30. Простѣйшій ходъ операцій кристаллографическаго изслѣдованія.

Е. С. Федорова.

(Доложено 14 января 1913).

Примѣненіе кристаллографіи для цѣлей опредѣленія веществъ, полученныхъ въ кристаллической формѣ, мнѣ представляется настолько существеннымъ, что всѣ условности, которыя препятствуютъ или затрудняютъ это примѣненіе, должны быть устранены, и замѣнены повозможности такими пріемами, которые въ наибольшей степени облегчаютъ и сокращаютъ время такого опредѣленія.

Составляя таблицы для этихъ опредѣленій, я могъ съ высокою степенью чувствительности оцѣнить всякія затрудненія, которыя вводятся въ кристаллографическую практику вполнѣ искуственно, безъ особой надобности и легко могутъ быть устранены.

Одни изъ этихъ затрудненій относятся къ составленію таблицъ кристаллохимическаго анализа, другія — къ самымъ пріемамъ изслѣдованія.

Если удалось достичь того результата, что опредѣленіе въ среднемъ сводится къ работѣ 2-хъ или 3-хъ часовъ, то понятно, что это осуществимо лишь при соблюденіи цѣлаго ряда произведенныхъ упрощеній въ ходѣ операцій; если удалось достичь того, что даже чистые химики въ сравнительно короткое время (однако въ общемъ не менѣе годовой практики посреди другихъ занятій) успѣваютъ овладѣвать методомъ, то опять таки, это осуществлено лишь путемъ примѣненій во всемъ дѣлѣ простѣйшихъ операцій.

Сейчасъ въ составъ таблицъ для опредѣленія входитъ еще сравнительно небольшое число веществъ, а именно около десяти тысячъ; но со временемъ число это конечно возрастетъ въ значительной мѣрѣ, и возможность своевременно пополнять таблицы будетъ зависѣть отъ того, въ какой формѣ авторы кристаллоизмѣренія будутъ излагать свои результаты. Тому, кто en masse занятъ перенесеніемъ этихъ результатовъ въ числа таблицы, совершенно очевидно, что практикующаяся въ настоящее время форма какъ бы предназначена для затрудненія въ пользованіи полученными результатами и во всякомъ случаѣ непроизводительно отнимаетъ много времени.

Вотъ почему автору при составленіи таблицъ пришлось произвести гораздо болѣе значительный трудъ (на который потрачено около 12 лѣтъ), чѣмъ это было бы необходимо по существу дѣла.

Какъ извѣстно, въ настоящее время результаты кристаллоизмѣренія выражаются 1) въ приведеніи геометрическихъ константъ въ видѣ трехъ угловъ между кристаллографическими осями и отношенія единичныхъ отрѣзковъ по нимъ то есть тѣхъ отрѣзковъ, которыя опредѣляются гранью съ приписываемыми ей индексами (111), 2) въ наблюденной комбинаціи, причемъ часто грани, наиболѣе существенныя по значенію, не означаются въ ихъ естественной послѣдовательности, и часто лицу, пользующемуся результатами, нельзя рѣшить про тѣ или другія формы, составляютъ ли они большую рѣдкость, или же, напротивъ имѣютъ первенствующее значеніе (Ясно, что благодаря этому обстоятельству, составленныя таблицы не могутъ не заключать значительнаго числа ошибокъ); наконецъ 3) приводится столбецъ угловъ между разными гранями, угловъ наблюденныхъ и вычисленныхъ, причемъ выборка этихъ угловъ совершенно произвольна и случайна.

Для внесенія результата измѣреній въ таблицы кристаллохимическаго анализа, приводимый матеріалъ нужно переработать въ такъ называемый символъ комплекса, составленный изъ числъ, имѣющихъ опредѣленное геометрическое значеніе, а для этого предварительно нужно составить діаграмму въ гномостереографической проекціи. Такая же діаграмма получается и какъ непосредственный результатъ произведеннаго кристаллоизмѣренія. Въ нашей школѣ при научномъ описаніи кристалловъ новыхъ веществъ считается необходимымъ привести такую діаграмму; но вообще авторы кристаллоизмѣренія такихъ діа-

граммъ не даютъ, и получается тотъ странный результатъ, что иногда (особенно для триклинныхъ кристалловъ) легче и меньше времени нужно затратить на новое измѣреніе, чѣмъ на составленіе діаграммы по числамъ, приводимымъ авторами.

Это аномальное обстоятельство подчеркиваетъ съ особенною ясностью необходимость цѣлесообразной формы изложенія результатовъ кристаллоизмѣренія и особенную желательность приведенія діаграммы въ гномостереографической проекціи.

Было бы совершенно невозможно одному лицу составить полныя таблицы по оригинальнымъ источникамъ. Возможность такая появилась, благодаря достаточно полнымъ извлеченіямъ, приводимымъ въ журналѣ Zeitsrift für Krystallographie, издаваемомъ П. Гротомъ съ большимъ тщаніемъ, благодаря которому въ извлеченіе часто вносятся исправленіе оригинальныхъ работъ; и съ этой стороны этотъ источникъ даетъ преимущества; значительнымъ дополненіемъ къ этому матеріалу послужили также три тома Chemische Krystallographie того же ученаго, въ которыхъ, въ свою очередь, внесено не мало исправленій.

Однако, несмотря на все это, въ таблицахъ списковъ угловъ остается столько погрѣшностей и самопротиворѣчій, что все-таки пришлось потратить очень много излишняго труда и усилій, чтобы воспользоваться и списками, заключающими въ себѣ погрѣшности, по крайней мѣрѣ по возможности. Нашлась впрочемъ не одна сотня и такихъ случаевъ, когда этой возможности я все-таки не нашелъ, и по моему мнѣнью всѣ такія вещества требуютъ кристаллографическаго изслѣдованія съизнова.

Чтобы понять трудность составленія діаграммы при существованіи даже самыхъ незначительныхъ неточностей, достаточно представить себѣ ходъ графическаго нанесенія на діаграмму (пользуясь стереографическою сѣткою) проекцій граней по даннымъ угламъ, приводимымъ въ спискахъ.

Допустимъ, что въ приведенный списокъ угловъ триклиннаго кристалла вкралась самая незначительная неточность напр. вмѣсто угла (100): $(0\bar{1}0)$ напечатано (100): (010); тогда какая-нибудь грань напр. (110) этого пояса уже съ самаго начала откладывается не на свое мѣсто, такъ какъ ея полюсъ занимаетъ мѣсто между полюсами (100) и $(0\bar{1}0)$, тогда какъ его истинное мѣсто въ промежуткѣ между (100) и (010); откладывая далѣе приводимые углы другихъ граней съ этою гранью мы будемъ сплошь производить невѣрное откладываніе угловъ, а полученная сначала діаграмма вовсе не будетъ походить на истинную; если дано достаточное число угловъ, то, начиная съ нѣкотораго изъ нихъ, мы начинаемъ натыкаться на противорѣчія, такъ какъ угловыя разстоянія между гранями въ дѣйствительности не будутъ равны истиннымъ. Тогда приходится констатировать ошибочность приведенныхъ угловъ и догадываться, гдѣ вкралась ошибка. Вмѣсто сравнительно простой операціи составленія діаграммы по даннымъ угламъ начинается истощающая терпѣніе работа догадокъ и провѣрокъ. Можно понять, что въ совокупности трудъ отъ этого можетъ и удесятериться. Не лучше будетъ и въ томъ случаѣ, если вкрадется опечатка въ цифрахъ, а пожалуй еще хуже, если въ приведенныхъ числахъ окажутся результаты первоначальной ошибки автора въ вычисленіяхъ.

Такъ какъ я всегда дѣлалъ карандашныя отмѣтки такихъ ошибокъ, то могу судить о степени ихъ частости, но перечислить ихъ всѣхъ рѣшительно нѣтъ возможности; но во всякомъ случаѣ таковыхъ нашлась не одна тысяча.

Чтобы иллюстрировать это на примѣрѣ, я возьму для пробы нѣсколько страницъ изъ наиболѣе провѣреннаго источника, какимъ мнѣ только приходилось пользоваться напр. изъ III тома Chemische Krystallographie проф. Грота.

Раскроемъ напр. стр. 295.

Противъ перваго описаннаго здѣсь вещества—малата литія—у меня помѣтокъ нѣтъ. Но именно это вещество подверглось коренному исправленію; достаточно сравнить приведенныя здѣсь числа съ тѣми, которыя приведены въ подлинникѣ (Zeitschrift für Krystallographie **31** 164, откуда заимствованы и изображенія кристалловъ), чтобы видѣть измѣненія въ углахъ, принятыхъ за основные и помѣченные звѣздочками; подлинникъ испещренъ моими помѣтками погрѣшностей.

Второе описанное вещество—дималатъ мѣди—опредѣлено сталь противорѣчивыми углами, что его пришлось вовсе выпустить; достаточно отмѣтить, что здѣсь даны углы (001): (101) = 49°43 и (001): (102) = 39°7 (вычислен. при $\beta = 86°4$). Чтобы опредѣлить это вещество, нужно ждать новаго его кристаллографическаго описанія.

На слѣдующихъ двухъ страницахъ 296 и 297 описаны тетрагональные кристаллы, въ описаніи которыхъ ошибки наименѣе вѣроятны. Однако и здѣсь внесены проф. Гротомъ нѣкоторыя измѣненія напр. для малата мѣди на стр. 297; достаточно сравнить съ подлинникомъ въ Zeits. f. Kryst. **31** 172, чтобы видѣть, что выпущены углы (223): (334) и (223): (111), для которыхъ мною сдѣланы помѣтки.

Переходя къ слѣдующей парѣ страницъ 298 и 299, мы снова натыкаемся на такія ошибки, которыя

сдѣлали бы составленіе діаграммы малата магнія (стр. 299) невозможнымъ, если бы не явныя указанія на изоморфизмъ, а слѣдовательно и на свѣрку угловъ съ углами малата цинка, описаннаго на стр. 300. Хотя въ книгѣ Грота и внесены нѣкоторыя измѣненія сравнительно съ подлинникомъ (напр. пропущенъ уголъ 100: 102), однако неправильно приведенные углы (110): (101) = 78°2, (102): (001)= 20°3 сохранены.

Въ описаніи слѣдующаго вещества—малата марганца—Гротомъ не внесено никакихъ измѣненій, между тѣмъ какъ здѣсь мы имѣемъ замѣчательный случай приведенія всего четырехъ угловъ, изъ которыхъ три основные и не могутъ быть приняты за невѣрные, а четвертый находится съ ними въ рѣзкомъ противорѣчіи; это уголъ (110): (001) = 71°21. Невозможность такой величины сразу бросается въ глаза, если принять во вниманіе основной уголъ (100): (001) = 78°30. Понятно, что діаграмма, составленная на такихъ данныхъ (по основнымъ угламъ) не можетъ претендовать на безусловную надежность, а часто и вовсе не можетъ быть составлена.

На слѣдующихъ двухъ страницахъ 300 и 301, заканчивающихъ главу, мы опять натыкаемся на ошибочный уголъ при описаніи малата магнія, а именно уголъ (101) : $(\bar{1}01)$=29°2, который, согласно діаграммѣ, долженъ быть приблизительно вдвое больше.

Слѣдующая глава начинается съ описанія винной кислоты, для котораго у меня нѣтъ помѣтокъ; но уже для второго вещества—виноградной кислоты у меня (на стр. 305) помѣчено, что уголъ $(1\bar{1}0)$: : (001)=79°26′ долженъ быть замѣненъ величиною около $70^1/_2$. Но особенно много тягостной работы выпало при составленіи діаграммы третьяго вещества—одноводной виноградной кислоты, благодаря сравнительно незначительной ошибкѣ въ показаніи угла (010) : (001) вмѣсто $(0\bar{1}0)$: (001); въ этомъ же спискѣ замѣчена существенная ошибка въ углѣ (111) : : (110) (вмѣсто 32°23., нужно около 46.°).

Я нарочно разсмотрѣлъ случаи погрѣшностей въ послѣдовательности, чтобы каждый могъ судить о числѣ ошибокъ всего кристаллографическаго матеріала, взятаго въ совокупности. Но я отнюдь не избиралъ мѣста наибольшаго скопленія ошибокъ, и могъ бы привести мѣста въ описаніяхъ, гдѣ на протяженіи нѣсколькихъ страницъ пришлось бы отбросить около четверти описаній по невозможности, вслѣдствіе скопленія ошибокъ, составить правильныя діаграммы.

Можно бы указать на составленіе діаграммъ по приводимымъ геометрическимъ константамъ. Но во-первыхъ, такое составленіе сопряжено съ гораздо большимъ трудомъ, а во-вторыхъ, я такъ часто встрѣчалъ противорѣчія этихъ константъ съ приводимыми углами, что сомнѣваюсь, чтобы такое составленіе діаграммъ привело къ лучшимъ результатамъ. Когда не было приведено другихъ данныхъ, пришлось составлять и по нимъ, но я на всѣ такія діаграммы смотрю какъ на наименѣе надежныя.

Возьму примѣръ хотя бы изъ послѣдняго, имѣющагося у меня въ рукахъ нумера Zeitschrift f. Krystallogr. **51**, стр. 387.

Вещество цинхохинона $C_{19}H_{20}ON_2$ кристаллизуется въ ромбическихъ кристаллахъ, и для него даны константы: 0,4582 : 1 : 0,4450, между тѣмъ въ качествѣ основныхъ угловъ приводятся (111) : (001)= =73°58. и (111) : $(1\bar{1}1)$ = 58°12. Полное несоотвѣтствіе угловъ съ константами бросается въ глаза по приближенію къ равенству отрѣзковъ по первой и третьей осямъ.

Чему же отдать предпочтеніе?

Конечно, приводимымъ угламъ: во-первыхъ потому, что приводимые углы наблюденные контролируются вычисленными, а во-вторыхъ вслѣдствіе согласія этихъ угловъ другъ съ другомъ (хотя и не полнаго). Хотя и въ этомъ спискѣ встрѣчена погрѣшность, выражающаяся въ несоотвѣтствіи угловъ, (331) : (001) = 84°38 и (031) : (001) = 77°11, однако по согласію другихъ угловъ все-таки діаграмму составить было можно.

Если я позволилъ себѣ подробнѣе остановиться на тѣхъ затрудненіяхъ, съ которыми сопряжено пользованіе имѣющимся матеріаломъ, даже въ наиболѣе провѣренныхъ источникахъ, я хотѣлъ привести къ убѣжденію въ безусловной необходимости излагать результаты изслѣдованія въ другой формѣ, а именно такой, при которой трудъ пользованія этими результатами свелся бы къ возможному минимуму.

Кромѣ того, теперь результатами кристаллоизмѣренія начали пользоваться чистые химики и съ теченіемъ времени они будутъ принуждены пользоваться ими все въ большей и большей мѣрѣ. Но это вообще сдѣлается болѣе осуществимымъ лишь тогда, когда и всѣ пріемы изслѣдованія и провѣрки упростятся до возможной степени. Но я едва ли ошибусь, если скажу, что наиболѣе трудною для усвоенія является система кристаллографическихъ вычисленій.

Обычная нынѣ система безъ всякой надобности весьма усложняетъ операціи вычисленія, заставляя вычислять такія геометрическія величины (обычныя кристаллографическія константы), которыя сами по себѣ не имѣютъ существеннаго значенія для пони-

манія формъ, а между тѣмъ именно ихъ приходится вычислять по особенно сложнымъ формуламъ.

