) были бы одною изъ сопряженныхъ паръ точекъ въ изотропной инволюціи, а трехугольникъ CDD_1 былъ бы прямой. Такъ какъ D_1 есть полюсъ дуги CD, то всякая дуга D_1A къ ней перпендикулярна.

Если коноприма ортофокальна, то дуга DC пройдетъ чрезъ вершину B′, потому что въ этомъ случаѣ AF=FB′ (пара AB′ гармонически раздѣляетъ прямой уголъ FF_1).

Благодаря этой теоремѣ, мы сразу же по даннымъ главнымъ вершинамъ находимъ циклическія точки. Для этого (фиг. 2) изъ A проводимъ касательную дугу AD до пересѣченія съ главною сферопримою, имѣющею центръ O_2, въ точкѣ D; тогда O_2D есть поляра циклической точки C. На приведенной діаграммѣ взята замѣчательная коноприма №4 то есть гармоническая коноприма, одновременно ортофокальная и ортоциклическая.



Фиг. 2.

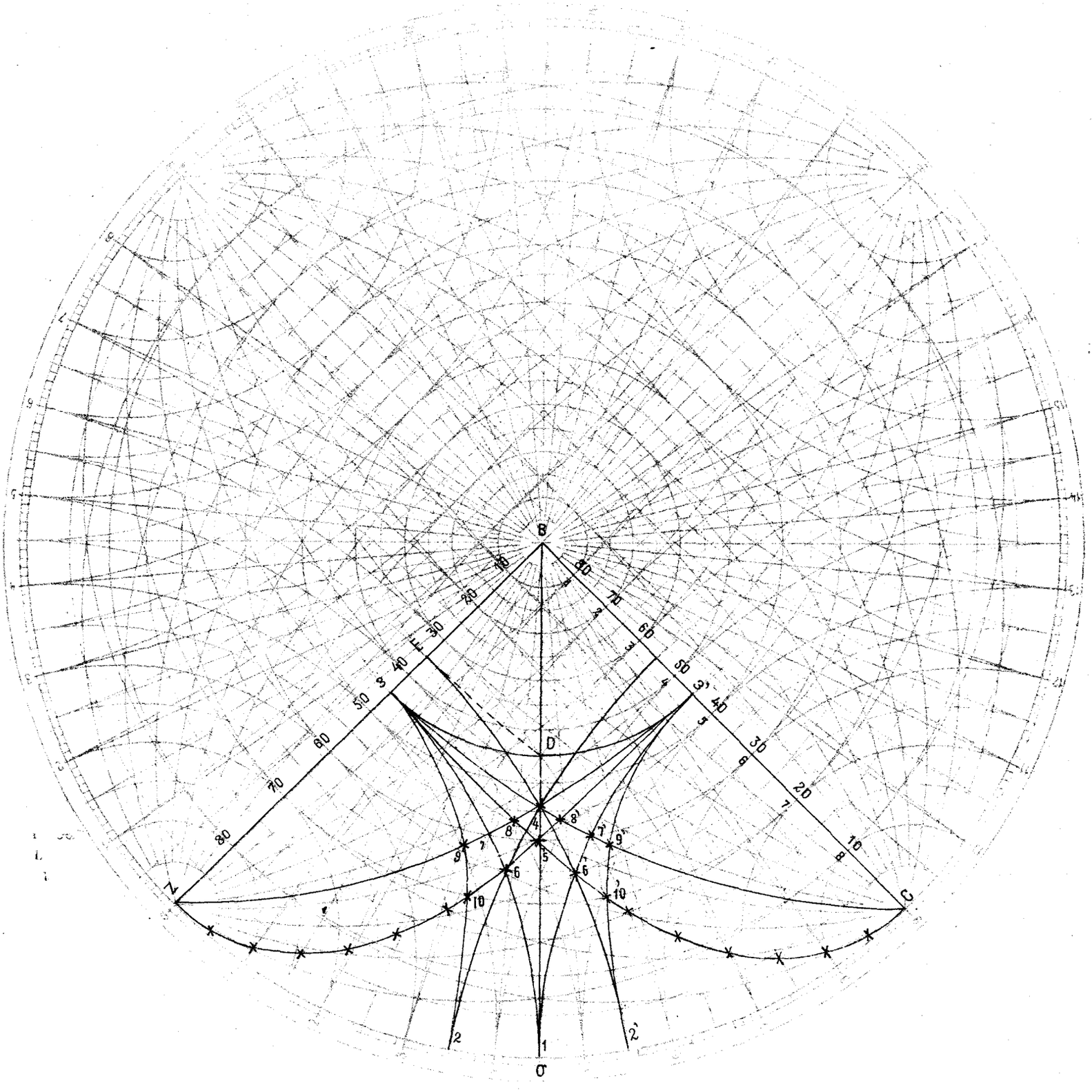
Вышеизложеннымъ мы исчерпали частные случаи, которые можно получить на основаніи изслѣдованія циклическихъ точекъ. Но вмѣстѣ съ тѣмъ, мы исчерпали и частные случаи, выводимые изъ другихъ константъ, а именно: 1) принимая углы между фокусами за нуль (сферопримы) и за 90° (ортофокальныя конопримы), 2) принимая значенія угловъ между вершинами также на нуль и 90°, 3) придавая такое положеніе директриссѣ чтобы изъ ея точекъ пары касательныхъ были прямоугольны (конопримы Гашетта) (Ср. эти Записки IV 323).

