31. Концентрическая укладка симметрическихъ совокупностей равныхъ шаровъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 28 мая 1913 г.).

Ясно, что если мы зададимся видомъ симметріи и, согласно съ нимъ, на одинъ данный шаръ будемъ укладывать равные шары слоями по разстоянію ихъ центровъ отъ центра даннаго шара и притомъ такъ, чтобы эти шары входили въ углубленія между предъидущими шарами и образовали правильную совокупность, то число шаровъ слоя будетъ вполнѣ опредѣленное, а именно будетъ равно величинѣ симметріи въ общемъ случаѣ, когда направленіе радіуса-вектора каждаго такого шара (начинающагося отъ центра начальнаго шара) будетъ общимъ (то есть ни совпадать съ осями симметріи, ни находиться въ плоскостяхъ симметріи), и будетъ опредѣленнымъ дѣлителемъ этого числа въ частныхъ случаяхъ.

Съ другой стороны центры такой совокупности шаровъ образуютъ пространственную рѣшетку (а совокупность плоскостей, касательныхъ къ каждому шару совокупности въ точкахъ его прикосновенія съ сосѣдними шарами принадлежатъ плоскостямъ параллелоэдровъ), а потому квадраты разстояній всѣхъ этихъ шаровъ отъ начальнаго выражаются относительно въ цѣлыхъ числахъ; эти центры образуютъ концентрическіе слои, находящіеся необходимо въ числѣ тѣхъ, которые получились бы, если бы были проведены всѣ концентрическіе слои съ квадратными корнями ряда натуральныхъ цѣлыхъ чиселъ. Числа же шаровъ въ слоѣ при не очень большомъ порядковомъ числѣ этого слоя чередовались бы по весьма сложному числовому закону.

Здѣсь я задаюсь не выводомъ этого закона, а только выводомъ послѣдовательности этихъ чиселъ.

Разсмотрю три совокупности шаровъ гексакисъ-октаэдрическаго вида симметріи соотвѣтственно тремъ возможнымъ въ этомъ случаѣ системамъ параллелоэдровъ: трипараллелоэдровъ, гексапараллелоэдровъ и гептапараллелоэдровъ, а также совокупность дигексагонально-бипирамидальнаго вида симметріи (и система тетрапараллелоэдровъ).

1. Система трипараллелоэдровъ (кубовъ).

Квадраты разстояній точекъ ближайшихъ слоевъ прямо опредѣляются индексами символовъ простѣйшихъ направленій. Найдя ближайшую точку, мы конечно вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляемъ на радіусѣ векторѣ рядъ точекъ на равныхъ разстояніяхъ (конгруентный), а слѣдовательно и разстоянія непрерывнаго ряда слоевъ.

Въ порядкѣ простоты символовъ направленій получимъ слѣдующую табличку:

100	1	4	9	16 . . . . (6)
110	2	8	18	32 . . . . (12)
111	3	12	27	48 . . . . (8)
210	5	20	35	80 . . . . (24)
211	6	24	54	96 . . . . (24)
221	9	36	81	144 . . . . (24)
310	10	40	90	160 . . . . (24)
311	11	44	99	176 . . . . (24)
320	13	52	117	208 . . . . (24)
321	14	56	126	224 . . . . (48)
322	17	68	. . . . .	. . . . (24)
332	22	88	. . . . .	. . . . (24)
. . . . .				

Въ скобкахъ поставлено число симметрично-равныхъ точекъ въ слоѣ.

Теперь мы получили довольно большой рядъ радіусовъ векторовъ слоевъ, а потому, ограничиваясь этимъ, можемъ составить послѣдовательно всѣ представленные въ совокупности слои, а именно:

квадратъ радіуса вектора:	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	16	17	18	20	22	24
число шаровъ въ слоѣ:	1	6	12	8	6	24	24	12	6 } +24	24	24	8	24	48	6	24	12	24	24	24
полное число шаровъ:	1	7	19	27	33	57	81	93	123	147	171	179	203	251	257	281	293	317	331	355

2. Система гексапараллелоэдровъ (ромбич. додекаэдровъ).

Этотъ (какъ и слѣдующій) случай имѣетъ ту особенность, что въ извѣстныхъ направленіяхъ число точекъ конгруентныхъ рядовъ вдвое плотнѣе; въ данномъ случаѣ это имѣетъ мѣсто по отношенію къ тѣмъ направленіямъ, въ символахъ которыхъ два нечетные индекса. Черезъ это порядокъ слоевъ существенно измѣняется, и мы получаемъ табличку:

110	$^1/_2$	$^4/_2$	$^9/_2$	$^{16}/_2$	. . . . (12)
100	1	4	9	16	. . . . (6)
211	$^3/_2$	$^{12}/_2$	$^{27}/_2$	$^{48}/_2$	. . . . (24)
310	$^5/_2$	$^{20}/_2$	$^{45}/_2$	$^{80}/_2$	. . . . (24)
111	3	12	27	48	. . . . (8)
321	$^7/_2$	$^{28}/_2$	$^{63}/_2$	$^{112}/_2$	. . . . (48)
332	$^{11}/_2$	$^{44}/_2$	$^{99}/_2$	$^{176}/_2$	. . . . (24)
221	9	36	81	144	. . . . (24)
311	11	44	99	176	. . . . (24)
320	13	52	117	208	. . . . (24)
322	17	68	. . . . .		(24)
. . . . .					