Невольно задаешь себѣ вопросъ, ради чего это дѣлается?

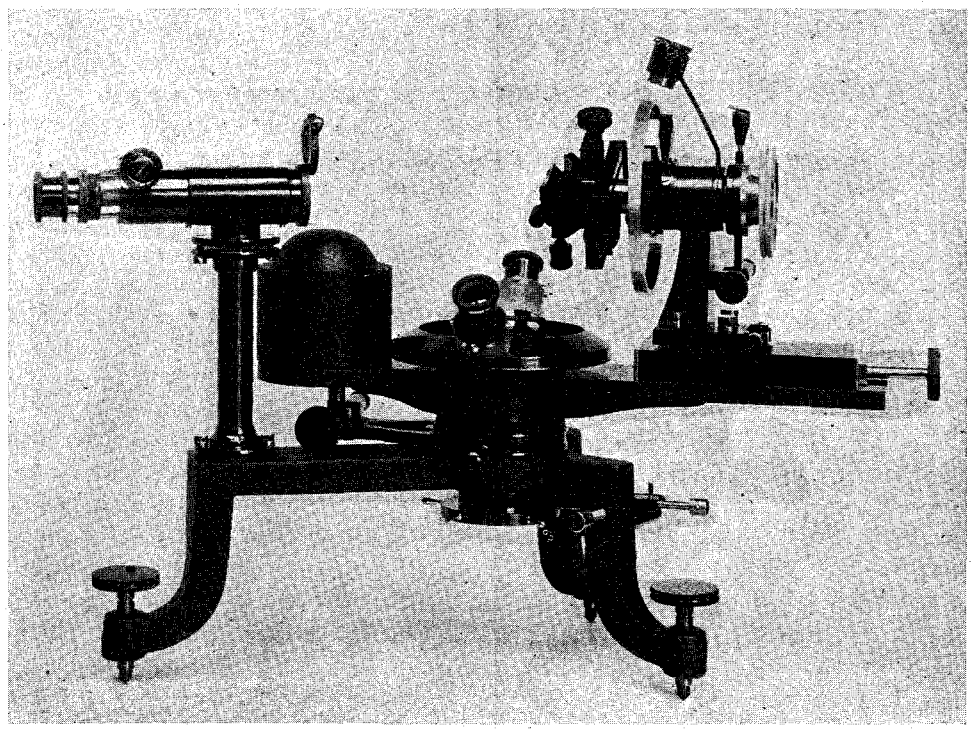
Эти непроизводительныя затраты труда, по моему опыту, лучше всего устраняются особымъ видомъ системы зональныхъ вычисленій, а именно системою, предполагающею употребленіе биполярныхъ сферическихъ координатъ. У насъ эта система начинаетъ излагаться въ элементарныхъ учебныхъ руководствахъ по кристаллографіи.

Сущность этой системы была превосходно изложена и на одномъ изъ иностранныхъ языковъ, а именно на нѣмецкомъ языкѣ въ Zeitschrift für. Krystallogr. **46**. 202 оксфордскимъ ученымъ г. Баркеромъ. Однако, еще не видно, чтобы коллеги кристаллографы достаточно обратили вниманіе на преимущества этой системы.

Изложеніе ея и составляетъ главную задачу этой статьи. Но такъ какъ примѣненіе ея упрощается въ высокой мѣрѣ употребленіемъ универсальнаго гоніометра выработаннаго у насъ типа, то предварительно я сдѣлаю краткое описаніе этого гоніометра, отмѣчая, что именно благодаря простымъ операціямъ, связаннымъ съ его употребленіемъ, достигнутъ вышеупомянутый результатъ — опредѣленіе неизвѣстнаго вещества въ сравнительно короткое время.

Самая послѣдняя его конструкція, наиболѣе приноровленная къ производству кристаллохимическаго анализа, изображена на приложенной фиг. 1 (въ осуществленіи Берлинскаго механика Leiss).

Какъ видимъ, гоніометръ состоитъ изъ двухъ частей—неподвижной съ трубою, укрѣпленною на колонкѣ, оптическая ось которой направлена къ геометрическому центру инструмента, и подвижною, вращающеюся около вертикальной оси, также проходящей чрезъ этотъ центръ. Углы вращенія около этой оси отсчитываютъ на горизонтальномъ лимбѣ (съ двумя лупами для отсчета),



Фиг. 1.

причемъ внутренній ноніусъ можетъ быть независимо отъ этого общаго движенія также повернутъ около вертикальной оси, чтобы его нулевое дѣленіе могло быть установлено на любомъ мѣстѣ круга.

Съ правой стороны подвижной части мы видимъ салазки и на нихъ столбикъ, несущій вертикальный

лимбъ съ горизонтальною (подвижною) осью вращенія. Эта ось также и во всѣхъ положеніяхъ направлена къ общему центру инструмента, около котораго на юстирномъ аппаратѣ прикрѣпляется изслѣдуемый кристаллъ.

Слѣва на подвижной части виденъ грузъ, служащій для уравновѣшенія правой части.

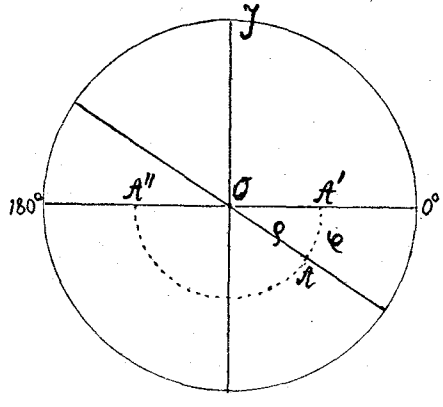
Едва ли мнѣ нужно останавливаться на деталяхъ этого прибора, которыя по своему общему характеру хорошо знакомы всѣмъ спеціалистамъ.

Скорѣе всего мнѣ слѣдуетъ объяснить, почему первоначально примѣнявшіяся автоколлимація и употребленіе двухъ трубъ со временемъ были вытѣснены изъ нашей практики.

Именно при кристаллохимическомъ анализѣ преимущественно приходится имѣть дѣло съ кристаллами, полученными въ химическихъ лабораторіяхъ и большая часть которыхъ не отличается ни высокимъ блескомъ, ни вообще выдающимися достоинствами рефлексовъ. Нерѣдко грани бываютъ даже матовыми или почти матовыми. Поэтому наибольшая чувствительность въ наблюденіи очень слабыхъ рефлексовъ и отраженій достигается именно тогда, когда сильный источникъ свѣта находится въ отдаленіи, а глазъ наблюдателя въ относительной темнотѣ. Вотъ почему, испытавъ всѣ методы наблюденій, мы остановились на употребленіи яркаго (огненнаго) внѣшняго сигнала, помѣщеннаго въ отдаленіи и въ фокусѣ котораго поставлена линза для сосредоточенія свѣта на той части прибора, гдѣ помѣщенъ кристаллъ, а труба и смотрящій въ нее глазъ остаются въ тѣни.

Отсчеты по обоимъ лимбамъ даютъ двѣ сферическія координаты всякой данной грани; этими двумя сферическими координатами положеніе этой грани опредѣляется вполнѣ точно и притомъ однозначно. Это значитъ, что двумъ даннымъ сферическимъ координатамъ соотвѣтствуетъ только одна единственная грань; но это конечно не значитъ, что эта грань можетъ быть опредѣлена только двумя опредѣленными координатами; напротивъ того, каждая грань можетъ быть опредѣлена двумя парами различныхъ координатъ. Я сейчасъ поясню этотъ результатъ, предварительно замѣтивъ, что отсчеты на горизонтальномъ лимбѣ даютъ сферическія разстоянія полюса данной грани отъ одной опредѣленной точки сферы (соотвѣтственно географическимъ широтамъ); мы обозначаемъ эту координату греческою буквою ρ; отсчеты на вертикальномъ лимбѣ даютъ углы между поясами (соотвѣтственно географическимъ долготамъ); мы обозначаемъ эту координату чрезъ φ. Въ частности, если есть грань, точно перпендикулярная къ подвижной (горизонтальной) оси прибора, то для нея уголъ $\rho = 0°0$ [1]), а уголъ φ становится совершенно неопредѣленнымъ $^0/_0$, такъ какъ ея рефлексъ не измѣняетъ своего положенія при вращеніи около этой оси. Вотъ полюсъ этой грани на сферѣ и есть та постоянная точка, по отношенію къ которой опредѣляются величины угловъ всѣхъ другихъ граней въ координатахъ ρ. Въ частности, для всѣхъ граней, параллельныхъ подвижной оси координата $\rho = 90°$ или $270°$.

Теперь допустимъ, что имѣется грань, полюсъ которой находится въ точкѣ A (фиг. 2), и пусть



Фиг. 2.

точка I выражаетъ положеніе вертикальной неподвижной оси. Чтобы получить ея координаты, мы должны двумя вращеніями привести ея полюсъ въ положеніе центра проекціи то есть точку O.

Ясно, что мы можемъ достичь это двоякимъ образомъ. Если діаметръ, перпендикулярный къ діаметру OI есть тотъ, который отмѣченъ цифрами 0° и 180°, то мы можемъ 1) повернуть около подвижной оси (которую мы обыкновенно обозначаемъ буквою M—mobile) и которую въ начальномъ положеніи представляемъ себѣ перпендикулярно къ плоскости проекціи (изъ точки O) на уголъ φ въ точку A′, а затѣмъ около оси I на уголъ OA то есть ρ, и 2) повернуть въ противоположномъ направленіи на уголъ $\pi - \varphi$ въ точку A″; чтобы привести полюсъ A″ въ положеніе центра мы хотя и должны повер-

[1]) Эту установку нуля мы производимъ посредствомъ находящагося внизу круга съ маленькими рычагами; для точной установки имѣется и микрометрическій (конечно и закрѣпительный) винтъ, который видѣнъ внизу направо.

нуть около оси I на ту же величину угла ρ, но уже въ обратномъ направленіи; это можно выразить угломъ $-\rho$; если напр. уголъ ρ есть 30°, то для перваго поворота будемъ имѣть на горизонтальномъ лимбѣ дѣленіе 30°0, а для второго поворота будемъ имѣть на томъ же лимбѣ уголъ 330°0 = = 360°0 — 30°0.

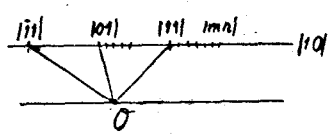
Именно этою двойственностью мы и пользуемся, чтобы повѣрить, насколько точно соблюдена перпендикулярность осей I и M гоніометра. Для этого вмѣсто кристалла примѣняемъ полированную плоскость (сегмента) такъ, чтобы координата ρ была 90°0; тогда, послѣ двухъ поворотовъ около осей на 180° найдемъ двойную величину ошибки.

Преимущества такого способа наблюденія бросаются въ глаза, такъ какъ 1) юстировку кристалла нужно произвести только одинъ разъ, а 2) каждое отдѣльное наблюденіе даетъ намъ сразу двѣ сферическія координаты, которыми положеніе грани опредѣляется вполнѣ точно и однозначно [1]).

Сейчасъ же мнѣ нужно особенно подчеркнуть ничѣмъ другимъ незамѣнимое преимущество этого способа наблюденія, а именно, что оно даетъ нетолько углы между гранями, но и углы между поясами.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ точкѣ O представлена нѣкоторая возможная грань комплекса (хотя бы она въ дѣйствительности на кристаллѣ и не образовалась), а въ точкахъ, обозначенныхъ цифрами 0° и 180° представлена пара параллельныхъ граней, то уголъ ρ есть уголъ OA между гранями, а уголъ φ есть уголъ между поясами—начальнымъ и поясомъ OA; а изъ дальнѣйшаго увидимъ, что этотъ второй уголъ имѣетъ для простоты описанія и вычисленій большее значеніе, чѣмъ первый. Это вытекаетъ изъ самой сущности системы зональныхъ вычисленій, къ изложенію которой я и перехожу.

Пусть O есть гномоническая проекція грани, совмѣщенной съ плоскостью чертежа (фиг. 3), а кромѣ того имѣемъ поясъ граней, означенныхъ символами (10), (11), (01), $(\bar{1}1)$..., и изъ нихъ первая въ этой проекціи выражается точкою на безконечности. Если изъ нихъ выберемъ первыя четыре, которыя распадаются на двѣ пары гармонически-сопряженныхъ, а именно (10) съ (01) и (11) съ $(\bar{1}1)$, то отрѣзки (11): (01) и (01): $(\bar{1}1)$ равны и будутъ такъ называемыми единичными отрѣзками пояса; каждая изъ этихъ граней съ гранью O образуетъ поясъ, а потому имѣемъ четыре пояса, которыя мы можемъ отмѣтить тѣми же (поясовыми) символами изъ двухъ индексовъ, что и только-что упомянутыя грани.



Фиг. 3.

Тогда мы имѣемъ замѣчательное угловое отношеніе между тремя углами, считая эти углы всегда отъ прямой, проходящей чрезъ O и грань (10), а именно

$$2\ \mathrm{cotg}\ (01) = \mathrm{cotg}\ (11) + \mathrm{cotg}\ (\bar{1}1).$$

Это равенство, выведенное еще англійскимъ кристаллографомъ Miller'омъ, доказать весьма просто, означивъ для краткости эти углы буквами α_2 α_1 и α_3, а временно введя еще обозначеніе отрѣзковъ l_1, l_2 и l_3 для отрѣзковъ 0 и $|11|$, $|01|$, $|\bar{1}1|$.

Если отрѣзки $|11| : |01|$ и $|01| : |\bar{1}1|$ равны, то равны и площади трехугольниковъ, имѣющихъ эти отрѣзки своими основаніями, а вершину въ точкѣ O. Отсюда слѣдуетъ:

$$l_1\ l_2 \sin\ l_1\ l_2 = l_1\ l_2\ (\alpha_1\ \alpha_2) = l_2\ l_3\ \sin\ (l_2\ l_3) = l_2\ l_3 \sin\ (\alpha_3 - \alpha_2)$$

и значитъ

$$l_1\ (\sin\alpha_2\ \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\ \sin\alpha_1) = l_3\ (\sin\alpha_3\ \cos\alpha_2 - \cos\alpha_3\ \sin\alpha_2)$$

Принявъ во вниманіе еще равенство

$$l_1 : l_3 = \sin\alpha_3 : \sin\alpha_1$$

и, раздѣливъ все на произведеніе $\sin\alpha_1\ \sin\alpha_2\ \sin\alpha_3$, мы и получаемъ равенство Miller'a

$$2\ \mathrm{cotg}\alpha_2 = \mathrm{cotg}\alpha_1 + \mathrm{cotg}\alpha_3$$

[1]) Едва ли нужно и упоминать о томъ сокращеніи во времени, которое связано съ такими наблюденіями. Насколько спеціалисты идутъ мало на встрѣчу упрощеніямъ въ операціяхъ, можно видѣть изъ того, что и до сихъ поръ большинство работаетъ съ одноосными гоніометрами между тѣмъ упомянутыя здѣсь и другія упрощенія отъ этого способа наблюденій мною были опубликованы еще въ 1889 въ Запискахъ СПБ. минералогическаго Общества 27 458 то есть уже почти 25 лѣтъ тому назадъ.