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы получили немалое число отдѣльныхъ конопримъ, которыя мы отмѣтили на діаграммѣ цифрами, и каждую изъ нихъ можемъ назвать особо, напр. конопримы 9 и 10 есть ортоциклическая и ортогональная полярныя конопримы Шретера, а 9′ и 10′ есть ортофокальная и полярноортогональная конопримы Шретера.

Эти отдѣльныя конопримы служатъ различительными уже не для двухъ, а для большаго числа районовъ, смотря по числу линій, которыя въ нихъ пересѣкаются; напр. коноприма № 9 раздѣляетъ 1)

и слѣдовательно двѣ дуги PA и PB′, пересѣкающіяся прямоугольно въ точкѣ P, будутъ сопряженными; по симметріи видно, что чрезъ B_1' пройдетъ дуга CD_1.

Касательная къ конопримѣ въ вершинѣ A имѣетъ своимъ полюсомъ точку B_1', а потому всѣ дуги, проходящія чрезъ B_1', будутъ имѣть своими полюсами точки на этой касательной, въ томъ числѣ и дуга $CB_1'D_1$, что и требовалось доказать.



Издание проф. Е. С. Федорова

крайнія микроконопримы отъ остальныхъ и 2) эксортоциклическія отъ инфраортоциклическихъ.

Какой бы ни былъ намъ данъ конусъ, а слѣдовательно и коноприма, но если только мы знаемъ величины осей послѣдней, то по діаграммѣ сейчасъ найдемъ принадлежащее ей мѣсто и опредѣлимъ тѣ районы, къ которымъ она относится, а тѣмъ болѣе частный разрядъ, если она къ таковому относится.

Этимъ задача, поставленная въ заглавіи, какъ бы исчерпывается; но мнѣ хотѣлось бы отмѣтить, что значеніе составленной діаграммы гораздо большее, чѣмъ то, которое удѣляется ей, какъ опредѣлителю конопримъ.

Мы уже упомянули выше, что конопримы Паппуса и Гашетта служатъ важными раздѣляющими рядами, а именно соотвѣтствующія имъ линіи играютъ роль плоскостей симметріи для каждаго изъ районовъ макро- и микроконопримъ въ отдѣльности.

Благодаря этому, въ каждомъ изъ этихъ районовъ мы можемъ сочетать конопримы въ пары, и изъ свойствъ одной изъ нихъ дѣлать заключенія о свойствахъ другой.

Возьмемъ слѣдующій примѣръ.

Хотя кривыя, представляющія съ одной стороны конопримы Шретера, а съ другой ортоциклическія и различны по существу, какъ видно изъ чертежа, но онѣ весьма приближаются къ симметричности, а потому можно сказать, что должно быть приближенно вѣрно: если возьмемъ коноприму, въ которой можно вписать прямой трехугольникъ и замѣнимъ величину ея большой полуоси на противоположную (дополненіе до прямого угла), то приближенно получится коноприма съ прямымъ угломъ между циклическими точками.

