XIV. Его-же. Еще о спеціальныхъ кругахъ и шарахъ.

Въ этихъ Запискахъ (III 287) мною посвящена этому предмету замѣтка, въ которой я ограничился лишь полнымъ выводомъ относящихся сюда геометрическихъ образовъ.

Тотъ же выводъ, конечно, могъ бы быть произведенъ и другими путями, которыя должны были бы привести къ тождественнымъ результатамъ. Впрочемъ отчасти мною и тогда были примѣнены разныя пути; но во всякомъ случаѣ мыслимы, кромѣ приведенныхъ, еще и иные.

Всѣ конопримы напр. можно вывести коллинеарнымъ преобразованіемъ изъ круговъ, но также путемъ засѣчекъ двухъ проективныхъ примъ лучей, и изъ элементарныхъ руководствъ усматривается, что послѣдній пріемъ если не вѣрнѣе, то по крайней мѣрѣ нагляднѣе, и въ этомъ смыслѣ проще. Онъ состоитъ въ томъ, что двѣ изъ пяти, служащихъ для опредѣленія, точекъ принимаются за центры примъ лучей, соотвѣтствіе между которыми устанавливается по тремъ другимъ точкамъ. Сразу становится ясно, что въ томъ спеціальномъ случаѣ, когда эти три точки попадутъ на одну прямую, мы получимъ спеціальный видъ конопримы (гиперболы), сводящейся къ двумъ пересѣкающимся прямымъ (ассимптотамъ). Коллинеація круга не давала этой наглядности по крайней мѣрѣ, пока не были выведены спеціальные виды круга.

Какъ извѣстно изъ элементарныхъ руководствъ, кругъ также мы можемъ опредѣлить этимъ путемъ, если обѣ примы лучей мы возьмемъ равными и одинаковаго направленія, и тогда для установленія соотвѣтствія между ними достаточно еще одной, третьей точки.

За центры лучей мы для конопримы общаго характера можемъ взять любыя двѣ изъ данныхъ пяти точекъ, въ томъ числѣ одну или двѣ безконечно-удаленныя точки (гиперболы) [2].

Но совсѣмъ иное получится, если обѣ примы лучей должны быть равны и имѣть одинаковое направленіе. Изъ двухъ центровъ, изъ которыхъ одинъ на конечномъ разстояніи, а другой на безконечности, мы очевидно не можемъ провести равныхъ примъ. Также становится неопредѣленнымъ это построеніе, если оба центра станутъ безконечно-удаленными точками. Поэтому для построенія спеціальнаго круга эти пріемы не примѣнимы, но если въ спеціальномъ кругѣ имѣется только одна безконечно-удаленная точка, то за центры лучей равныхъ и одинаково направленныхъ примъ мы можемъ принять остальныя двѣ точки; и тогда ясно, что всѣ остальныя, засѣкаемыя лучами, точки круга, будутъ точки на безконечности, такъ какъ засѣкающіе лучи, по опредѣленію равныхъ и одинаково-направленныхъ лучей, будутъ параллельны.

Изъ упомянутой вначалѣ замѣтки явствуетъ, что существованіе спеціальныхъ круговъ и шаровъ вноситъ большую разруху въ установившіяся, даже не вѣками, а тысячелѣтіями, представленія о кругѣ. Какъ въ ней доказано, изъ этого понятія совершенно должно быть устранено представленіе о центрѣ и равныхъ радіусахъ. Устраняется и представленіе о непрерывномъ рядѣ касательныхъ всѣхъ направленій, такъ какъ въ спеціальныхъ кругахъ такой совокупности касательныхъ не имѣется. Устраняется даже представленіе о непрерывности самихъ кривыхъ, такъ какъ въ кругахъ, опредѣляемыхъ одною конечною и двумя безконечно-удаленными точками, первая является точкою отдѣльною, въ которой касательныхъ вовсе не имѣется, какъ вообще не имѣется производныхъ, а слѣдовательно и касательныхъ для отдѣльныхъ точекъ какихъ бы то ни было кривыхъ. Устраняется такимъ образомъ, нетолько по отношенію къ кривымъ 2-го порядка вообще, но даже по отношенію къ кругамъ, представленіе объ отсутствіи особыхъ точекъ.

Какъ существенные, остаются только признаки опредѣляемости по тремъ точкамъ и принадлежность къ кривымъ 2-го порядка то есть пересѣкаемость прямою не больше чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Вообще въ новой геометріи различаются понятія о кривой 2-го порядка и 2-го класса; но для обыкновенныхъ, не спеціальныхъ разностей, каковыя до сихъ поръ преимущественно имѣлись въ виду, это различіе не существенно, такъ какъ ту самую кривую, которую мы разсматриваемъ какъ кривую 2-го порядка, мы можемъ разсматривать какъ кривую 2-го класса, если ея точки замѣнимъ касательными въ этихъ точкахъ; пересѣкая первую прямою, мы получаемъ двѣ ея точки пересѣченія; замѣняя эти же точки касательными, мы находимъ, что обѣ пересѣкаются въ точкѣ на плоскости, чрезъ которую уже не пройдетъ никакая третья касательная къ той же кривой.

---

[1]) Здѣсь проявляется двоякая полярность, такъ что одной и той же директриссѣ полюсами являются оба фокуса: одинъ въ отношеніи конопримы Гашетта, другой обычный, въ отношеніи мнимаго сферическаго круга, устанавливающаго перпендикулярность, почему объ этомъ и упомянуто въ скобкахъ.