Но теперь намъ его нужно обобщить на произольную грань, выражающуюся поясовымъ символомъ $(m\ n)$.

Какъ насъ учитъ теорія гномоническихъ проекцій, проекція этой грани получится, если единичный отрѣзокъ мы раздѣлимъ на n равныхъ частей и отложимъ такихъ m частей, считая отъ (01), причемъ m можетъ быть любое цѣлое число, положительное или отрицательное. Въ частности, если это число равно нулю, получаемъ точку (01), если это число равно n, получаемъ точку (11), если это число равно $-n$, получимъ точку $(\bar{1}1)$, если это число ∞ получимъ точку (10).

Для сокращенія въ выводѣ дальнѣйшихъ формулъ, мы во первыхъ можемъ отбросить выраженіе котангенсовъ, такъ какъ ни съ чѣмъ другимъ, кромѣ котангенсовъ мы здѣсь и не имѣемъ дѣла, во вторыхъ за основные углы примемъ α_1 для (11) и α_2 для (01), и наконецъ точки, полученныя отъ дѣленія единичнаго отрѣзка на n частей въ положительномъ направленіи будемъ послѣдовательно отмѣчать (1), (2), (3), . . . , а въ отрицательномъ поправленіи (1′), (2′), (3′) . . .

Тогда можемъ написать рядъ равенствъ въ такой формѣ

$$\begin{aligned}
(1)+(1) &= (\alpha_2)+(2)\\
(1)+(2) &= (\alpha_2)+(3)\\
(1)+(3) &= (\alpha_2)+(4)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
(1)+(n-2) &= (\alpha_2)+(n-1)\\
(1)+(n-1) &= (\alpha_2)+(\alpha_1)
\end{aligned}$$

Отсюда слѣдуетъ

$$(n-1)\ (1)+(1)=(n-1)\ (\alpha_2)+(\alpha_1) \text{ то есть } n\,(1)= =(n-1)\ (\alpha_2)+(\alpha_1).$$

Получивъ такимъ образомъ выраженіе котангенса для грани, проектирующейся въ гномонической проекціи первою точкою, мы легко найдемъ выраженіе и для всѣхъ остальныхъ.

Для второй точки получимъ $2\,(1)=(\alpha_2)+(2)$ или $(2)=2\,(1)-(\alpha_2)$ и значитъ $n\,(2)=2n\,(1)-n\,(\alpha_2)$, а такъ какъ $2n\,(1)=2\,(n-1)\,(\alpha_2)+2\,(\alpha_1)$, то получимъ окончательно $n\,(2)=(n-2)\,(\alpha_2)+(\alpha_1)$

Продолжая такъ же дальше, найдемъ

$$\begin{aligned}
n\,(3) &= (n-3)\,(\alpha_2)+3\,(\alpha_1)\\
n\,(4) &= (n-4)\,(\alpha_2)+4\,(\alpha_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n\,(m) &= (n-m)\,(\alpha_2)+m\,(\alpha_1),
\end{aligned}$$

что и составляетъ окончательный искомый результатъ, который въ полномъ видѣ выразится [1])

$$\begin{aligned}
n\ \mathrm{cotg}\ [mn] &= (n-m)\ \mathrm{cotg}\ \alpha_2 + m\ \mathrm{cotg}\ \alpha_1\\
&= (n-m)\ \mathrm{cotg}\ |01| + m\ \mathrm{cotg}\ |11|.
\end{aligned}$$

Получивъ эту основную формулу, по которой вычисленія производятся путемъ простыхъ сложеній и вычитаній, даже безъ употребленія таблицъ логарифмовъ, а просто по таблицамъ натуральныхъ котангенсовъ, я обращу вниманіе на преимущества этого способа наблюденій даже въ смыслѣ точности, не говоря уже о быстротѣ и простотѣ.

Допустимъ, что мы на гоніометрѣ юстируемъ кристаллъ по грани O; тогда всякая другая грань съ этою начальною гранью опредѣляетъ поясъ и вообще мы получимъ рядъ поясовъ, углы между которыми связаны тѣмъ простымъ соотношеніемъ, которое выражается этою основною формулою. Но за независимые углы мы можемъ принять только два; остальные вычисляются по этой просто формулѣ; и величины, полученныя вычисленіемъ, тутъ же, при производствѣ измѣренія, могутъ быть сравнены съ величинами наблюденными, а потому сейчасъ же можетъ быть произведена вывѣрка, основанная на возможномъ устраненіи противорѣчій между величинами вычисленными и наблюденными. Для этого достаточно имѣть подъ рукою таблицу натуральныхъ котангенсовъ.

Такимъ образомъ при первомъ же наблюденіи мы получаемъ болѣе точныя значенія одной изъ координатъ, опредѣляющихъ положеніе координатъ, если будемъ пользоваться углами φ и произведемъ ихъ вывѣрку.

Стоитъ сдѣлать то же съ какою-нибудь другою гранью, по которой мы второй разъ проюстируемъ

[1]) Здѣсь сокращенно передается выводъ, съ развитіемъ подробностей изложенный въ Запискахъ Горнаго Института томъ II стр. 394.

кристаллъ, и у насъ сразу закончены всѣ измѣренія и вычисленія для одного даннаго кристалла. Если повторимъ для нѣсколькихъ кристалловъ, то можемъ взять среднія величины, и получить еще болѣе точныя значенія

Но такія двѣ юстировки нужны развѣ только для триклинныхъ кристалловъ, какъ мы сейчасъ и увидимъ.

Если двѣ такія юстировки произведены, то для полученія геометрическихъ константъ вовсе не нужно никакихъ вычисленій, такъ какъ онѣ являются непосредственнымъ результатомъ измѣреній; всѣ остальныя вычисленія координатъ граней сводятся къ сложеніямъ и вычитаніямъ котангенсовъ.

Чтобы наглядно демонстрировать этотъ выводъ, я приведу примѣръ изъ элементарнаго руководства по кристаллографіи [1]), относящійся къ анортиту, діаграмма котораго въ правильной установкѣ приведена на фиг. 4.

Чаще всего на этомъ минералѣ проявляются грани $(1\bar{1}0)$, $(0\bar{1}1)$, $(\bar{1}01)$, $(00\bar{1})$, (110) и $(11\bar{1})$; но допустимъ, что кромѣ нихъ наблюдалось на данномъ кристаллѣ еще $(\bar{1}\bar{1}3)$. Этого совершенно достаточно, чтобы непосредственно при измѣреніи отсчитать тѣ основные пять угловъ, которые приведены на діаграмѣ и которые и составляютъ геометрическія константы кристалла, по которымъ легко вычислить всѣ остальныя координаты всѣхъ какъ имѣющихся на кристаллѣ, такъ и возможныхъ граней то есть граней, выражающихся въ цѣлыхъ индексахъ символа.

Приведенныя здѣсь константы сводятся къ одному углу между гранями, а именно между тѣми двумя гранями, полюсы которыхъ приняты за центры биполярныхъ координатъ, и къ четыремъ или точнѣе двумъ парамъ основныхъ угловъ между исходными поясами.

Эти углы слѣдующіе:

$$1)\ (0\bar{1}1):(\bar{1}01)=59°29$$

$$2)\ \begin{vmatrix}0\bar{1}1\\\bar{1}01\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\1\bar{1}1\end{vmatrix}=[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]:[011]=124°16;\ 3)\ \begin{vmatrix}0\bar{1}1\\\bar{1}01\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\\bar{1}\bar{1}3\end{vmatrix}=$$

$$=[111]:[211]=38°6$$

$$4)\ \begin{vmatrix}\bar{1}01\\0\bar{1}1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\bar{1}01\\1\bar{1}1\end{vmatrix}=[111]:[\bar{1}0\bar{1}]=127°47;\ 5)\ \begin{vmatrix}\bar{1}01\\0\bar{1}1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\bar{1}01\\\bar{1}\bar{1}3\end{vmatrix}=$$

$$=[111]:[121]=41°33$$

Чтобы нагляднѣе показать составленіе діаграммы по этимъ основнымъ угламъ, я помѣстилъ сѣтку въ косомъ положеніи, чтобы одинъ изъ двухъ основныхъ полюсовъ, а именно полюсъ $(0\bar{1}1)$ совпалъ съ однимъ изъ полюсовъ сѣтки, и тогда значеніе второго и третьяго угла видно непосредственно (по надписямъ этихъ угловъ).

По первому углу находимъ полюсъ грани $(\bar{1}01)$, а, имѣя его, по угламъ 4) и 5) проводимъ два пояса, какъ показано на фигурѣ, и тогда въ пересѣченіи проведенныхъ четырехъ поясовъ сразу опредѣляются полюсы граней $(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1)$, $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}3)$; Такую оріентировку діаграммы я считаю правильною, потому что при этомъ псевдоплоскость симметріи этого триклиннаго тригоналиднаго кристалла, выражающаяся поясомъ $(001):(11\bar{1})$ получаетъ нормальное положеніе на стереографической сѣткѣ [1]).

Теперь посмотримъ, какъ по этимъ даннымъ вычислить координаты какихъ угодно граней этого кристалла.

Начнемъ съ разсмотрѣнія величинъ координатъ у точки $(01\bar{1})$.

Поясъ $\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\\bar{1}01\end{vmatrix}$ примемъ за $|10|$, а поясъ $\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\1\bar{1}1\end{vmatrix}$ за $|01|$. Въ такомъ случаѣ $|11|=|10|+|01|$, а $|21|=2|10|+|01|$; но $|10|=[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$, а $|01|=[011]$; слѣдовательно $|11|=[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]+[011]=[\bar{1}00]$, а $|21|=[\bar{2}\bar{2}\bar{2}]+[011]=$
$=[\bar{2}\bar{1}\bar{1}]$.

Итакъ, поясъ, опредѣляемый угломъ 38°6 относится не къ $|11|$, а къ $|21|$.

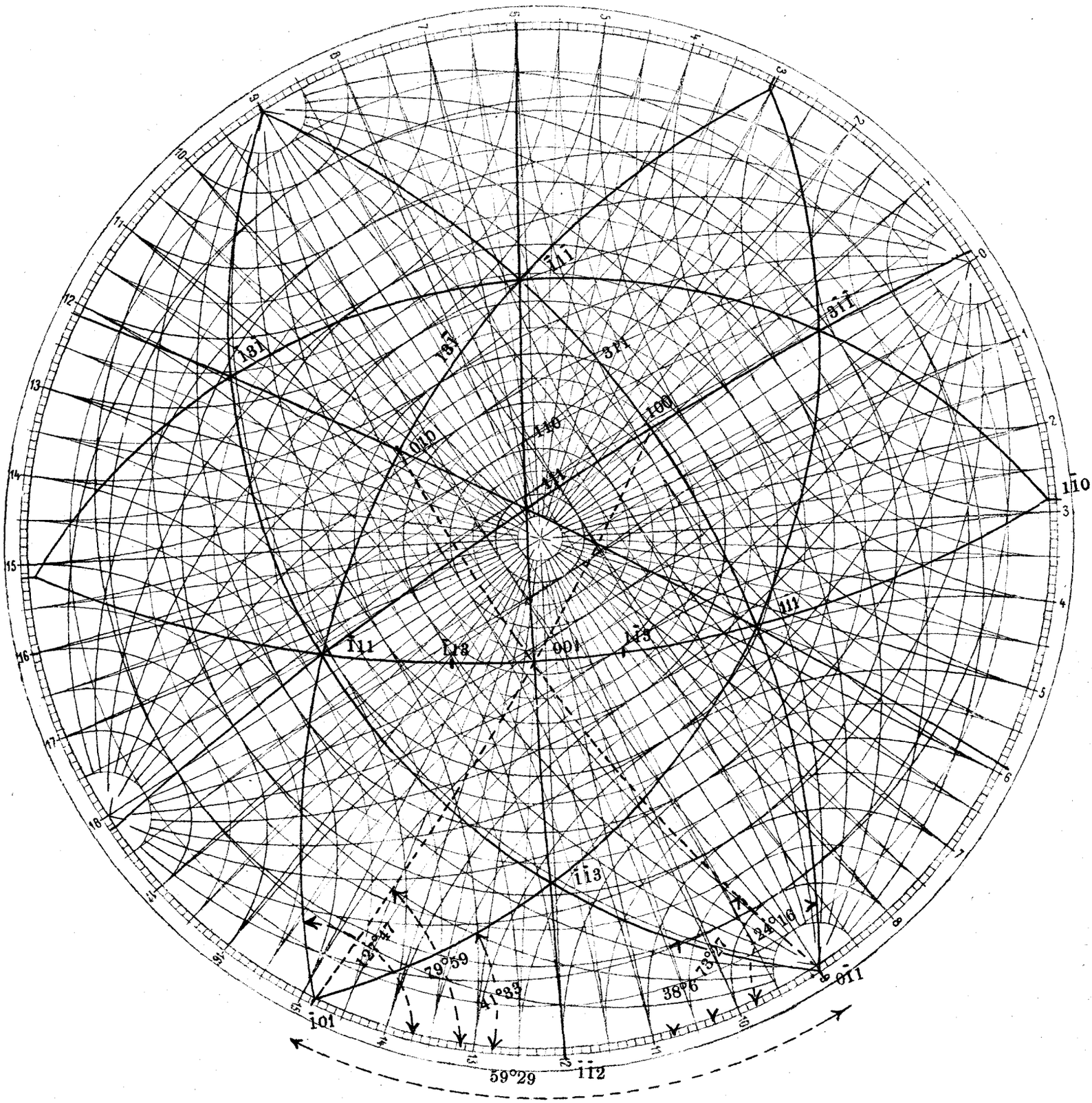
Полученный измѣреніемъ основной уголъ 38°6 есть не тотъ, который мы должны принять за основной то есть уголъ $|10|:|11|$. Но мы его легко получимъ по основной формулѣ

$2\ \mathrm{cotg}\ |11|=\mathrm{cotg}\ |01|+\mathrm{cotg}\ |21|=\mathrm{cotg}\ (124°16)+$
$+\mathrm{cotg}\ (38°6)=-0{,}68130+1{,}27534=0{,}59404$; значитъ $\mathrm{cotg}\ |11|=0{,}29702=\mathrm{cotg}\ 73°27$:

Именно эта координата и относится къ гранямъ (001), (010) и (011), потому что $\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\001\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\010\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\bar{1}1\\011\end{vmatrix}$
$=[\bar{1}00]=|11|$.

[1]) Сокращенный курсъ кристаллографіи. С.-Петербургъ. 1910 стр. 253.

[1]) Напомню, что эта плоскость есть дѣйствительная псевдоплоскость симметріи потому, что ея полюсъ v съ соотвѣтствующимъ полюсомъ грани $(1\bar{1}0)$ дѣлаетъ наименьшій уголъ (этотъ полюсъ отмѣченъ на діаграммѣ крестикомъ)


$\bar{1}11$
$\bar{1}\bar{1}0$
$\bar{1}01$
$\bar{1}12$
$\bar{1}13$
$\bar{1}\bar{1}1$
$\bar{1}\bar{2}1$
$\bar{1}\bar{3}1$
$\bar{3}\bar{1}1$
$\bar{3}11$
$\bar{1}00$
$\bar{1}\bar{4}0$
$\bar{1}\bar{5}0$
$\bar{4}11$
$\bar{1}\bar{1}1$
$\bar{1}\bar{2}8$
$\bar{9}01$
$\bar{1}\bar{4}5$
$\bar{1}11$
$\bar{1}\bar{1}2$
$\bar{1}\bar{2}^\circ 41'$
$29^\circ 59'$
$41^\circ 39'$
$59^\circ 29'$
$38^\circ 6'$
$13^\circ 7'$
$24^\circ 16'$
$\bar{0}11$

Фиг.4.