Математически точно это имѣетъ мѣсто для общей точки $3'$ и для пары $2'$ и 4.

Послѣднее можно доказать тѣмъ, что если въ ортоциклической конопримѣ проведемъ чрезъ прямой трехугольникъ CDD_1 (фиг. 2) сфероприму и повернемъ ее около центра O_2 на уголъ $CB=C_1A_1'$, такъ чтобы точка C пришла въ положеніе точки B и вмѣстѣ съ тѣмъ стала бы вершиной, то получили бы сфероприму съ діаметромъ $54^0 44$ то есть сфероприму Шретера.

Но чрезвычайно важный выводъ, вытекающій при простомъ взглядѣ на діаграмму, это выводъ объ исключительномъ положеніи конопримъ гармоническихъ.

На плоскости различаемъ двѣ системы: систему точекъ и систему лучей; для первой тетраприма есть равносторонняя гипербола, для второй парабола. Отсюда видимъ, что на плоскости не существуетъ симметріи по отношенію къ конопримамъ точекъ и конопримамъ лучей.

Здѣсь же, самое полное изображеніе конопримъ указываетъ на симметрію тѣхъ и другихъ конопримъ, и потому вообще общими могутъ быть только тѣ, которыя представлены на слѣду плоскости симметріи.

Если возьмемъ двѣ конопримы съ одною общею осью, то въ нихъ четырехугольникъ пересѣченія сводится къ концамъ общей оси, и потому эти точки станутъ двойными, а всѣ остальныя конопримы, которыя имѣютъ тѣ же общія оси, составятъ линейную приму конопримъ точекъ. И вотъ наша діаграмма показываетъ, что всѣ такія линейныя примы, очевидно представленныя прямыми линіями, параллельными осямъ координатъ, необходимо пересѣкаютъ приму гармоническихъ, и притомъ непремѣнно въ одной единичной.

Это конопримы изоаксіальныя.

Но не только такія, но и всякія линейныя примы конопримъ вообще заключаютъ въ себѣ одну, и только одну тетраприму, то есть коноприму, вполнѣ и однозначно опредѣляемую четырьмя точками. Какъ доказалъ Штейнеръ для точекъ на плоскости, такою тетрапримою является равносторонняя гипербола: если взять любыя три изъ четырехъ данныхъ точекъ и по опредѣляемому ими трехугольнику построить его точку высотъ, то всякая такая точка также принадлежитъ равносторонней гиперболѣ, опредѣляемой четырьмя данными. А такъ какъ для этого изъ вершинъ трехугольника нужно провести перпендикуляры изъ его вершины, а такія угловыя построенія переносятся и въ систему на сферѣ, то аналогичнымъ построеніемъ получимъ тетраприму и въ этомъ случаѣ. Но это есть уже не гипербола, а коноприма Шретера, въ которую можно вписать и прямой сферическій трехугольникъ.

Итакъ, 1) каждая коноприма, проходящая чрезъ вершины любого даннаго трехугольника и его точку высотъ, есть коноприма Шретера, 2) если даны четыре точки, то стоитъ провести коноприму чрезъ нихъ и точку высотъ одного изъ опредѣляемыхъ ими четырехъ трехугольниковъ коноприму, она пройдетъ и чрезъ точки высотъ трехъ остальныхъ трехугольниковъ, 3) въ каждой линейной примѣ конопримъ, опредѣляемой четырьмя точками, имѣется

одна, и только одна тетраприма, а именно коноприма Шретера [1]).

Само собою понятно, что въ полярныхъ линейныхъ примахъ, опредѣляемыхъ четырьмя лучами на сферѣ, такою единственною тетрапримою будетъ полярная коноприма Шретера, около которой можно описать прямой сферическій трехугольникъ.

