32. Нѣкоторыя элементарно-геометрическія теоремы и задачи, находящіяся въ связи съ совокупностями мнимыхъ круговъ и шаровъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 4 сентября).

Мнимымъ кругамъ въ рѣшеніи геометрическихъ и кристаллографическихъ задачъ принадлежитъ весьма важная роль. Достаточно сказать, что отношеніе линейной и гномонической проекцій проще всего выражается коррелятивностью по отношенію къ мнимому кругу то есть, что линейная проекція (плоскости) есть поляра точки, составляющей гномоническую, и наоборотъ гномоническая проекція (ребра) есть поляра точки, составляющей линейную проекцію.

Еще большее значеніе принадлежитъ главному мнимому кругу (то есть кругу со сферическимъ діаметромъ $\pi/_2$) на сферѣ, такъ какъ полярность всѣхъ сферическихъ геометрическихъ образовъ есть коррелятивность по отношенію къ этому кругу.

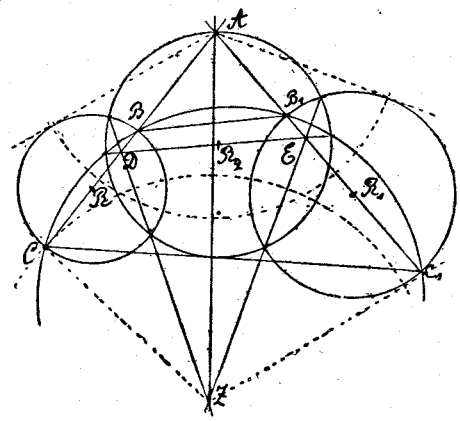
Огромную роль играютъ и мнимые шары.

Но при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ нѣкоторымъ простѣйшимъ совокупностямъ мнимыхъ круговъ и шаровъ, какъ задачъ элементарно-геометрическаго характера, возникаютъ затрудненія, которыя легко устраняются именно, благодаря простымъ свойствамъ этихъ совокупностей.

При рѣшеніи задачъ, относящихся къ мнимымъ кругамъ, большое значеніе имѣетъ слѣдующая теорема:

Если изъ любой точки радикальной оси двухъ данныхъ круговъ проведемъ двѣ сѣкущія въ обоихъ кругахъ, то обѣ пары полученныхъ концовъ хордъ находятся на одномъ кругѣ.

Пусть даны два круга R и R_1 и пусть AZ ихъ радикальная ось. По свойству таковой имѣемъ для каждой точки A, если проведемъ изъ нея сѣкущія AC и AC_1, $AB.AC = AB_1.AC_1$ то есть $AB:AB_1 = AC_1 : AC$. Отсюда заключаемъ о подобіи треугольниковъ ABB_1 и AC_1C, а вмѣстѣ съ тѣмъ и о равенствѣ угловъ ABB_1 съ AC_1C и AB_1B съ ACC_1, и значитъ противоположные внутреніе углы четырехугольника BCC_1B_1 дополнительны другъ другу до π то есть четырехугольникъ вписанъ въ кругѣ.



Въ частности, это справедливо и для діаметральныхъ сѣкущихъ то есть, если проведемъ кругъ чрезъ два діаметра круговъ R и R_1, то эти діаметры пересѣкутся въ нѣкоторой точкѣ A на радикальной оси обоихъ круговъ. Двѣ хорды этого круга BC и B_1C_1 будутъ діаметрами двухъ данныхъ круговъ.

Въ линейныхъ совокупностяхъ круговъ тѣ изъ нихъ, коихъ діаметры есть хорды вещественнаго ортогональнаго круга, есть мнимые круги линейной совокупности, и обратно, кругъ, проходящій чрезъ

концы діаметровъ круговъ, есть ихъ мнимый ортогональный кругъ.

При воспроизведеніи сферопримы круговъ по тремъ мнимымъ кругамъ, нужно найти ихъ ортогональный кругъ то есть кругъ, проходящій чрезъ концы ихъ діаметровъ.

Такой ортогональный кругъ мы видимъ проведеннымъ на чертежѣ по отношенію къ тремъ кругамъ R, R_1 и R_2. Уяснимъ себѣ смыслъ этой задачи, какъ элементарно-геометрической.

Допустимъ, что задача рѣшена и, такой кругъ проведенъ; пусть BC, B_1C_1 и DE есть тѣ три діаметра, чрезъ которые проходитъ искомый кругъ. Въ такомъ случаѣ каждые изъ двухъ такихъ діаметровъ пересѣкаются въ точкахъ на соотвѣтственныхъ радикальныхъ осяхъ: BC съ B_1C_1 пересѣкаются въ точкѣ A на радикальной оси AZ, гдѣ Z пусть изображаетъ радикальный центръ, BC съ DE пересѣкаются въ точкѣ D на радикальной оси DZ, и B_1C_1 съ DE пересѣкаются въ точкѣ E на радикальной оси EZ.

Итакъ, задача приводится къ построенію такого трехугольника ADE, коего вершины находятся на радикальныхъ осяхъ двухъ круговъ, а противоположныя стороны есть діаметры третьяго изъ круговъ.

Въ рѣшеніи этой задачи, какъ элементарно-геометрической, мы не можемъ не усмотрѣть значительнаго затрудненія.

Тѣмъ не менѣе она рѣшается просто какъ задача построенія сферопримы по тремъ мнимымъ кругамъ. Для этого мнѣ достаточно сослаться на соотвѣтствующую работу о простѣйшихъ совокупностяхъ круговъ. (Эти Записки I 66 слѣд.).