Для грани (111) имѣемъ $\left|\begin{matrix}0\bar{1}1\\111\end{matrix}\right| = [\bar{2}11] = 2[\bar{1}\bar{1}\bar{1}] + 3[011] = 2|10| + 3|01| = |23|$.

Примѣняя основную формулу, найдемъ:

$$3\ \mathrm{cotg}\ (23) = \mathrm{cotg}\ (01) + 2\ \mathrm{cotg}\ (11) = \mathrm{cotg}\ (124°16) + 2\ \mathrm{cotg}\ (73°27) = -0{,}68130 + 0{,}59404 = 0{,}02919.$$

Итакъ, искомая координата есть 91°40, такъ какъ cotg 88°20 = 0,02910.

Ясно, что эта же координата относится и къ гранямъ $(1\bar{1}3)$, $(13\bar{1})$ и др.

Для грани (110) имѣемъ $\left|\begin{matrix}0\bar{1}1\\110\end{matrix}\right| = [\bar{1}11] = [\bar{1}\bar{1}\bar{1}] + 2[011] = |12|$.

Примѣняя основную формулу, найдемъ:

$$2\mathrm{cotg}\ |12| = \mathrm{cotg}\ (124°16) + \mathrm{cotg}\ (73°27') - 0{,}68130 + 0{,}29702 = -2 \times 0{,}19214.$$

Поэтому, искомая координата есть 100°53 (cotg 79°7 = 0,19214).

Легко понять, что такъ же мы выведемъ и координаты, соотвѣтствующія точкѣ $\bar{(}101)$.

И здѣсь также получаемъ, что $\left|\begin{matrix}\bar{1}01\\1\bar{1}1\end{matrix}\right| = |21|$, а за основной уголъ слѣдуетъ принять тотъ, который отвѣчаетъ поясу |11| то есть $\left|\begin{matrix}\bar{1}01\\001\end{matrix}\right|$. Повторяя то же, что въ предъидущемъ случаѣ, найдемъ для |11| уголъ 79°59; эта же координата относится и къ грани (100).

Такъ же найдемъ вторую координату для грани (111) — 97°2, а для грани (110) — 106°40.

Соединяя полученные результаты, мы, вмѣсто упомянутыхъ основныхъ угловъ, получаемъ теперь.

1) $(0\bar{1}1) : (\bar{1}01) = 59°29$

полюсъ $(0\bar{1}1)$ 2) $|01| = 124°16$; 3) $|11| = 73°27$

„ $(\bar{1}01)$ 4) $|01| = 127°47$; 5) $|11| = 79°59$

и вмѣстѣ съ тѣмъ составляемъ списокъ координатъ слѣдующихъ граней:

	100	010	001	110	$1\bar{1}1$	$\bar{1}11$	$\bar{1}\bar{1}1$	$1\bar{1}3$	$13\bar{1}$	$31\bar{1}$	111 ...
пол. $(0\bar{1}1)$	124°16	73°27	73°27	100°53	124°16	124°16	38°6	38°6	91°40	124°16	91°40 . . .
пол. $(\bar{1}01)$	79°59	127°47	79°59	106°40	127°47	41°33	127°47	41°33	127°47	97°47	97°2 ...

И все это мы достигли путемъ нѣсколькихъ сложеній и вычитаній (не считая нѣсколькихъ дѣленій на простыя цѣлыя числа).

Однако непосредственно основная формула непримѣнима для граней главнаго пояса, то есть пояса, въ которомъ находятся обѣ исходныя грани (въ данномъ случаѣ пояса [111]) потому что въ этомъ случаѣ всѣ углы пріобрѣтаютъ величину 0 или π.

Тѣмъ не менѣе очевидно, что приведенныхъ пяти константъ вполнѣ достаточно для опредѣленія всего комплекса, и значитъ, этихъ данныхъ логически достаточно, чтобы вычислить эти углы. Если мы въ дѣйствительности юстировали по обѣимъ исходнымъ гранямъ, то собственно при каждой юстировкѣ мы получили (въ видѣ координатъ ρ) углы между этими гранями и всѣми другими, находящимися въ ихъ поясѣ; отсюда видимъ, что если кромѣ нихъ есть еще хоть одна грань въ этомъ поясѣ, то, практически говоря, никакихъ вычисленій больше не требуется, такъ какъ, имѣя въ поясѣ по меньшей мѣрѣ два угла, всѣ остальные уже можемъ вычислять по основной формулѣ.

Впрочемъ, это практическое рѣшеніе вопроса, имѣетъ и свое неудобство, такъ какъ можетъ привести къ числамъ, находящимся въ противорѣчіи съ принятыми основными углами.

Поэтому, ради полной обстоятельности изслѣдованія полезно для этого спеціальнаго случая вывести и спеціальную формулу, которая, впрочемъ, отличается не меньшею простотою, чѣмъ и основная формула, что, по существу дѣла, и слѣдовало ожидать.

Выберемъ для вычисленія промежуточную грань, то есть такую, индексы которой получаются суммированіемъ индексовъ обѣихъ исходныхъ граней (въ нашемъ случаѣ $(\bar{1}\bar{1}2) = (0\bar{1}1) + (\bar{1}01)$.

Теперь вообразимъ себѣ поясъ, заключающій въ

себѣ эту грань и еще какую-нибудь, въ сущности совершенно произвольную, лишь бы она не принадлежала поясу исходныхъ граней. Въ этомъ поясѣ мы можемъ вообразить себѣ безконечное множество различныхъ граней, въ томъ числѣ и такихъ, которыя по своему положенію въ какой угодно степени приближаются къ промежуточной грани. Для каждой такой грани мы можемъ по основной формулѣ вычислить координаты, а если возьмемъ такую, которая безконечно-близка къ промежуточной, то ея координатами будутъ безконечно-малые углы (въ сущности, безконечно мало отличающіеся отъ значеній 0 и π), но все-таки и для нихъ основная формула остается приложимою, и потому для каждой такой грани будемъ имѣть опредѣленное отношеніе между координатами—углами и ихъ котангенсами, которые въ данномъ случаѣ могутъ быть замѣнены обратными отношеніями синусовъ (такъ какъ косинусы этихъ угловъ безконечно приближаются къ 1-цѣ), отношенія же синусовъ въ полученномъ сферическомъ трехугольникѣ, двѣ другія вершины котораго соотвѣтствуютъ исходнымъ гранямъ, равны отношенію синусовъ противоположныхъ сторонъ то есть угловъ, образуемыхъ разсматриваемою гранью съ обѣими основными, а эти углы въ сущности и не отличаются отъ искомыхъ угловъ съ тѣми же гранями, грани промежуточной (въ данномъ случаѣ $\bar{1}\bar{1}2$).

Въ предѣлѣ эти отношенія становятся математически вѣрными, и значитъ наша задача сводится къ отысканію символовъ граней нѣкотораго, въ сущности произвольнаго пояса, вычисленію для этой грани угловъ по основной формулѣ и переходу къ предѣлу.

Выберемъ для пояса напр. грань (111). Тогда, какъ извѣстно изъ элементовъ кристаллографіи, символъ любой грани пояса получится выраженіемъ $x(\bar{1}\bar{1}2)+y(111)$, гдѣ x и y какія-угодно цѣлыя числа; этотъ символъ есть, слѣдовательно, $(-x+y;\ x+y;\ 2x+y)$.

По отношенію къ исходной грани $(0\bar{1}1)$ эта грань образуетъ поясъ $\begin{vmatrix} -x+y; & -x+y; & 2x+y \\ 0 & \bar{1} & 1 \end{vmatrix} = [x+2y;\ x-y;\ x-y]$.

Чтобы составить его изъ символовъ исходныхъ граней поясовъ то есть [111] и [011], нужно составить:

$$[x+2y]\ [111]+3y[011]=[x+2y\ ;\ x+2y\ ;\ x+2y]$$

$$[0\ .\ 3y\ .\ 3y]=[x+2y\ ;\ x-y\ ;\ x-y].$$

Итакъ, поясовый символъ, соотвѣтствующій взятой грани есть $|x+2y\ ;\ 3y|$.

Примѣняя основную формулу для этого пояса, найдемъ, координагу $3y\ \mathrm{cotg}\,|mn|=(y-x)\ \mathrm{cotg}|01|+(x+2y)\ \mathrm{cotg}|11|$.

Для каждой грани, безконечно близкой къ грани $(\bar{1}\bar{1}2)$, число y безконечно мало сравнительно съ числомъ x, а потому въ предѣлѣ имѣемъ $3y\ \mathrm{cotg}|mn|=-x\ \mathrm{cotg}|01|+x\ \mathrm{cotg}|11|=x(\mathrm{cotg}|11|-\mathrm{cotg}|01|)$. Такое же выраженіе мы имѣемъ для координаты той же грани, какъ опредѣляющей поясъ съ $(\bar{1}01)$; для отличія отмѣтимъ соотвѣтственныя выраженія апострофами то есть

$3y\ \mathrm{cotg}'|mn|=-x\,\mathrm{cotg}''|01|+x\ \mathrm{cotg}'|11|=x(\mathrm{cotg}'|11|-\mathrm{cotg}'|01|)$, а отсюда вытекаетъ соотношеніе

$$\frac{\mathrm{cotg}\,|mn|}{\mathrm{cotg}'|mn|}=\frac{\mathrm{cotg}\,|11|-\mathrm{cotg}\,|01|}{\mathrm{cotg}'|11|-\mathrm{cotg}'|01|}=k.$$

Если означимъ грань $(0\bar{1}1)$ чрезъ a, грань $(\bar{1}01)$ чрезъ b, а грань $(\bar{1}\bar{1}2)$ чрезъ e, то, согласно сказанному выше, получимъ:

$$\frac{\mathrm{cotg}\,|mn|}{\mathrm{cotg}'|mn|}=\frac{\sin'|mn|}{\sin\,|mn|}=\frac{\sin(ae)}{\sin(be)}=k \text{ или } \sin(ae)=k\cdot\sin(be)$$

Вотъ это и есть та искомая дополнительная формула, замѣчательная нетолько по своей простотѣ, но и по тѣмъ слѣдствіямъ, которыя изъ нея вытекаютъ.

Въ самомъ дѣлѣ, постоянная k есть отношеніе разностей котангенсовъ основныхъ угловъ при исходныхъ граняхъ. Изъ этой формулы заключаемъ, что для всѣхъ комплексовъ съ общимъ угломъ ab (первымъ основнымъ угломъ) раздѣленіе его на двѣ части ac и cb остается постояннымъ, если остается постоянною величина k, а эта величина остается постоянною, если постоянно отношеніе разностей котангенсовъ основныхъ угловъ при исходныхъ граняхъ.

Въ частности, для моноклинныхъ кристалловъ, когда псевдоплоскость симметріи замѣняется настоящею плоскостью симметріи, основные углы попарно становятся равными, а величина k пріобрѣтаетъ значеніе 1-цы, а потому промежуточная грань e становится равнодѣлящею, то есть $ae=be$, и тогда конечно, никакихъ вычисленій для этого пояса не нужно.

Для того, чтобы по этой формулѣ произвести вычисленіе угла (be), замѣтимъ, что

$$\sin(ae)=\sin(ab-be)=\sin(ab)\cos(be)-\cos(ab)$$
$$\sin(be)=\sin(ab)\sqrt{1-\sin^2(be)}-\cos(ab)\sin(be).$$

Отсюда, возвышая обѣ части равенства въ квадратъ, находимъ

$$\sin^2 ab + \cos^2(ab)\sin^2(be) + 2\sin(ae)\cos(ab)\sin(be) = \\ = \sin^2(ab)\ [1 - \sin^2(be)]$$

или $k^2\sin^2 be + \cos^2(ab)\sin^2(be) + 2k\sin^2(be)\cos(ab) = \\ = \sin^2(ab)[1 - \sin^2(be)]$

$$\text{и значитъ } \sin^2 be = \frac{\sin^2(ab)}{k^2 + 2k\cos(ab) + 1} = \\ = \frac{\sin^2(ab)}{[k + \cos(ab)]^2 + \sin^2(ab)}\ ^1).$$

Конечно, вычисленіе по этой формулѣ менѣе удобно, чѣмъ по основной; но вѣдь для составителя діаграммы она совсѣмъ не нужна, такъ какъ полюсы граней и въ этомъ поясѣ, какъ и всѣ другіе, легко получаются по пяти основнымъ угламъ.

Она можетъ понадобиться для автора кристаллографическаго изслѣдованія, хотя бы для того, чтобы свѣрить результаты, полученные по ней съ результатами непосредственнаго измѣренія. Если же автора изслѣдованія приведетъ грубо невѣрныя числа для граней пояса исходныхъ граней, то и составитель діаграммы не можетъ не замѣтить этихъ ошибокъ.

Конечно, и грани этого пояса однозначно опредѣляются только двумя координатами; но въ этомъ случаѣ координаты выражаютъ углы съ исходными гранями, а не углы между поясами; кромѣ того, въ этомъ случаѣ обѣ координаты связаны простымъ соотношеніемъ.

Если считать въ опредѣленныхъ направленіяхъ положительные и отрицательные углы, то всегда сумма этихъ двухъ угловъ будетъ равна первому основному углу, а потому, при этомъ условіи, можно ограничиться и одною координатою.

Вотъ система измѣреній, вычисленій и изложенія, которую я считаю простѣйшею и считаю своимъ долгомъ усиленно рекомендовать вниманію кристаллоизмѣрителей. Для составителя діаграммъ пять основныхъ угловъ, по которымъ непосредственно получаются шесть граней, изъ коихъ двѣ исходныя, открываютъ простѣйшій путь для нахожденія полюсовъ всѣхъ другихъ наблюденныхъ граней, насколько онѣ нужны для составленія символа комплекса, а слѣдовательно и для опредѣленія неизвѣстнаго вещества. Въ случаѣ сомнѣній для каждой грани въ нѣсколько минутъ можно вычислить даже точныя значенія координатъ, а слѣдовательно и провѣрить приводимыя числа. Но первый описатель долженъ помнить капитальное значеніе основныхъ угловъ, а потому въ вѣрности напечатанія этихъ угловъ нужно убѣдиться самымъ внимательнымъ образомъ, также какъ и въ символахъ тѣхъ граней, къ которымъ относятся эти числа. Остальныхъ чиселъ можно и не приводить; но если они приведены и въ нихъ окажутся ошибки, то это существенной роли не играетъ.

При примѣненіи этой системы вычисленій нужно имѣть въ виду, что цѣль ея—достиженіе высшей простоты всѣхъ операцій; вещества же индивидуальны, а потому каждый изслѣдователь естественно можетъ избрать тѣ основныя данныя, которыя дадутъ простѣйшія операціи для даннаго случая.