Въ томъ частномъ случаѣ, когда четыре данныя точки (или луча), напередъ удовлетворяютъ поставленному условію (то есть одна изъ точекъ есть точка высотъ въ трехугольникѣ, образуемыхъ тремя другими точками) всѣ конопримы линейной примы есть конопримы Шретера.

Но конечно линейныя примы, какъ и было упомянуто, могутъ составлять совокупности, изображаемыя на чертежѣ нетолько прямыми линіями, но и кривыми 3-го порядка, потому что три пары лучей — спеціальныя конопримы линейной примы,— изображаются точками на прямой.

Кромѣ конопримъ Шретера хорошо извѣстны изофокальныя [2]) линейныя примы конопримъ лучей и изоциклическія линейныя примы конопримъ точекъ. Представителями двухъ этихъ разрядовъ являются изображенныя на чертежѣ линіи ортофокальныхъ и ортоциклическихъ конопримъ. Къ конфокальнымъ, какъ крайнія разности можно отнести сферопримы и пары точекъ, какъ центровъ линейныхъ примъ лучей, а къ конциклическимъ также сферопримы и пары лучей какъ линейныхъ примъ точекъ.

Районъ первыхъ раздѣляется на двѣ равноправныя части конопримами ортофокальными, а районъ вторыхъ —конопримами ортоциклическими; всѣ три линіи, ихъ изображающія, исходятъ изъ одной точки, а именно точки C для конфокальныхъ и точки Z для конциклическихъ. Изъ тѣхъ же точекъ выйдутъ и кривыя, изображающія всѣ конфокальныя или всѣ конциклическія совокупности конопримъ. Изобразивъ ихъ на чертежѣ, мы получили бы исходящій изъ этихъ точекъ непрерывный рядъ кривыхъ, и ни одна изъ нихъ, кромѣ исходной, не имѣла бы съ другими кривыми ряда ни одной общей точки.

Но такъ какъ и конфокальныя, и конциклическія совокупности характеризуются постоянными углами (для конфокальныхъ между фокусами, для конциклическихъ между циклическими точками), то было бы гораздо цѣлесообразнѣе отъ прямолинейныхъ координатъ на плоскости перейти къ изображенію въ стереографической проекціи.

Сдѣлавъ это, получимъ изображеніе фигуры 3-ей. Всѣ соотвѣтственныя точки обоихъ изображеній отмѣчены однѣми и тѣми же буквами и цифрами, но разница въ изображеніяхъ получается громадная, подтверждающая ожидаемую цѣлесообразность въ перемѣнѣ изображенія.

Прежде всего бросается въ глаза, что исчезла вся лишняя часть изображенія, представленная на фиг. 1, трехугольникомъ ZAC, хотя координаты тѣхъ же величинъ остались въ обоихъ изображеніяхъ.

Но, какъ увидимъ при нѣкоторомъ углубленіи въ сущность перемѣны, теперь получилась такая система координатъ, что вообще по двумъ произвольнымъ значеніямъ той и другой координаты точки получить нельзя, но сохраняются именно лишь тѣ значенія координатъ, которыя нужны для этого изображенія.

Оба ряда координатъ теперь представлены концентрическими сферопримами съ центрами Z и C, но порядокъ отсчета для нихъ противоположный.

Второе громадное различіе въ томъ, что теперь именно изофокальныя и изоциклическія совокупности представлены не сложными кривыми, а дугами большого круга (линейными примами точекъ), а черезъ это сразу отпадаетъ сомнѣніе въ томъ, что такія совокупности могутъ быть линейными.

При этомъ способѣ изображенія кривыми не выше 2-го порядка даютъ совокупности, которыя могутъ быть линейными примами конопримъ; такія кривыя то есть сами же конопримы вполнѣ и однозначно предѣляются двумя парами вершинъ; поэтому, если имѣемъ, при опредѣленномъ положеніи центра, вершины конопримъ, то ими опредѣлены всѣ ея точки, и тогда они именно изображаютъ линейную приму.