Два изъ такихъ круговъ, все равно, будутъ ли мнимые, или одинъ вещественный, или даже оба вещественные, если только они не пересѣкаются опредѣляютъ линейную приму съ двумя точечными кругами, какъ двойными точками инволюціи діаметровъ примы; конечно, при этихъ различныхъ предположеніяхъ пары точекъ получаются различныя.

Если даны три круга, то уже взятые попарно, опредѣляютъ три такихъ пары точекъ, которыя принадлежатъ вещественному ортогональному кругу линейной секунды, опредѣляемой этими тремя кругами.

По тремъ центрамъ этихъ круговъ, безразлично, какіе изъ нихъ вещественные или какіе изъ нихъ мнимые, получаемъ кругъ центровъ круговъ сферопримы, который также необходимо проходитъ чрезъ точечные круги, если таковые имѣются посреди круговъ сферопримы, а таковые необходимо имѣются, если есть круги вещественные и мнимые. Эти два круга, слѣдовательно, пересѣкаются въ двухъ точечныхъ кругахъ; центръ ортогональнаго круга мнимыхъ круговъ составляетъ съ центромъ круга центровъ отрѣзокъ равный тому, какой составляется послѣднимъ центромъ и центромъ ортогональнаго круга круговъ вещественныхъ.

Такимъ образомъ, эта элементарная геометрическая задача рѣшается весьма просто, хотя, если можно такъ выразиться, и обходнымъ путемъ.

Кстати замѣтимъ, что рѣшеніе задачи приводитъ къ нахожденію одной изъ простѣйшихъ конфигурацій изъ четырехъ точекъ A, D, E, Z чрезъ каждую изъ которыхъ проходитъ по три луча, а на каждомъ лучѣ находится только пара точекъ конфигураціи всего же шести лучей.

Перейти отъ этихъ теоремъ и задачъ къ соотвѣтственнымъ теоремамъ и задачамъ, относящимся къ шарамъ, легко по причинѣ весьма близкой аналогіи. Если даны три шара S, S_1 и S_2, то по каждымъ двумъ изъ нихъ опредѣляется радикальная плоскость, а всѣ три радикальныя плоскости пересѣкаются въ одной радикальной оси, которая есть ось опредѣляемой ими линейной секунды.

Соотвѣтственная теорема гласитъ: изъ каждой прямой въ радикальной плоскости двухъ шаровъ, двѣ сѣкущія плоскости этихъ шаровъ даютъ два круга, чрезъ которые можно провести шаръ.

Въ самомъ дѣлѣ, по свойству радикальной плоскости въ ней въ каждой точкѣ степень для обоихъ шаровъ (и даже всей опредѣляемой ими линейной примы) одинакова. Поэтому, какою бы плоскостью мы ни пересѣкли оба шара, мы получили бы два круга и ихъ радикальную ось, къ каждой точкѣ которой относится предыдущая теорема, слѣдовательно, и къ той, которая явилась пересѣченіемъ данною плоскостью прямой, выбранной въ этой плоскости; сѣкущія плоскости изъ нея выразятся теперь двумя сѣкущими прямыми, а потому чрезъ концы хордъ сѣченія проходитъ кругъ.

Но если, такимъ образомъ кругъ есть кривая сѣченія всѣми возможными плоскостями, то значитъ совокупность такихъ сѣченій составитъ шаръ.

Въ частности, эта теорема справедлива и для плоскостей, проведенныхъ изъ произвольно выбранной оси чрезъ центръ обоихъ шаровъ, и тогда ихъ сѣченія есть большіе круги. Въ линейной примѣ шаровъ тѣ шары, которые пересѣкаются ортогональнымъ шаромъ въ большихъ кругахъ, называются мнимыми.

Если дано нѣсколько мнимыхъ шаровъ, то тотъ шаръ, который ихъ всѣхъ пересѣкаетъ въ большихъ

кругахъ, называется ортогональнымъ; понятно, что существованіе таковаго связано съ опредѣленною совокупностью мнимыхъ шаровъ. Таковая совокупность имѣется не только въ линейныхъ примахъ, но и въ линейныхъ секундахъ и даже въ линейныхъ терціяхъ, и, въ частности въ сферопримахъ и сферосекундахъ.

Для сферопримъ проблема разрѣшается приложеннымъ чертежемъ, служащимъ для сферопримъ круговъ. Но сферосекунда шаровъ каждою линейною секундою пересѣкается въ сферопримѣ, а всѣ центры шаровъ одной линейной секунды находятся въ плоскости, а потому въ сѣченіи этою а слѣдовательно и всѣми плоскостями мы имѣемъ ту же конфигурацію.

Но по совокупности всѣхъ сѣченій она представляетъ разрѣзъ болѣе сложной конфигураціи.

Соотвѣтственная конфигурація въ пространствѣ состоитъ изъ 5 точекъ по одной на каждой изъ радикальныхъ осей, въ томъ числѣ и радикальный центръ, изъ 10 плоскостей, въ каждой по три точки и чрезъ каждую ось тоже по три и наконецъ изъ 10 осей по одной чрезъ каждыя двѣ точки и по 4 чрезъ каждую точку.

Эта конфигурація можетъ быть представлена тригональною бипирамидою съ лучомъ, соединяющимъ противоположныя вершины. По ней легко составить понятіе и объ ея плоскихъ разрѣзахъ.

Построеніе сферосекунды есть одновременно и рѣшеніе задачи: провести шаръ, пересѣкающій въ большихъ кругахъ четыре шара, данные произвольно.