Въ числѣ этихъ соображеній будетъ, конечно соображеніе о выборѣ за основныя наиболѣе постоянныхъ, то есть структурно-важнѣйшихъ граней; обыкновенно такія грани бываютъ и лучше образованы и имѣютъ наибольшую величину, хотя это бываетъ и не всегда. Въ общемъ теорія структуры кристалловъ для каждаго даннаго случая предвидитъ такія грани, а потому можно и предусмотрѣть, какія во всякомъ данномъ случаѣ слѣдуетъ выбрать за основныя.

Это будетъ особенно наглядно для кристалловъ кубической сингоніи, между которыми теорія различаетъ три структуры: гексаэдрическую, октаэдрическую и додекаэдрическую. Въ первомъ случаѣ вообще преобладаетъ {100}, затѣмъ идетъ {110} и на третьемъ мѣстѣ стоитъ {111}. Во второмъ случаѣ первое мѣсто занимаетъ форма {110}, а въ третьемъ случаѣ форма {111}. Очень часто бываетъ, что только форма первой важности и появляется. Но если бы появилась только форма {100}, то есть

---

[1]) Для четвертой гармонической грани e', сопряженной грани e по отношенію къ парѣ граней a и b, имѣемъ

$$2\operatorname{cotg}(ba) = \operatorname{cotg}(be) + \operatorname{cotg}(be'),$$

откуда вычисляется $\operatorname{cotg}^2 be' = \frac{(k - \cos ba)^2}{\sin^2 ba}$ или $\sin^2(be') = \frac{\sin^2(ba)}{(k - \cos ba)^2 + \sin^2(ba)}$. Если означимъ $b = |10|$, $a = |01|$, то $e = |11|$, а $e' = |\bar{1}1|$ то есть ея символъ составляется изъ разностей индексовъ граней b и a. Далѣе, такъ какъ $\sin(ee') = \sin(be' - be)$, то, раскрывая скобки и производя дальнѣйшее вычисленіе, получаемъ $\sin^2(ee') = \frac{4k^2\sin^2(ab)}{(k^2 - \cos^2(ba)^2 + \sin^2(ba)}$. Формула эта выражаетъ весьма любопытную теорему для случая, когда уголъ ея прямой.

кубъ, то комплексъ не былъ бы еще опредѣленъ, а потому, по необходимости, комплексъ долженъ опредѣлиться еще формою {110} или {111}.

Будемъ считать изъ избранныхъ основными четырехъ граней a, b, c и d первыя двѣ тѣми, полюсы которыхъ составляютъ центры биполярныхъ координатъ.

Въ такомъ случаѣ для гексаэдрической структуры удобнѣе всего принять $a=(100)$, $b=(010)$, $c=(001)$, $d=(111)$. Выраженіе $(a=b)$ покажетъ равенство соотвѣтственныхъ угловъ для координатъ въ этихъ полюсахъ, то есть равенство $ac=bc$ и $ad=bd$, почему для этого случая константы можно представить въ такой формѣ:

1) $ab=90°0$; 2) $c=90°0$; 3) $d=45°0$; $(a=b)$.

Понятно, что c выражаетъ здѣсь уголъ между поясами $ab:ac$, а d—уголъ между поясами $ab:ad$.

Для октаэдрической структуры главнѣйшими, а можетъ быть и единственными, являются грани {110}; поэтому прежде всего представляется простѣйшій выборъ $a=(110)$, $b=(1\bar{1}0)$, $c=(011)$ $d=(01\bar{1})$, причемъ $(a=b)$ и $(c=d)$.

Если поясу $\left|\begin{smallmatrix}1\bar{1}0\\110\end{smallmatrix}\right|=[001]$ мы придадимъ значеніе $|10|$, а поясу $\left|\begin{smallmatrix}1\bar{1}0\\0\bar{1}1\end{smallmatrix}\right|=[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ — значеніе $|01|$, то получимъ $\left|\begin{smallmatrix}1\bar{1}0\\011\end{smallmatrix}\right|=[\bar{1}\bar{1}1]=2[001]+[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]=\bar{|}21|$, а потому нужно дать уголъ для $|10|:|11|=[001]:[1\bar{1}0]$, то есть грань (011) замѣнить гранью (001), и потому получимъ: $a=(110)$, $b=(1\bar{1}0)$, $c=(011)$, $d=(001)$, причемъ $(a=b)$.

Константы будутъ слѣдующія: 1) $ab=90^{0}0$, 2) $c=125^{0}16$, 3) $d=90^{0}0$.

Для додекаэдрической структуры главнѣйшими и большею частью единственными являются грани {111}; поэтому прежде всего представляется простѣйшій выборъ $a=(111)$, $b=(\bar{1}11)$, $c=(1\bar{1}1)$ $d=(\bar{1}\bar{1}1)$, причемъ $(a=b)$ и $(c=d)$, (фиг. 5).

Если поясу $\left|\begin{smallmatrix}111\\\bar{1}11\end{smallmatrix}\right|=[10\bar{1}]$ мы придадимъ значеніе (10), а поясу $\left|\begin{smallmatrix}111\\\bar{1}11\end{smallmatrix}\right|=[0\bar{1}1]$ значеніе $|01|$, то получимъ $\left|\begin{smallmatrix}111\\\bar{1}11\end{smallmatrix}\right|=[1\bar{1}0]=[10\bar{1}]+[0\bar{1}1]=|10|+|01|=|11|$. Отсюда выведемъ константы:

1) $ab=70^{0}32$; 2) $c=120^{0}0$; 3) $d=60^{0}0$.

Уже изъ этихъ примѣровъ можно усмотрѣть широкую примѣняемость такого выбора координатъ для каждаго даннаго индивидуальнаго случая, чтобы достичь во всѣхъ отношеніяхъ простѣйшихъ результатовъ.

Останавливаясь, въ частномъ случаѣ, на послѣднемъ примѣрѣ, мы видимъ, что если полюсы исходныхъ граней расположимъ на окружности проекціи, что важно для простоты графическаго проведенія поясовъ, опредѣляющихъ остальныя грани, мы получимъ необычную оріентировку кристаллическаго комплекса. Въ частности для грани $(\bar{1}00)$ получимъ положеніе какъ разъ посрединѣ между точками 1 и 0.

Однако отъ этой мы легко перейдемъ къ обычной оріентировкѣ комплекса, если повернемъ всѣ точки на сферѣ около оси A на уголъ 45^{0}; имѣя стереографическую сѣтку, это сдѣлать легко и точно. Тогда полюсъ $(\bar{1}00)$ совмѣстится съ точкою 1, а полюсы (111), $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$ и $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ станутъ соотвѣтственно въ положеніе точекъ 2, 3, 4 и 5.

Такой пріемъ для приведенія діаграммы въ обычный видъ приходится примѣнять довольно часто.

Наглядѣе и полнѣе всего будетъ представлено примѣненіе этой системы на рядѣ частныхъ реальныхъ примѣровъ. За таковыя я избираю результаты измѣреній, произведенныхъ въ нашемъ минералогическомъ Институтѣ.

Примѣръ 1.

Кристаллизація фенхилъ-ксантогеновой кислоты $\left.\begin{smallmatrix}C_{10}\,H_{17}\,OCS\\C_{10}\,H_{17}\,OCS\end{smallmatrix}\right\}S$, полученной въ лабораторіи проф. Чугаева. Измѣреніе произведено г. Еліашевичемъ.

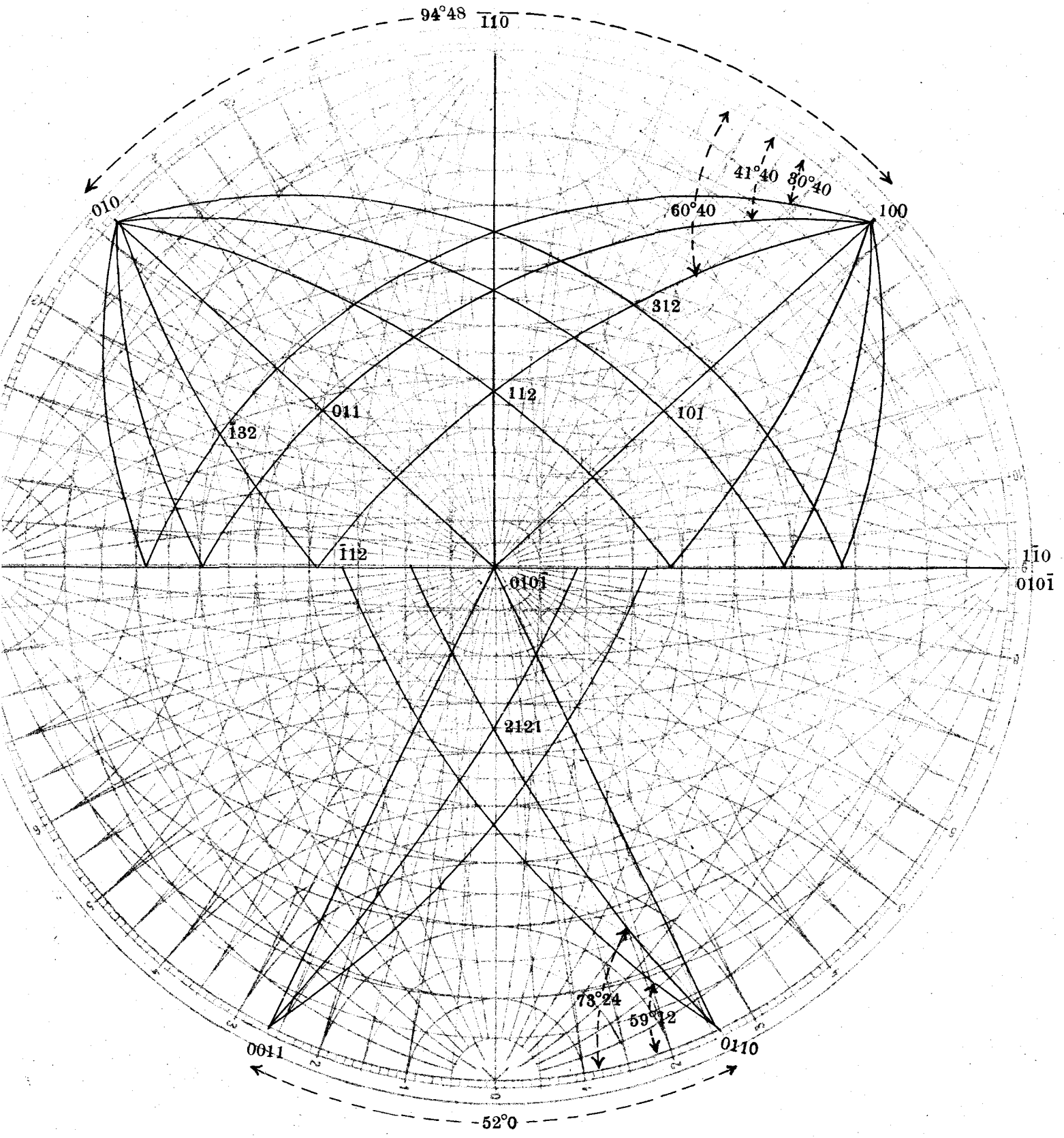
Для этихъ ромбическихъ кристалловъ выведенъ символъ комплекса $\left.\begin{smallmatrix}4o\\56^{0}46\\-2°24\end{smallmatrix}\right)$[1] и слѣдующія константы:

$a=(100)$; $b=(010)$; $(a=b)$; $c=(001)$; $d=(111)$.

---

[1]) Здѣсь главное число символа комплекса (56°46) выражаетъ уголъ (001):(111); нижнее число (—2°24) выражаетъ отклоненіе угла главной призмы отъ величины 45^{0}; причемъ знакъ — выражаетъ модальность второго рода, то есть, что полюсы граней (100) и (010) не перпендикулярны двойнымъ осямъ симметріи, а есть грани ромбической призмы.

40
57
-2


94°48
110
010
100
41°40
30°40
60°40
312
011
112
101
132
112
1$\bar{1}$0
0101
0101$\bar{}$
2121
73°24
59°12
0011
0110
-52°0

Фиг.5.

Уголъ $(ab) = 94^0 48$; уголъ $|ac| = 90^0 0$, уголъ $|ad| = 41^0 40$.

Наблюдена комбинація: {110}, {1$\bar{1}$0}, {101}, {112}, 1$\bar{1}$2}; какъ рѣдкія грани получены еще {132} и {3$\bar{1}$2}.

Согласно вышесказанному, подъ угломъ $|ac|$ здѣсь подразумѣвается уголъ между поясами $\begin{vmatrix}100\\010\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}100\\001\end{vmatrix}$, а подъ угломъ $|ad|$ подразумѣвается уголъ между поясами $\begin{vmatrix}100\\010\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}100\\111\end{vmatrix}$.

Если бы мы пожелали по этимъ даннымъ вычислить координаты всѣхъ остальныхъ граней, то для этого оказалось бы достаточнымъ всего два раза примѣнить основную формулу.

Чтобы опредѣлить координаты грани (112) мы имѣемъ

$$\begin{vmatrix}100\\112\end{vmatrix} = [0\bar{2}1] = 2\,[0\bar{1}0] + [001] = 2\,|01| + |10|,$$ а потому $|mn| = |12|$, и значитъ $2\ \mathrm{cotg}\,|12| = \mathrm{cotg}\,|01| + \mathrm{cotg}\,|11| = \mathrm{cotg}\,(41^0 40)$.

Легко находимъ $|12| = 60^0 40$.

Чтобы опредѣлить координаты грани (3$\bar{1}$2), мы имѣемъ

$$\begin{vmatrix}100\\3\bar{1}2\end{vmatrix} = [0\bar{2}\bar{1}] = 2\,[0\bar{1}0] - [001] = 2\,|01| - |10|,$$ а потому $|mn| = |\bar{1}2|$, и значитъ

$$2\ \mathrm{cotg}\,|\bar{1}2| = 3\ \mathrm{cotg}\,|01| - \mathrm{cotg}\,|11| = 3\ \mathrm{cotg}\,(90^0 0) - \mathrm{cotg}\,(41^0 40),$$ откуда

$$\mathrm{cotg}\,|\bar{1}2| = -\tfrac{1}{2}\ \mathrm{cotg}\,(41^0 40),$$ и значитъ уголъ

$$|\bar{1}2| = 119^0 20.$$

Собственно говоря, и для этого угла вычисленія было не нужно, такъ какъ по существу это уголъ дополнительный углу |12.|

Теперь можемъ составить табличку координатъ для всѣхъ граней, а именно (фиг. 5):

полюсъ	110	1$\bar{1}$0	$\bar{1}$00	$\bar{1}$12	1$\bar{1}$2	101	132	$\bar{1}$32
100	47°24	42°36	0°0	60°40	119°20	90°0	60°40	30°40.
010	47°24	137°24	94°48	60°40	60°40	41°40	30°40	119°20

Координата 30°40. здѣсь прямо получена вслѣдствіе соотношенія $\mathrm{cotg}\,\begin{vmatrix}312\\010\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}100\\010\end{vmatrix} = 3\,\mathrm{cotg}\,\begin{vmatrix}112\\010\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}100\\010\end{vmatrix}$.

Вотъ все, что нужно для полнаго вычисленія столь обильной комбинаціи.

Примѣръ 2.

Въ той же лабораторіи г. Кошелевымъ изъ спиртоваго раствора получено новое видоизмѣненіе абіетиновой кислоты $C_{20}\ H_{30}\ O_2$ съ т. пл. 143°.