---

[1]) Отмѣчу въ параллель аналогичныя теоремы для системы точекъ на плоскости, доказанныя Штейнеромъ: 1) каждая коноприма, проходящая чрезъ вершины любого даннаго трехугольника и его точку высотъ, есть равносторонняя гипербола, 2) если даны четыре точки, то стоитъ провести коноприму чрезъ нихъ и точку высотъ одного изъ опредѣляемыхъ ими трехугольниковъ равностороннюю гиперболу, она пройдетъ и чрезъ точки высотъ трехъ остальныхъ, опредѣляемыхъ ими, трехугольниковъ, 3) въ каждой линейной примѣ конопримъ, опредѣляемой четырьмя точками, имѣется одна, и только одна равносторонняя гипербола.

Теоремы Штейнера, ради аналогіи въ выраженіяхъ, я передаю своими словами.

[2]) Собственно конфокальными называются такія совокупности конопримъ, у которыхъ общіе фокусы; понятно, что у всѣхъ уголъ между фокусами имѣютъ одну и ту же величину; отсюда видимъ, что составъ изофокальныхъ конопримъ тотъ же, что и конфокальныхъ, и понятно, составъ изоциклическихъ тотъ же, что и конциклическихъ, подъ которыми подразумѣваются конопримы, имѣющія общія циклическія точки.

Теперь видимъ что всѣ выводы, которые были сдѣланы изъ предыдущей діаграммы, сохраняютъ свою силу и для этой; но теперь ясно, что кривыя изображающія конопримы, также какъ и полярныя конопримы Шретера, есть именно конопримы, имѣющія центрами точки C и Z, а вершинами 2′ и 3′ для первой, 2 и 3 для второй.

Но наиболѣе замѣчательный результатъ примѣненія новой системы изображеній тотъ, что теперь и систему линій, изображающихъ съ одной стороны изофокальныя, и съ другой изоциклическія совокупности, можно принять за вторую систему координатъ. Имѣя же для каждой точки двѣ системы координатъ, мы можемъ по величинамъ координатъ одной системы изъ чертежа прямо получить величины координатъ другой системы то есть по даннымъ величинамъ осей конопримъ опредѣлить углы между фокусами и циклическими точками, и обратно, по двумъ послѣднимъ угламъ опредѣлить величины осей соотвѣтствующихъ конопримъ и даже, говоря общнѣе, по двумъ изъ этихъ данныхъ непосредственно изъ чертежа получить двѣ другія [1]).

Эти результаты получаются потому, что въ каждой фигуративной точкѣ двѣ линіи, одна, изображающая непрерывный рядъ изофокальныхъ (или изоциклическихъ) конопримъ, а другая, изображающая непрерывный рядъ конопримъ съ общею малою (соотвѣтственно большою) осью, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ.

Слѣдовательно, для того, чтобы доказать, что діаграмма дѣйствительно достигаетъ этого результата, достаточно доказать подчеркнутую теорему.

Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ:

Будемъ изображать конопримы такъ, чтобы дуга круга, на которой находятся фокусы и одинъ изъ фокусовъ A конопримъ на этой дугѣ были на чертежѣ неизмѣнными; по этимъ условіямъ каждой заданной конопримѣ будетъ соотвѣтствовать одно единственное положеніе B конца малой оси, такъ что положеніе этой точки на чертежѣ станетъ опредѣляющимъ всю коноприму, то есть точка сдѣлается фигуративною точкою соотвѣтственныхъ конопримъ.

Теперь представимъ себѣ, что изображена нѣкоторая коноприма съ опредѣленнымъ угломъ между фокусами. Подвергнемъ ее безконечно малымъ измѣненіямъ въ двухъ различныхъ направленіяхъ: 1) сохраняя величину малой оси, будемъ измѣнять уголъ между фокусами; при этомъ точка B движется по координатѣ, соотвѣтствующей одному изъ значеній угла этой оси: если бы въ первоначально изображенной конопримѣ совмѣстили ея центръ съ центромъ круга проекціи, а главную ось съ однимъ изъ двухъ главныхъ діаметровъ этой проекціи, то точка B двигалась бы по малому кругу, перпендикулярному къ второму главному діаметру; 2) теперь сохранимъ величину угла между фокусами, а слѣдовательно и положеніе ихъ средней точки (центра), и будемъ непрерывно измѣнять величину малой оси; такъ какъ при этомъ не измѣняется величина большой оси, то точка B движется по второму діаметру, что точно соотвѣтствуетъ смыслу теоремы.