[2]) Если примемъ за центры лучей двѣ безконечно-удаленныя точки гиперболы, то, каковы бы ни были три другія точки, мы всегда получимъ гиперболу съ паралельными ассимптотами, откуда заключаемъ, что таковыхъ гиперболъ имѣется линейная терція; въ частности, если три точки окажутся на прямой, то гипербола распадется на двѣ прямыя: опредѣляемую тремя точками и безконечно-удаленную.

Гораздо отчетливѣе представленіе о первой какъ о конопримѣ точекъ, а о второй, какъ о конопримѣ лучей, и тогда обѣ совокупности можемъ считать примами 2-го порядка или квадратичными. Начиная съ 3-го порядка такія совокупности точекъ и лучей уже будутъ существенно различными.

Таковы разсужденія общаго характера, пока мы не касаемся спеціальныхъ видовъ.

Теперь легко убѣдиться, что для такихъ спеціальныхъ видовъ существенное различіе будетъ существовать уже для круговъ или сферопримъ.

Изъ упомянутой замѣтки мы ознакомились съ спеціальными кругами точекъ. Но тогда мы даже не коснулись спеціальныхъ сферопримъ лучей.

Въ системѣ лучей элементами являются лучи то есть прямыя безконечнаго протяженія. Въ этой системѣ экстра-элементами то есть спеціальными или особыми элементами являются прямыя безконечно-удаленныя. На плоскости имѣется однако всего одинъ единственный такой элементъ, а потому спеціальныхъ сферопримъ лучей имѣется, въ сущности, только одинъ видъ, опредѣляемый двумя обыкновенными и однимъ безконечно-удаленнымъ лучомъ.

Сфероприма лучей опредѣляется тремя лучами a, b и c. Мы можемъ ее построить, исходя напр. изъ двухъ первыхъ, на которыхъ она опредѣляется проективностью равныхъ примъ точекъ. Въ общемъ случаѣ, третій лучъ c отмѣчаетъ на обоихъ первыхъ лучахъ проективные точки A и A′ этихъ примъ, а въ силу равенства этихъ примъ мы сейчасъ же можемъ провести и четвертый лучъ, симметричный съ третьимъ, перемѣняя соотвѣтственно положенія точекъ обѣихъ примъ, и получимъ такимъ образомъ B на первой и B′ на второй примѣ.

Чтобы установить проективность точекъ этихъ двухъ примъ, мы можемъ одну изъ нихъ, напр. b, поступательно перемѣщать по другой, пока не совмѣстимъ точки Q′ пересѣченія примы b примою a съ проективною ей точкою Q на послѣдней; тогда примы точекъ придутъ въ перспективное положеніе то есть всѣ лучи, соединяющіе проективныя точки, пересѣкутся въ одной общей точкѣ—центрѣ перспективы. Ясно, что это произойдетъ тогда, когда оба луча AA′ и BB′ пересѣкутся въ такой точкѣ, что черезъ нея же пройдетъ и прямая b въ новомъ положеніи. Точка Q′, которую эта прямая отмѣтитъ на a, будетъ совмѣщена съ проективною ею точкою Q примы a; эта точка и есть одна изъ точекъ касанія сферопримы къ огибаемой кривой [1]).

Установивъ же проективность, легко проведемъ и всѣ лучи, составляющіе искомую сфероприму.

Въ спеціальной сферопримѣ, о которой сейчасъ рѣчь мы имѣемъ тѣ же два луча a и b съ проективными примами точекъ, но съ тою особенностью, что третій опредѣляющій лучъ есть лучъ безконечно-удаленный, а потому и безконечно удалены проективныя точки A и A′. Теперь никакое конечное поступательное движеніе уже не приведетъ обѣихъ примъ въ перспективное положеніе, а потому точкѣ A проективна нетолько безконечно-удаленная точка A′, но и точка Q′ пересѣченія примы b примою a, а слѣдовательно всѣ точки примы b будутъ проективны съ точкою A, а всѣ точки примы A проективны съ точкою A′ то есть получаемъ совсѣмъ особый видъ проективности примъ точекъ.

Искомая же сфероприма будетъ совокупность всѣхъ лучей, проходящихъ чрезъ точки A и A′ то есть совокупность всѣхъ прямыхъ, параллельныхъ двумъ даннымъ въ томъ числѣ и безконечно-удаленной [2]). Какъ видимъ, спеціальная сфероприма этого случая существенно отличается отъ всѣхъ спеціальныхъ сферопримъ точекъ и, въ сущности, сводится къ парѣ безконечно-удаленныхъ точекъ A и A′.

Не распространяясь, по простотѣ предмета, относительно спеціальныхъ шаровъ или сферосекундъ, я ограничусь замѣчаніемъ, что спеціальная сферосекунда, опредѣляемая тремя обыкновенными и одною безконечно-удаленною плоскостью, есть совокупность всѣхъ плоскостей, параллельныхъ тремъ прямымъ пересѣченія данныхъ.

---

[1]) Эти разсужденія заимствованы изъ элементарнаго руководства „Новая геометрія какъ основа черченія“ (стр. 59)

[2]) Отсюда слѣдуетъ, что сфероприма получится одна и та же, какъ бы ни провели на плоскости прямыя, параллельныя этимъ двумъ; совокупность всѣхъ круговъ, имѣющихъ двѣ общія касательныя, есть линейная прима векторіальныхъ круговъ; ясно, что ей принадлежитъ и найденный спеціальный кругъ.

22 іюля 1913 г.