Измѣреніе произведено г. Силантьевымъ.

Для этихъ ромбическихъ кристалловъ выведенъ символъ комплекса $\begin{matrix}6 & 1\\ 37^0 0 &)\\ +4^0 0 & \end{matrix}$ и слѣдующія константы:

$a = (0110);\ b = (0011);\ (a = b);\ c = (1000);\ d = (1110)$

уголъ $ab = 52^0 0$; уголъ $|ac| = 90^0 0$, уголъ $|ad| = 59^0 12$.

Наблюдена комбинація: {010$\bar{1}$}, {0110}, {1000}, {2121}.

Согласно вышесказанному, подъ угломъ $|ac|$ здѣсь подразумѣвается уголъ между поясами $\begin{vmatrix}0110\\0011\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}0110\\1000\end{vmatrix}$, а подъ угломъ $|ad|$ подразумѣвается уголъ между поясами $\begin{vmatrix}0110\\0011\end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix}0110\\1121\end{vmatrix}$.

Здѣсь комбинація такъ бѣдна, что остается вычислить только уголъ пояса для грани (2121).

Такъ какъ для кристалловъ гипогексагональнаго типа послѣдній, четвертый, индексъ легко выводится изъ двухъ предъидущихъ и для вычисленій является излишнимъ, то мы его и будемъ отбрасывать.

Для грани (112) имѣемъ

$$\begin{vmatrix}011\\212\end{vmatrix} = [12\bar{2}] = [100] + 2\ [01\bar{1}] = |10| + 2\ |01|,$$ а потому $|mn| = |12|$, и значитъ

$$2\ \mathrm{cotg}\,|12| = \mathrm{cotg}\,|01| + \mathrm{cotg}\,|11| = \mathrm{cotg}\,(59^0 12).$$

Отсюда $|12| = 73^0 24$.

Для всей комбинаціи составимъ табличку (фиг. 5).

Полюсъ	010$\bar{1}$	0110	1000	2121	110$\bar{1}$	1110	1011
0110	64°0	0°	90°0	73°24	120°48	90°0	59°12
0011	116°0	52°	90°0	73°24	59°12	59°12	90°0

Въ скобкахъ поставлены координаты граней, не представленныхъ въ комбинаціи.

---

[1]) Здѣсь главное число (37°0) выражаетъ съ графическою точностью уголъ (1000) : (1110); нижнее число (+ 4°0) выражаетъ превышеніе величины угла между гранями (010$\bar{1}$) : (0110) надъ 60°.

Слѣдующіе два примѣра внутренно связаны между собою и относятся къ смѣшаннымъ кристалламъ праваго и лѣваго камфероксима $C_{10}H_{16}NHO$, полученнымъ въ лабораторіи проф. Курнакова г. Келлемъ.

При изслѣдованіи послѣдняго оказалось, что при смѣшеніи этихъ кристалловъ въ пропорціи 25% до 75% получается изоморфный рядъ одной кристаллизаціи, а за этими предѣлами изоморфный рядъ другой кристаллизаціи.

Примѣръ 3.

Смѣшанные кристаллы *d.* и *l.* $C_{10}H_{16}NHO$ въ предѣлахъ 25%—75%.

Для этихъ моноклинныхъ кристалловъ выведенъ символъ комплекса $\begin{matrix}4o;+4.^{1})\\47\\1/2\end{matrix}$ и слѣдующія константы:

$a=(110)$, $b=(\bar{1}10)$; $(a=b)$; $c=(001)$; $d=(101)$

уголъ $(ab)=90°48$; уголъ $|ac|=86°54.$;

уголъ $|ad|=59°25$.

Наблюдена комбинація: {110}, {100}, {$\bar{1}01$}, {011}, {101}, {$\bar{1}11$}.

Чтобы вычислить координаты всѣхъ граней, достаточно сдѣлать это для граней (011) и ($\bar{1}11$).

Для пояса первой получаемъ равенство

$2\ \mathrm{cotg}\ 86°54. = \mathrm{cotg}\ 59°25 + \mathrm{cotg}\ x$, откуда $x=115°47$.

Для пояса второй получаемъ равенство

$2\ \mathrm{cotg}\ 115°47 = \mathrm{cotg}\ 86°54. + \mathrm{cotg}\ x$, откуда $x=134°26$.

Координаты выразятся табличкою (фиг. 6):

Полюсъ	110	100	$\bar{1}01$	011	101	$\bar{1}11$
110	0°0	45°24	115°47	115°47	59°25	134°25
$1\bar{1}0$	90°48	45°24	115°47	59°25	59°25	86°54.

Примѣръ 4.

Смѣшанные кристаллы *d.* и *l.* $C_{10}H_{16}NHO$ въ иныхъ предѣлахъ.

Для этихъ моноклинныхъ кристалловъ выведенъ символъ комплекса $\begin{matrix}4o;+10\ 1\\40\\0\end{matrix}$ и слѣдующія константы:

уголъ $(ab)=90°30$; уголъ $|ac|=83°2$.;

уголъ $|ad|=61°9$.

Наблюдена комбинація: {110}, {100}, {$\bar{1}01$}, {001}, {101}, {001}, {$\bar{1}11$}, {111}.

Чтобы вычислить координаты всѣхъ граней, достаточно сдѣлать это для граней (011), (111) и ($\bar{1}11$).

Для пояса первой получаемъ равенство

$2\ \mathrm{cotg}\ 83°2. = \mathrm{cotg}\ 61°9 + \mathrm{cotg}\ x$, откуда $x=107°3$.

Для пояса второй получаемъ равенство

$2\ \mathrm{cotg}\ 107°3 = \mathrm{cotg}\ 83°2. + \mathrm{cotg}\ x$, откуда $x=126°22$.

Для пояса третьей получаемъ равенство

$2\ \mathrm{cotg}\ 61°9 = \mathrm{cotg}\ 83°2. + \mathrm{cotg}\ x$, откуда $x+45°51$.

Координаты выразимъ табличкою (фиг. 6):

Полюсъ	110	100	$\bar{1}01$	011	101	001	$\bar{1}11$	111
110	0°0	45°15	107°3	107°3	61°9	83°2.	126°22	83°2.
$1\bar{1}0$	90°30	45°15	107°3	61°9	61°9	83°2,	83°2.	45°51.

Примѣръ 5.

Кристаллизація динитродіизопропила

$$(CH_3)_2\ C\ .\ C\ (CH_3)_2$$
$$\dot{N}O_2\dot{N}O_2$$

Кристаллы этого вещества получены проф. Демьяновымъ и измѣрены г. Орелкинымъ.

Для этихъ триклинныхъ (тригоналоидныхъ) кристалловъ выведенъ символъ комплекса $\begin{matrix}3d;+4\ \ 1\\72.;\ ?\\+1/2\end{matrix}$ и слѣдующія константы:

$a=(00\bar{1})$; $b=(111)$; $c=\bar{(}100)$; $d=(010)$

уголъ $ab=110°29$; уголъ $[ac]=115°47$; уголъ $|ad|=61°50$;

уголъ $[bc]=121°22$; уголъ $|bd|=60°10$

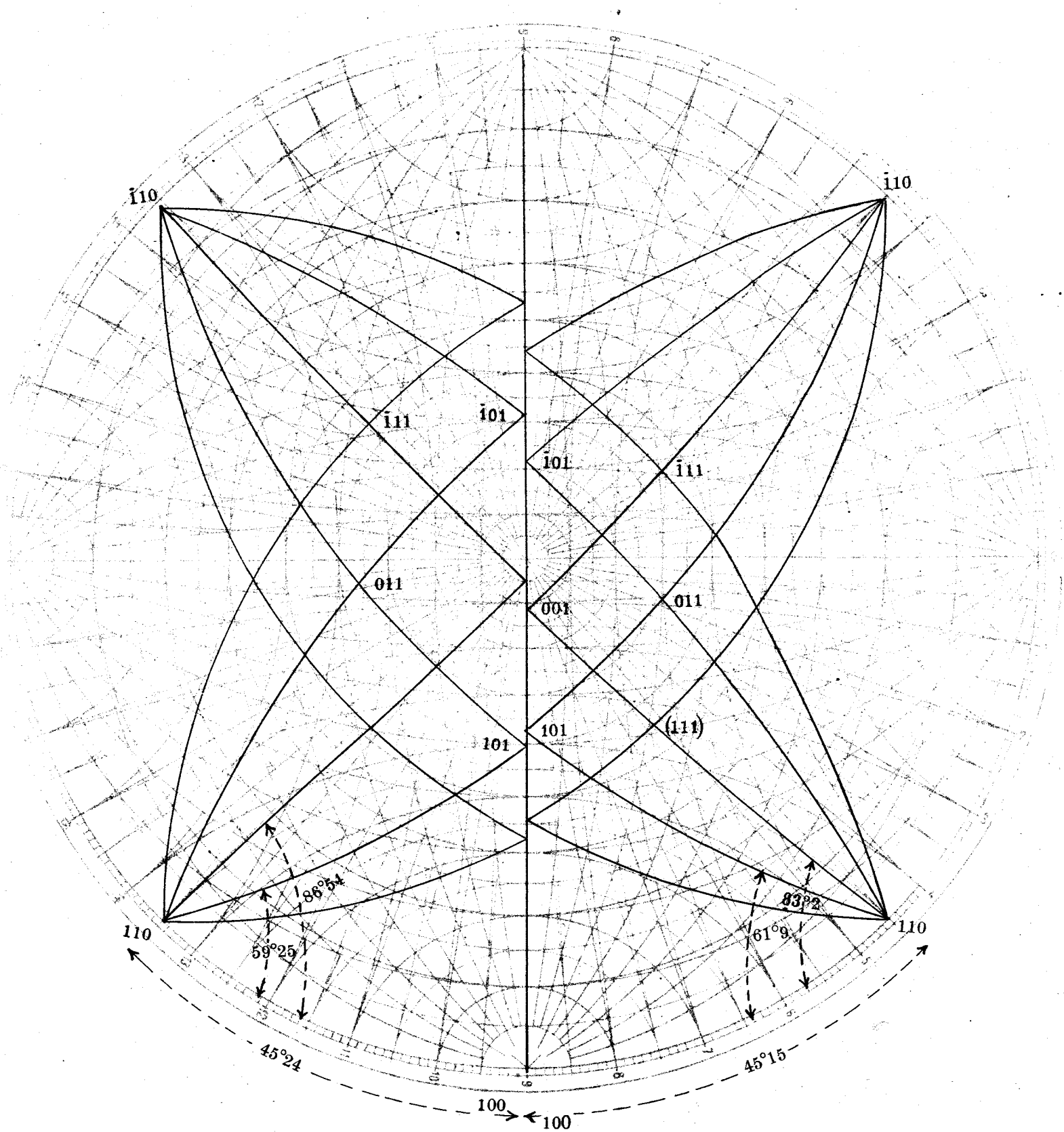
---

¹) Число, стоящее сверху и справа, выражаетъ величину моноклиннаго сдвига, а знакъ + выражаетъ, что плоскость симметріи есть плоскость (010) (а не 100), то есть, что уголъ (100) : (110) > (010) : (110).

¹) Здѣсь нижнее число 0 стоитъ вмѣсто 15′.

40;+4
47
1/2

40;+10
40
0



Фиг. 6.

Наблюдена комбинація {111}, {100}, {010}, {001}, {$\bar{1}$11}, {11$\bar{1}$}, {101}

Какъ видимъ, здѣсь приняты за исходныя грани не тѣ, которыя по символамъ были бы равны, если бы псевдо-плоскость симметріи (въ тригоналоидныхъ всегда грань 1$\bar{1}$0) стала плоскостью симметріи, и кристаллы стали бы моноклинными. Это сдѣлано ради сокращенія вычисленій, такъ какъ при тонкой пластинчатости по грани (111) естественно по ней и юстировать, и тогда обѣ упомянутыя координаты — углы [*bc*] и [*bd*]—получаются непосредственно измѣреніемъ, и только координаты [*ac*] и [*ad*] приходится вычислить по формуламъ сферической тригонометріи, хотя и весьма просто, потому что для сферическихъ трехугольниковъ *abc* и *abd* мы прямо имѣемъ изъ измѣренія, какъ извѣстныя, двѣ стороны и уголъ между ними (среднія выведены изъ 6 измѣреній).

Теперь видимъ, что координаты почти всѣхъ граней уже извѣстны. Но конечно, чтобы не встрѣтить противорѣчія въ числахъ нужно еще вычислить углы для грани (110) = (111) + (00$\bar{1}$) по приведенной дополнительной формулѣ то есть сначала опредѣлить k по формулѣ $\frac{\operatorname{cotg}[11]-\operatorname{cotg}[01]}{\operatorname{cotg}'[11]-\operatorname{cotg}'[01]}$, гдѣ cotg [11] = cotg [*ad*] ; cotg [01] = cotg [*ac*] ; cotg, [11] = = cotg [*bd*] и cotg, [01] = cotg [*bc*]

Вычисляемъ $\log k = 0{,}065061$, а отсюда $\sin^2(ae) = \frac{\sin^2(ab)}{k^2+2\cos(ab)+1}$ или $(ae) = 49^0 6'$

Остается вычислить уголъ для (11$\bar{1}$) = f по формулѣ 2 cotg $(49^0 6') = \operatorname{cotg}(110^0 29') + \operatorname{cotg} f$ откуда $f = 25^0 24'$ и наконецъ для грани ($\bar{1}$11) изъ полюса (00$\bar{1}$) получаемъ $2\ \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(115^0 47') + \operatorname{cotg}(61^0 50') = \operatorname{cotg}(88^0 30')$

Этимъ всѣ вычисленія и закончены, такъ какъ можемъ составить табличку для всѣхъ граней, а именно.

Полюсъ	111	001	1$\bar{1}$1	100	010	$\bar{1}$11	101
00$\bar{1}$	110°29	180°0	25°24	−64°13	+ 61°50	+ 88°30	−64°13
111	0°0	69°31	85°5	−58°38	+ 60°10	− 58°38	+ 60°10

Этотъ примѣръ служитъ особенно для того, чтобы показать широкую приспособляемость этой системы вычисленій къ каждому частному случаю, такъ какъ для исходныхъ граней можно вообще выбирать такія, какія изслѣдователю покажутся подходящими для наиболѣе простыхъ и удобныхъ наблюденій при достиженіи наибольшей точности результатовъ. Конечно, если затѣмъ тѣ же кристаллы попадутъ и другому изслѣдователю, то не могутъ же избраные пріемы для даннаго частнаго случая показаться неудобными.

Вообще же сравненіе результатовъ достижимо только тогда, когда слѣдующему изслѣдователю того же вещества извѣстны пріемы и въ частности, юстировка произведенная первымъ изслѣдователемъ, и тогда во всякомъ случаѣ для цѣлей сравненія достаточно произвести только одну юстировку.

Но предварительно сравненіе, хотя бы съ графическою точностью, достигается выводомъ символа комплекса, для чего выработаны самыя строгія правила, совершенно независимыя отъ употребленныхъ личныхъ пріемовъ; и если, хотя приближенно, получается тотъ же символъ комплекса, то этого уже достаточно, чтобы судить о существенной одинаковости обѣихъ комплексовъ.

Всѣ остальныя вычисленія по даннымъ константамъ производятся по напередъ даннымъ формуламъ сферической тетрагонометріи[1]).