На діаграммѣ для примѣра проведены координаты 35°16 и 54°44 конопримы № 4, чтобы нагляднѣе представить порядокъ отсчета этихъ координатъ.

Полная стереографическая сѣтка, кромѣ разсмотрѣнныхъ уже двухъ паръ сферическихъ координатъ, даетъ еще третью пару. Возьмемъ напр. въ изображеніи на діаграммѣ точку D. Изъ діаграммы видимъ, что этой конопримѣ соотвѣтствуютъ величины полуосей 60° и 30°, уголъ между фокальными точками $2 \times 54°44$, и такой же уголъ между циклическими точками, потому что взятая коноприма гармоническая. Предыдущія координаты относятся къ центрамъ *Z* и C; но изъ центра B мы имѣемъ для той же конопримы координаты 45° и 45°. Что выражаютъ эти послѣднія?

Чтобы понять это, представимъ себѣ, что одинъ изъ фокусовъ этой конопримы помѣщенъ въ точкѣ Z, а сама точка D выражаетъ положеніе малой оси. Тогда уголъ ZD выразитъ величину ея большой полуоси, а уголъ ED величину малой полуоси, принимая, что точка E есть центръ этой конопримы. Въ такомъ случаѣ точка B есть та, которая находится на главной оси конопримы и образуетъ съ фокусомъ Z прямой уголъ [1]).

Этимъ поставленная задача и разрѣшена, такъ какъ такимъ образомъ мы выяснили значеніе третьей пары координатъ, что сводится къ выясненію значенія точки B въ конопримѣ.

Если назовемъ точку B противофокусною

---

[1]) *Любопытно, что четверть столѣтія тому назадъ* предложенныя и теперь получившія обширное примѣненіе стереографическія сѣтки сами по себѣ представляютъ діаграммы для рѣшенія общей задачи, о которой здѣсь идетъ рѣчь, а вмѣстѣ съ тѣмъ являются полными діаграммами для конусовъ (слѣдовательно и сферическихъ конопримъ).

[1]) Но если въ точкѣ Z находится фокусъ, ZB есть главная ось, а на меридіанѣ данной точки изъ C находится центръ конопримы, то ясно, что уголъ между этимъ меридіаномъ и CZ выражаетъ половинный уголъ между фокусами.

точкою, или антифокусомъ, то эти третьи координаты выражаютъ 1) уголъ между вершиною малой оси D и противофокусною точкою, и 2) уголъ въ противофокусной точкѣ между главною осью конопримы и дугою большого круга BD, проходящею чрезъ конецъ малой оси. Если замѣнимъ послѣдній уголъ дополнительнымъ до прямого, то получимъ третьи координаты конопримы, полярной по отношенію къ данной; въ данномъ случаѣ координаты обѣихъ конопримъ общія, такъ какъ коноприма гармоническая.

Такимъ образомъ мы можемъ вывести новые разряды конопримъ.

Если мы возьмемъ совокупность конопримъ съ угломъ между концомъ малой оси и противофокусною точкою, равнымъ $\pi/4$, то получимъ ея изображеніе въ видѣ сферопримы $3D3'$, которое показываетъ 1) что изъ такихъ конопримъ можно составить линейную приму, а 2) что эта совокупность аналогична конопримамъ Паппуса и Гашетта и какъ бы заполняетъ изображающія ихъ сферопримы.

Совокупность гармоническихъ конопримъ можетъ быть охарактеризована также постояннымъ угломъ между главною осью и дугою круга BD, равнымъ $\pi/4$.

Вообще всѣ конопримы съ постоянною послѣднею координатою выражаются на діаграммѣ радіусами круга проекціи и представляютъ аналогію съ тѣми конопримами которыя характеризуются постояннымъ угломъ между фокусными и между циклическими точками.