Отсюда сама собою выводится табличка, въ которой дробь $^1/_2$ замѣнена точкою:

квадратъ радіуса вектора:	.	.	.	.	.	.	0	$^1/_2$	1	1.	2	2.	3	3.	4	4.	5	5.	6	8	9	10	11	12	13	13	14
число шаровъ въ слоѣ:	1	12	6	24	12	24	8	48	6	12	24	24	24	12	6 } +24	24	24	8	24	24	48						
полное число шаровъ:	1	13	19	43	55	79	87	135	141	153	177	201	225	237	267	291	315	323	347	371	419						

3. Система гептапараллелоэдровъ (особыхъ притупленныхъ октаэдровъ).

Теперь уже непосредственно легко понять полученіе слѣдующей таблички:

111	$^3/_4$	$^{12}/_4$	$^{27}/_4$	$^{48}/_4$	. . . . (8)
100	1	4	9	16	. . . . (6)
110	2	8	18	32	. . . . (12)
311	$^{11}/_4$	$^{44}/_4$	$^{99}/_4$	$^{176}/_4$	. . . . (24)
331	$^{19}/_4$	$^{76}/_4$	$^{171}/_4$	$^{304}/_4$	. . . . (24)
210	5	20	35	80	. . . . (24)
211	6	24	54	96	. . . . (24)
511	$^{27}/_4$	$^{108}/_4$	$^{243}/_4$	$^{432}/_4$	. . . . (24)
531	$^{35}/_4$	$^{140}/_4$	$^{315}/_4$	$^{560}/_4$	. . . . (48)
221	9	36	81	144	. . . . (24)
310	10	40	90	160	. . . . (24)
. . . . .					

изъ которой, въ свою очередь, выводится, если, ради краткости, дробь $^3/_4$ замѣнимъ апострофомъ:

квадратъ радіуса вектора:	0	$^3/_4$	1	2	3	3'	4	4'	5	6	6'		8	8'	9	10	11	12				
число шаровъ въ слоѣ:	1	8	6	12	8	24	6	24	24	24	8 } +24	12	48	6 } +24	24	24	8					
полное число шаровъ:	1	9	15	27	35	59	65	89	113	137	169	181	229	259	283	307	315					

4. Система тетрапараллелоэдровъ (гексагон. призмъ).

Въ этомъ случаѣ мы можемъ выразить направленія символомъ ($p_0\ p_1\ p_2\ p_3$), гдѣ p_0 относится къ оси, перпендикулярной къ пинакоиду, а квадратъ разстоянія ближайшей точки формулой $(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_1\ p_2)$.

Составимъ табличку:

1000	1	4	9	16 . . . . (2)
$010\bar{1}$	1	4	9	16 . . . . (6)
$110\bar{1}$	2	8	18	32 . . . . (12)
0121	3	12	27	48 . . . . (6)
1121	4	16	36	64 . . . . (12)
$210\bar{1}$	5	20	45	80 . . . . (12)
$120\bar{2}$	5	20	45	80 . . . . (12)
$032\bar{1}$	7	28	63	112 . . . . (12)
2121	7	28	63	112 . . . . (12)
$132\bar{1}$	8	32	72	128 . . . . (24)
$310\bar{1}$	10	40	90	160 . . . . (12)
$130\bar{3}$	10	40	90	160 . . . . (12)
$232\bar{1}$	11	44	99	176 . . . . (24)
$320\bar{2}$	13	52	117	208 . . . . (12)
$230\bar{3}$	13	52	117	208 . . . . (12)
. . . . .				

Отсюда сама собою выводится табличка:

квадратъ радіуса вектора:	0	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	
число шаровъ въ слоѣ:	1	2 + 6	12	6	12 + 2 + 6	12 + 12	12 + 12	12 + 24	2 + 6	12 + 12	24	6 + 12	. . . . .	
полное число шаровъ:	1	9	21	27	47	71	95	131	139	163	187	1 3	217	

Этимъ задача и исчерпывается.

Какъ видимъ, въ первомъ и послѣднемъ случаѣ квадраты радіусовъ векторовъ непосредственно выражаются въ цѣлыхъ числахъ, въ случаѣ 2) входятъ еще $^1/_2$, а въ случаѣ 3) еще $^3/_4$, почему за единичный радіусъ векторъ въ этихъ случаяхъ нужно брать вдвое или, соотвѣтственно, вчетверо меньшій.