Чтобы привести во всемъ разнообразіи относящіеся сюда примѣры, я сообщу результаты изслѣдованій кристалловъ, произведенныхъ въ нашемъ Минералогическомъ Институтѣ въ послѣднее время.

---

[1]) Эти формулы представлены въ моей статьѣ: «Основныя формулы сферической и плоской тетрагонометріи».

Этимъ именемъ означается тотъ отдѣлъ сферической тригонометріи, для рѣшенія задачъ котораго долженъ быть данъ сферическій четыреугольникъ.

Особенность этого отдѣла состоитъ не въ томъ, что всякіе углы вообще могутъ быть вычислены, а въ томъ, что для всѣхъ напередъ могутъ быть выведены общія формулы.

Кристаллы тетрагональной сингоніи.

1. Тетрааминоацетальплатохлоридъ.

$$\left[\begin{matrix}(CH_3CH_2O)_2CH\cdot CH_2\cdot NH_2 \\ (CH_3CH_2O)_2CH\cdot CH_2\cdot NH_2\end{matrix}\right]>Pt<\left[\begin{matrix}NH_2\cdot CH_2\cdot CH(OCH_2CH_3)_2 \\ NH_2\cdot CH_2\cdot CH(OCH_2CH_3)_2\end{matrix}\right] Cl_2.$$

Кристаллы этого вещества получены и изслѣдо-
$4h$
ваны г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $78°48$. Точка плавл. 130^0—131^0.

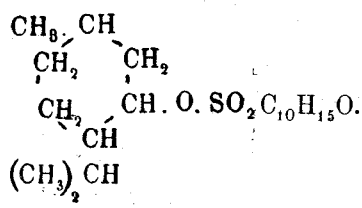
Константы: $a=(100); b=(010); c=(001); d=(111)$ $ab=90^0$; $(a=b)$; $|ac|=90^00$; $|ad|=15^039$.

Комбинація:	001	010	011	012	013	014	015	111
100	90^00	90^00	15^039	29^015	40^024	8^014	54^028	15^039
010	90^00	0^00	90^00	90^00	90^00	90^00	90^00	15^039.

2. Ментиловый эфиръ β камфоросульфоновой кислоты

Кристаллы этого вещества получены проф. Чугаевымъ и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Симво-
$4d$
лъ комплекса 62^038.

Строеніе



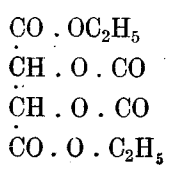
Константы: $a=(100); b=(010); c=(001); d=(111)$ $ab=90^00$; $(a=b)$; $|ac|=90^00$; $|ad|=53^048$.

Комбинація:	111	100	110	201	112
100	36^012	0^00	45^00	90^00	55^014
010	36^012	90^00	45^00	20^049	55^014

Кристаллы ромбической сингоніи.

3. Оксалилъ-виноградно-диэтиловый эфиръ.

Строеніе



Кристаллы получены г. Теару и изслѣдованы
6
г. Айвазовымъ [1]). Символъ комплекса $45°28$
$+6°15$

[1]) Авторъ первоначально вывелъ другую установку и другой символъ комплекса. Объ этомъ сказано дальше.

Константы: $a=(0110)$; $b=(0011)$; $c=(1000)$; $d=(1121)$; $ab=47°30$; $(a=b)$; $|ac|=90°0$; $|ad|=53°12$.

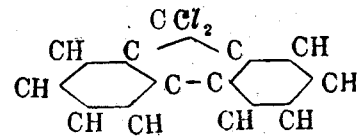
Комбинація:	1000	$110\bar{1}$	$010\bar{1}$	0011	$210\bar{1}$
0110	$90°0$	$126°48$	$66°15$	$47°30$	$110°30$.
0011	$90°0$	$53°12$	$113°45$	$0°0$	$69°29$.

4. Кодеинъ $C_{17}H_{17}NO(OH)(OCH_3).HO$. Полученъ изъ воднаго раствора при температурѣ $+20°C$. Кристаллы изслѣдованы г. Айвазовымъ.
$4o$
Символъ комплекса 49.
1

Константы: $a=(110)$; $b=(1\bar{1}0)$; $c=(001)$; $d=(101)$; $ab=92°16$; $(a=b)$; $|ac|=90°0$; $|ad|=59°56$.

Комбинація:	110	011
110	$0°0$	$120°3$.
$1\bar{1}0$	$92°16$	$59°56$.

5. Дихлорфлюоренонъ



Кристаллы получены Цвѣтковымъ (†) въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ. Символъ комплекса
6
57.
0

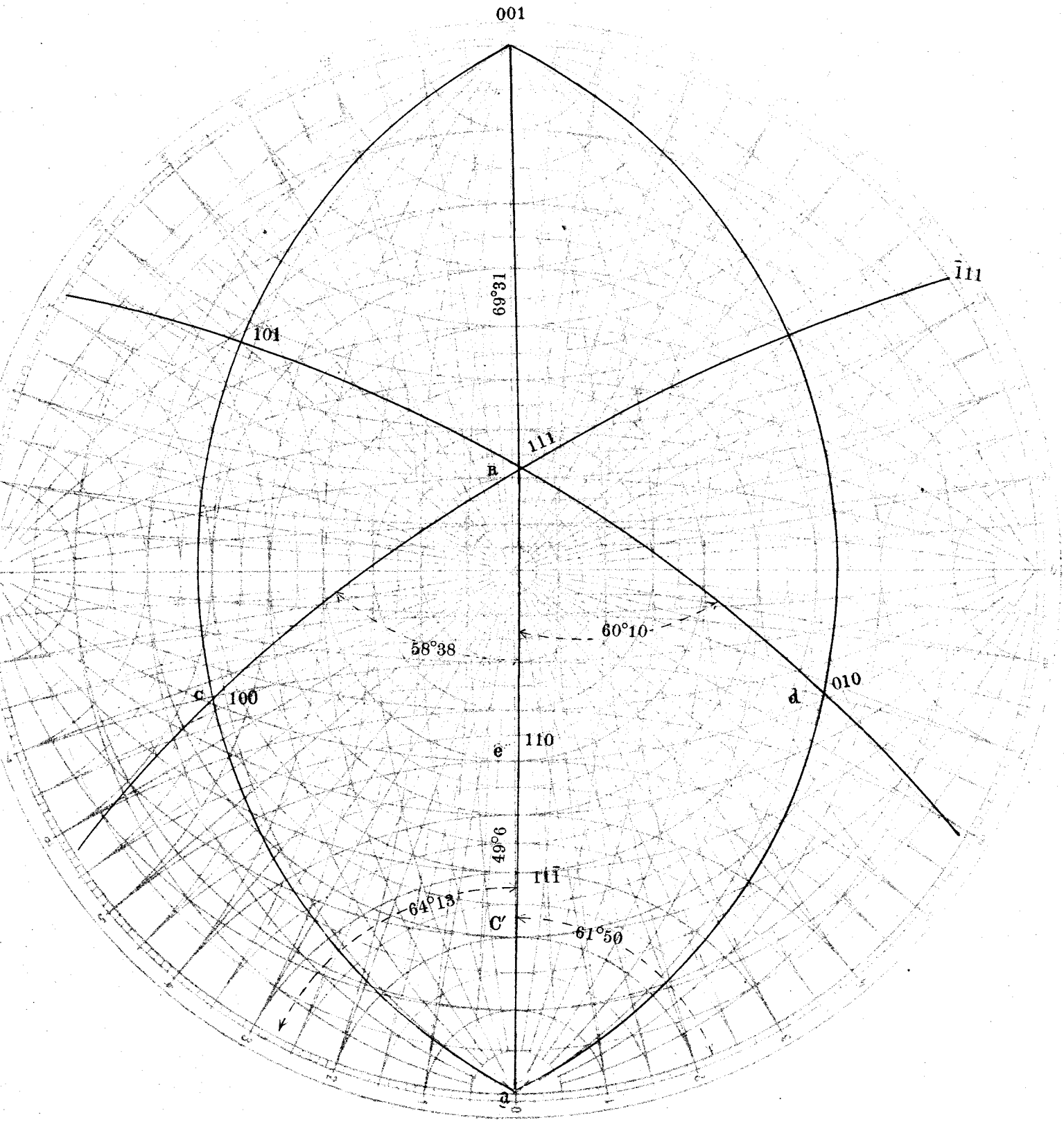
Константы: $a=(0110)$; $b=(0011)$; $c=(1000)$ $d=(1\bar{1}01)$; $ab=60°2$; $(a=b)$; $|ac|=90°0$; $|ad|=65°51$

Комбинація:	$010\bar{1}$	0110	0121	$130\bar{3}$
0110	$59°59$	$0°0$	$30°1$	$143°21$.
0011	$120°1$	$60°2$	$30°1$	$36°38$.

3d;+4

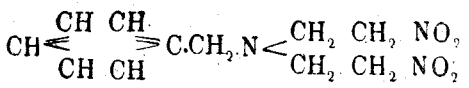
72. ; $\frac{1}{?}$

$+^1/_2$



Фиг. 7.

6. Динитроэтиленбензиламинъ



Кристаллы получены проф. Демьяновымъ и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $\begin{matrix}4o\\48\\1.\end{matrix}$

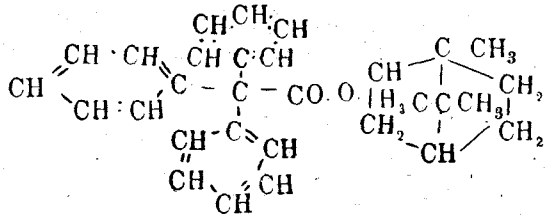
Константы: $a=(110)$; $b=(\bar{1}10)$; $c=(001)$; $d=(111)$; $ab=87°10$; $(a=b)$; $|ac|=90°0$; $|ad|=60°37$.

Комбинація:	100	110	101
110	46°25	0°0	119°23
$\bar{1}10$	133°35	87°10	60°37.

Кристаллы моноклинной сингоніи.

7. Борниловый эфиръ трифенилоуксусной кислоты.

Строеніе

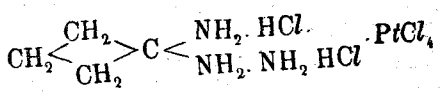


Кристаллы получены гг. Чугаевымъ и Глининымъ и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $\begin{matrix}4o\\44\\1.\end{matrix}$; $\begin{matrix}3.\end{matrix}$

Константы: $a=(\bar{1}10)$; $b=(110)$; $c=(001)$; $d=(011)$ $ab=82°39$; $|ac|=90°0$; $|ad|=64°43$; $|bc|=90°0$; $|bd|=65°59$.

Комбинація:	$\bar{1}00$	$\bar{1}10$	110	011	111
$\bar{1}10$	50°33	0°0	82°39	64°43	55°30
110	133°15	82°39	0°0	65°59	90°0.

8. Хлороплатинатъ



Эти краснобурые кристаллы получены проф. Демьяновымъ и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $\begin{matrix}4d\\74.\\6.\end{matrix}$; $+3$.

Константы: $a=(\bar{1}00)$; $b=(001)$; $c=(010)$; $d=(111)$; $ab=93°16$; $|ac|=90°0$; $|ad|=69°5$; $|bc|=90°0$; $|bd|=51°29$.

Комбинація:	100	010	001	111	$1\bar{1}\bar{1}$	$\bar{1}11$	$\bar{1}1\bar{1}$	$\bar{1}03$	133	$13\bar{3}$	$\bar{1}33$	$\bar{1}3\bar{3}$
$\bar{1}00$	180°0	90°0	93°16	69°5	120°55	69°5	120°55	56°23	69°5	120°55	69°5	120°55
001	76°44	90°0	0°0	51°29	51°29	128°81	128°31	36°53	75°8.	75°8.	104°51.	104°51

9. Диметилселенидддиіодпалладіумъ

$$PdJ_2 2(CH_3)_2Se.$$

Эти чернокрасные пластинчатые (по 111) кристаллы получены въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $\begin{matrix}3d\\62\\-5\end{matrix}$; $+13$.

Константы: $a=(111)$; $b=(11\bar{1})$; $c=(1\bar{1}0)$; $d=(100)$.

$ab=77°46$; $|ac|=90°0$; $|ad|=64°33$; $|bc|$ $90°0$; $|bd|=69°11$.

Комбинація:	111	$11\bar{1}$	$1\bar{1}1$	100	$2\bar{1}1$
111	0°0	77°46	64°33	64°33	90°0
$11\bar{1}$	77°46	0°0	120°46	69°11	69°11

10. Абіетиновая кислота $C_{20}H_{30}O_2$.

11. Изосильвиновая кислота $C_{41}H_{60}O_5$ т. пл. 165° $[\alpha]_d=-88°$.

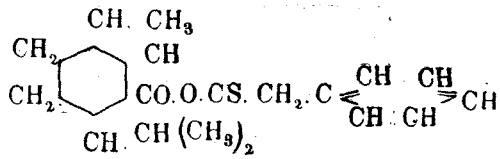
Кристаллы перваго вещества получены г. Кошелевымъ а второго г. Теару въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ, который нашелъ одинаковость ихъ въ предѣлахъ погрѣшности наблюденій. Символъ комплекса $\begin{matrix}3d\\46\\-1\end{matrix}$; $+16$.

Константы: $a = (100)$; $b = (010)$; $c = (001)$; $d = (11\bar{1})$
$ab = 84°28$; $(a = b)$; $|ac| = 71°32$; $|ad| = 112°43$.

Комбинація:	100	001	$1\bar{1}1$	$11\bar{1}$	$\bar{1}01$	$01\bar{1}$
100	0°0	71°32	112°43	112°43	71°32	112°43
010	84°28	71°32	42°37	112°43	112°43	71°32

12. Бензиловый эфиръ ментилксантогеновой кислоты.

Строеніе



Кристаллы винножелтаго цвѣта получены проф. Чугаевымъ и изслѣдованы г. Орелкинымъ.

6 ; 3.
Символъ комплекса 20.
—6.

Константы: $a = (1011)$; $b = (\bar{1}011)$; $c = (010\bar{1})$; $d = (0110)$.
$ab = 140°8$; $(a = b)$; $|ac| = 121°49$; $|ad| = 72°50$.

Комбинація:	$010\bar{1}$	0110	0011	$021\bar{1}$	1011
1011	121°49	72°50	70°9	98°51	0°0
$\bar{1}011$	121°49	72°50	70°9	98°51	140°18.

13. Диметилселенидъ-дихлорплатина $2[(CH_3)_2Se]\ Cl_2 . Pt$.

Желтые кристаллы получены г. Фрицманомъ въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ. Символъ комплекса
6 ; —12
71 .
+1 .

Константы: $a = (010\bar{1})$ $b = (1000)$; $c = (0121)$ $d = (10\bar{1}\bar{1})$.

$ab = 78°9$; $|ac| = 90°0$; $|ad| = 67°55$; $|bc| = 90°0$; $|bd| = -61°54$.

Комбинація:	$010\bar{1}$	1000	$10\bar{1}\bar{1}$
$010\bar{1}$	0°0	78°9	67°55
1000	78°9	0°0	—61°54

14. Метиловый эфиръ холестеринксантогеновой кислоты

$C_{27}H_{45}O . CS . S . CH_3$.