Согласно всему изложенному, сферопримы есть тѣ конопримы, для которыхъ уголъ между концомъ малой полуоси и противофокусною точкою есть уголъ прямой. Но такъ какъ именно для этихъ кривыхъ понятіе о малой и большой осяхъ становится неопредѣленнымъ, то, чтобы этотъ выводъ былъ правильнымъ, нужно помнить, что антифокусъ находится именно на главной, то есть большой оси.

Назовемъ всѣ конопримы, фигуративныя точки которыхъ составляютъ сфероприму съ центромъ B антифокальными, и спеціально тѣ, которыя находятся на сферопримѣ $3D3'$, главными антифокальными.

Тогда можемъ сказать, что всякой антифокальной конопримѣ полярна также антифокальная, то есть въ обѣихъ уголъ между концомъ малой оси и антифокусомъ одинъ и тотъ же; углы же между дугами при антифокусѣ дополнительны до прямого. Спеціально для главныхъ антифокальныхъ конопримъ первый уголъ есть $\pi/4$.

Отсюда видимъ, что если вершину малой оси примемъ за центръ главной сферопримы, то послѣдняя пройдетъ чрезъ антифокусы и вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ касаться къ полярамъ антифокусовъ, а этимъ опредѣляется и положеніе ея фокусовъ, а слѣдовательно и всѣхъ ея элементовъ; въ самомъ дѣлѣ, поляры антифокусовъ проходятъ чрезъ фокусы и чрезъ третій центръ конопримы (считая первыми двумя тѣ, которыя находятся на главной оси). Гармоническая главная антифокальная коноприма, представленная на діаграммѣ точкою D, имѣетъ своими элементами тѣ замѣчательные углы, которые мы особенно часто встрѣчаемъ при характеристикѣ важнѣйшихъ конопримъ, а именно: большая ось 60°0, малая ось 30°0, фокусный уголъ 54°44 циклическій уголъ конечно тотъ же; наконецъ обѣ послѣднія координаты (относящіяся къ антифокусамъ) 45°0.

Заканчивая на этомъ изложеніе теоріи сферическихъ конопримъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, родственной имъ системы конусовъ, мы, видя большую близость этихъ квадратичныхъ примъ въ предѣлахъ линейной секунды, зная большое число теоремъ, общихъ для системы точекъ на плоскости и на сферѣ, вмѣстѣ съ тѣмъ не можемъ не быть поражены тѣмъ значительнымъ разнообразіемъ въ деталяхъ, которое характеризуетъ вторую систему.

Но въ существенныхъ чертахъ аналогія полная.

Сдѣлаемъ сопоставленіе важнѣйшихъ ихъ подраздѣленій. Такъ какъ всѣ вообще конопримы точекъ опредѣляются 5-ю точками, то меньшимъ числомъ точекъ опредѣляются особо важныя ихъ типы, а именно:

Четырьмя точками опредѣляются

(Тетрапримы)

На плоскости	На сферѣ
Равностороннія гиперболы	Конопримы Шретера

Тремя точками опредѣляются (сферопримы).

Круги обыкновенные и спеціальные. Сферопримы обыкн. и спеціальныя.

Двумя точками опредѣляются

Прямыя (спец. двойныя точки). Дуги большого круга (спец. двойныя точки)

Одною точкою опредѣляются

Точки	Точки

Особенный же интересъ представляютъ конопримы Шретера, такъ какъ онѣ являются тетропримами нетолько въ секундѣ точекъ на сферѣ, но и въ терціи точекъ пространства: такъ какъ четырьмя произвольно взятыми точками пространства коноприма Шретера опредѣляется вполнѣ и однозначно, если предварительно по этимъ четыремъ точкамъ построимъ шаръ.

Въ заключеніе упомяну, что эту діаграмму слѣдуетъ разсматривать вдвойнѣ, такъ какъ кромѣ вещественныхъ имѣются такія же мнимыя конопримы, но въ этой системѣ вещественныя и мнимыя конопримы не отличаются по начертанію, а только въ отношеніи построенія ихъ полюсовъ и поляръ. Насколько это замѣчаніе существенно, видно изъ того, что вся система построена на полярныхъ отношеніяхъ паръ конопримъ; одна же коноприма пары выводится изъ другой именно при посредствѣ мнимой, а не вещественной главной сферопримы.