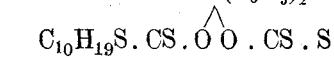
Кристаллы этого вещества получены г. Фоминымъ въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ. Символъ комплекса $\frac{6 ; 5}{36 \quad -7}$

Константы: $a = (0\bar{1}01)$; $b = (0110)$; $c = (1000)$; $d = (1011)$

$ab = 130°13$; $|ac| = 90°0$; $|ad| = 59°15$; $|bc| = 90°0$; $|bd| = 55°15$.

Комбинація:	$0\bar{1}01$	0110	0011	1011	$2\bar{1}12$
$0\bar{1}01$	0°0	130°13	55°51 .	59°15	73°26
0110	130°13	0°0	74°11 .	55°15	55°15

15. Диментилъ-дифенилъ-диксантогенидъ:



Кристаллы этого вещества получены Цвѣтковымъ (†) въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ.

6 ; +4.
Символъ комплекса: 35.
—2

Константы: $a = (0110)$; $b = (0011)$; $c = (1000)$; $d = (1\bar{1}\bar{2}\bar{1})$

$ab = 63°36$; $(a = b)$; $|ac| = 87°54.$; $|ad| = 120°36$.

Комбинація:	$010\bar{1}$	0110	0121	1000	$110\bar{1}$
0110	58°12	0°0	31°48	87°54 .	120°36
0011	121°48	63°36	31°48	87°54 .	56°24

Кристаллы триклинной сингоніи.

16. Дипропилселенидъ-дихлорпалладіумъ

$PdCl_2 . 2(C_3H_7)Se$

Кристаллы этого вещества получены въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Орелкинымъ. Символъ комплекса $\frac{4o ; -14.}{45} \quad \frac{4.}{-20.}$
1.

Константы: $a=(110)$; $b=(1\bar{1}0)$; $c=(00\bar{1})$; $d=(10\bar{1})$

$ab=93°4$; $|ac|=100°57$; $|ad|=74°52$; $|bc|=80°54$; $|bd|=56°29$.

Комбинація:	110	$1\bar{1}0$	$10\bar{1}$	$01\bar{1}$	$\bar{1}0\bar{1}$	100	010	$\bar{1}2\bar{1}$
110	0°0	93°4	74°52	74°52	100°57	44°24	41°33	74°52
$1\bar{1}0$	93°4	0°0	56°29	108°52	108°52	48°40	134°37	143°24.

17. Диметилселенидъ-дихлорпалладій $PdCl_2 \cdot 2[(CH_3)_2Se]$.

Эти кристаллы темновишневаго цвѣта получены г. Фрицманомъ въ лабораторіи проф. Чугаева и изслѣдованы г. Айвазовымъ. Символъ комплекса $\begin{matrix}3h\,;+13 & 5.\\ 47.\,; & +80.\\ -3\end{matrix}$

Константы: $a=(010)$; $b=(100)$; $c=(001)$; $d=(11\bar{1})$

$ab=86°58$; $|ac|=74°45$; $|ad|=123°45$; $|bc|=70°43$; $|bd|=124°7$.

Комбинація:	010	100	001	$0\bar{1}1$	$\bar{1}01$
010	0°0	86°58	74°45	74°45	123°45
100	86°58	0°0	70°43	124°7	70°43.

Изъ совокупности этихъ примѣровъ можно видѣть чрезвычайное упрощеніе, которое вводитъ новая система геометрическихъ константъ и вмѣстѣ съ тѣмъ чрезвычайное разнообразіе ея примѣненія.

Примѣненіе это приспособляется къ индивидуальности даннаго вещества, а именно за основныя грани и углы принимаются тѣ, которыя приводятъ къ простѣйшимъ операціямъ.

Но отсюда получается выводъ большой практической важности, а именно, что при системѣ зональныхъ вычисленій константы, характеризующія данное вещество, не зависятъ отъ принятой для него установки; установка можетъ измѣняться; константы остаются неизмѣнными.

Въ качествѣ реальнаго возьму примѣръ 3, для котораго мною былъ выведенъ символъ комплекса $\begin{matrix}4o\\ 35.\\ 5.\end{matrix}$

Первоначально авторъ изслѣдованія г. Айвазовъ привелъ другую установку и символъ комплекса, а именно $\begin{matrix}6\\ 45.\\ +6\end{matrix}$ и значитъ относилъ кристаллы къ гипогексагональному типу. Соотвѣтственно этому онъ конечно получилъ и другіе символы для представленныхъ формъ. Обѣ установки почти равнозначны по величинѣ цѣны.

Его символы получаются изъ приведенныхъ здѣсь примѣненіемъ детерминанта $\begin{vmatrix}010\\101\\002\end{vmatrix}$ то есть предположенные символы 010 110 100 101 120

первоначальные и 1000 $110\bar{1}$ $010\bar{1}$ 0110 $210\bar{1}$

Соотвѣтственно этому, при приведеніи константъ имъ устанавливалось: $a=0110$; $b=0011$; $c=1000$; $d=1121$

теперь 101 101 010 011

Приведенныя же числа вполнѣ сохранили свое значеніе.

Если бы онъ привелъ константы по дѣйствовавшей до сихъ поръ системѣ, пришлось бы для вычисленія новыхъ константъ произвести довольно большую работу, что теперь отпадаетъ само собою.

Это особенно важно при примѣненіи къ кристаллохимическому анализу, такъ какъ весьма нерѣдко правильная установка не устанавляется съ полною незыблемостью.

Теперь можно формулировать ходъ операцій, необходимыхъ для полнаго геометрическаго изслѣдованія кристаловъ одного вещества, предполагая, что гоніометръ вывѣренъ и удовлетворяетъ условіямъ, изложеннымъ выше.

Передъ каждымъ отдѣльнымъ рядомъ измѣреній слѣдуетъ начинать съ установки нуля, какъ упомянуто выше. Первое измѣреніе, приводящее къ составленію діаграммы въ стереографической проекціи, служитъ для ближайшаго ознакомленія съ кристалломъ и выбора основныхъ граней. Если вещество было уже описано, то нерѣдко это же первое измѣреніе позволяетъ вывести правильную установку и связанный съ нею символъ комплекса, а слѣдовательно и опредѣлить вещество по таблицамъ. Въ такомъ случаѣ изслѣдованіе этимъ и заканчивается, такъ какъ цѣль достигнута. Иногда для этого достаточно и четверти часа, а чаще больше, но не свыше часа.

Однако, въ большинствѣ случаевъ нужно произвести нѣсколько измѣреній, чаще всего около шести.

Но уже послѣ перваго юстировка производится по избранной грани, и тогда нѣсколько повторенныхъ измѣреній нетолько приводитъ къ установленію важнѣйшихъ формъ и отдѣленію отъ нихъ второстепныхъ и случайныхъ, которыя при выводѣ правильной установки въ разсчетъ не принимаются, но и даютъ основныя числа, изъ которыхъ выводятся среднія, служащія геометрическими константами. Остальныя координаты граней вычисляются по основной формулѣ, что совершается такъ скоро, что вычисленія эти могутъ быть провѣрены, пока кристаллъ не снятъ съ гоніометра, и такимъ образомъ получится сравненіе наблюдаемаго съ вычисленнымъ, что позволяетъ сейчасъ же избрать наиболѣе надежныя числа.

По моему опыту втеченіе полнаго дня можно вполнѣ измѣрить до десяти кристалловъ; для каждаго отдѣльнаго вычисленія нужно нѣсколько минутъ.

Вообще, полученныя среднія числа можно принять за окончательно установленныя величины основныхъ угловъ, и такимъ образомъ устанавливаются константы; уклоненія отдѣльныхъ чиселъ отъ средняго даютъ выраженіе для вѣроятной погрѣшности полученныхъ чиселъ.

Если юстировка дѣлается однажды, то для триклинныхъ кристалловъ (а въ извѣстныхъ случаяхъ и для моноклинныхъ) нужно посредствомъ формулъ сферической тригонометріи вычислить основные углы для другой исходной грани, а равно и произвести добавочныя вычисленія координатъ для нѣкоторыхъ граней, чѣмъ дѣло и заканчивается.

При описаніи новаго вещества, кромѣ діаграммы со строго опредѣленной для каждаго даннаго случая оріентировкой, полезно дать и изображеніе кристалла; конечно, это не столь существенно, такъ какъ чаще всего обликъ разныхъ кристалловъ одного и того же вещества весьма различенъ.

Какъ простѣйшій, выработанный у насъ пріемъ, является слѣдующій.

Сначала составляется отъ руки эскизикъ даннаго кристалла съ выставленіемъ на каждой его грани соотвѣтственныхъ символовъ. Изъ этого эскизика видно, какія именно грани въ данномъ кристаллѣ пересѣкаются съ другими и какая примѣрно длина соотвѣтственныхъ реберъ.

Чтобы по этому эскизику составить точный чертежъ, нужно только найти направленія реберъ, какъ они будутъ проектироватся съ опредѣленнаго и признаннаго наиболѣе удобнымъ угла зрѣнія. Такимъ образомъ, достаточно привести это для одного случая, чтобы понять, какъ это производить и во всѣхъ другихъ случаяхъ.

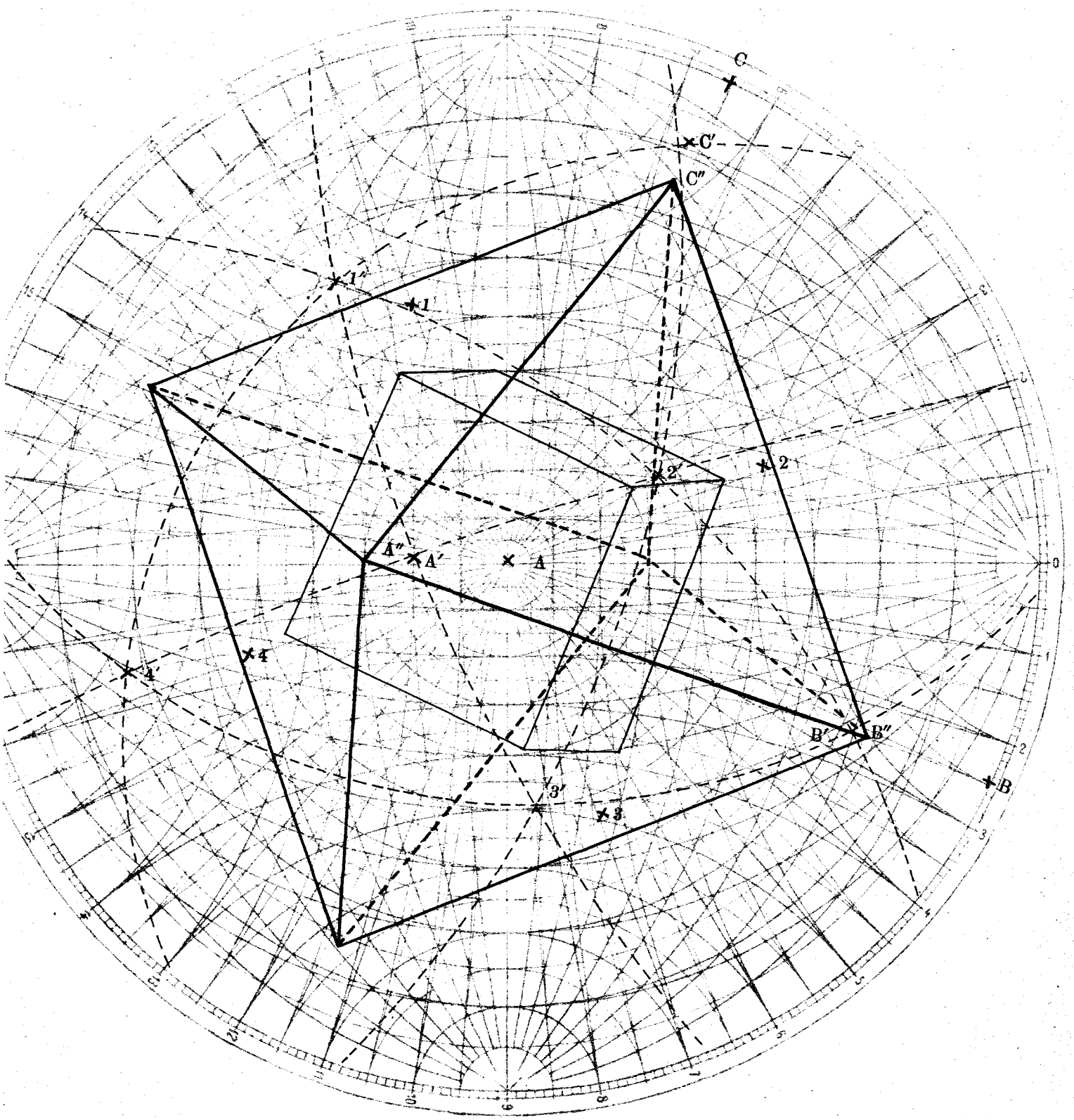
Способъ такого проектированія заимствую изъ учебнаго руководства. „Новая геометрія какъ основа черченія“ и примѣню его напр. для изображенія правильнаго октаэдра. Пусть данные грани октаэдра $(1\bar{1}1)$, (111), $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}\bar{1})$, которыя я отмѣчу соотвѣтственно цифрами 1, 2, 3, 4. Помѣщаю гномостереографическія проекціи этихъ граней на стереографической сѣткѣ, повороченной около центра на 25° какъ это видно на фиг. 11.

При этомъ, въ частности, оси октаэдра, будутъ проектироваться: въ точкѣ A—ось [100], въ точкѣ B—ось [010] и въ точкѣ C—ось [001]. Поворачиваю около одной оси сѣтки всѣ полюсы по параллельнымъ кругамъ на 20°; точки A, B и C придутъ въ точки A′, B′ и C′, а полюсы граней 1, 2, 3, 4 въ положеніе 1′, 2′, 3′, 4′.

На одной изъ осей напр. C беру произвольную точку C″ и нахожу проекціи сходящихся въ ней реберъ, представляющихъ пересѣченія граней 1′ съ 2′, 2′ съ 4′ и 1′ съ 3′. Для этого провожу (пунктиромъ) дуги большого круга чрезъ эти пары точекъ.

Легко понять, что ребро пересѣченія 1′ съ 2′ проектируется по направленію перпендикуляра къ діаметру, стягивающему дугу 1′ 2′, ребро пересѣченія 2′ съ 4′ проектируется перпендикуляромъ къ діаметру, стягивающимъ дугу 2′ 4′ и ребро пересѣченія 1′ съ 3′ проектируется перпендикуляромъ, къ діаметру, стягивающимъ дугу 1′ 3′. Если повторить то же съ точкою, діаметрально противоположною точкѣ C″, то получимъ проекціи трехъ другихъ реберъ, а эти ребра въ соотвѣтственныхъ пересѣченіяхъ дадутъ изображенія еще трехъ вершинъ октаэдра. Соединяя полученныя вершины прямыми, найдемъ ребра пересѣченія 1′ съ 4′ и 2′ съ 3′.

Отъ изображенія октаэдра легко перейти къ изображенію куба, если за вершины послѣдняго примемъ центральныя точки граней, которыя находятся на прямыхъ, соединяющихъ вершины граней со срединами противоположныхъ реберъ.


C
C'
C''
1''
1
2'
2
A''
A'
A
4
4'
B'
B''
B
3'
3