## XIII. Е. С. Федоровъ. О проектирующихъ конусахъ стереографической проекціи.

Въ граммастереографической проекціи всякая плоскость проектируется дугою большого круга, то есть дугою проходящею чрезъ двѣ діаметрально-противоположныя точки окружности проекціи. Этотъ кругъ представляетъ одно круговое сѣченіе конуса, имѣющаго центръ въ точки схода лучей; другое круговое сѣченіе того же конуса есть діаметральный кругъ сферы въ проектируемой плоскости.

Повидимому до сихъ поръ ни одинъ кристаллографъ не отмѣтилъ, что эти проектирующіе конусы не есть конусы общаго характера, а есть конусы особые, называемые конусами Паппуса, впервые отмѣтившаго ихъ простое построеніе. Въ самомъ дѣлѣ, мы легко получимъ такой конусъ, если возьмемъ плоскость и пересѣкающую ее въ точкѣ O прямую и если во всѣхъ плоскостяхъ чрезъ эту прямую мы найдемъ совокупность биссектрисъ между нею и плоскостью. Такъ какъ во всѣхъ этихъ плоскостяхъ биссектриссы — производящія конуса, взаимно перпендикулярны, то ясно, что въ такомъ конусѣ имѣется особая ось линейной примы плоскостей, пересѣкающихъ конусъ въ двухъ взаимноперпендикулярныхъ производящихъ. Но такихъ особыхъ осей конуса, конечно не одна, а пара, которая легко выводится изъ одной по симметріи квадратичнаго конуса. Биссектриссы этихъ двухъ осей есть двѣ взаимноперпендикулярныя прямыя, изъ которыхъ одна называется по преимуществу осью конуса (хотя оба эти перпендикуляра, какъ и третій перпендикуляръ къ нимъ составляютъ двойныя оси симметріи конуса); эта ось конуса по преимуществу есть лучъ, проектирующій гномостереографическую проекцію данной для проектированія плоскости.

Объ особыя оси проектирующаго конуса есть перпендикуляры къ обоимъ круговымъ сѣченіямъ то есть перпендикуляры какъ къ данной плоскости, такъ и къ плоскости проекціи. Для послѣдней совершенно очевидно, что какъ проходящая чрезъ нея плоскость симметріи конуса, такъ и плоскость къ ней перпендикулярная пересѣкаютъ конусъ въ парахъ взаимноперпендикулярныхъ производящихъ, что и служитъ доказательствомъ того, что эти проектирующіе конусы есть конусы Паппуса.

Конусы, полярные къ конусамъ Паппуса, называются конусами Гашетта. Въ силу этой полярности особыя оси, какъ оси, перпендикулярныя къ круговымъ сѣченіямъ конуса Паппуса, есть фокальныя оси конуса Гашетта; и обратно, фокальныя оси конуса Паппуса будутъ перпендикулярами къ круговымъ сѣченіямъ конуса Гашетта.

Въ проектирующихъ конусахъ, то есть въ конусахъ Паппуса главная ось въ плоскости симметріи, въ которой находятся обѣ особыя оси, представлена малою осью конопримы, хотя угловое разстояніе ея конечныхъ точекъ образуетъ прямой уголъ. Чтобы вывести отсюда полярный конусъ Гашетта, мы можемъ принять эту ось за діаметръ сферическаго круга и принять его за мнимый кругъ преобразованія. Тогда оба конца діаметра преобразуются другъ въ друга, и слѣдовательно въ обѣихъ сферическихъ конопримахъ эта ось будетъ общею; но если для конуса Паппуса это есть малая ось, то для конуса Гашетта, какъ легко видѣть, это будетъ большая ось конопримы.

А именно, на каковой уголъ большая ось конуса (подразумѣвается сферической конопримы) Паппуса будетъ больше прямого (то есть малой оси того же конуса), на таковой же уголъ малая ось конуса Гашетта будетъ меньше прямого. Отсюда легко вывести способъ построенія и вычисленія элементовъ обоихъ конусовъ по данному углу $2\alpha$ между перпендикулярами къ обоимъ круговымъ сѣченіямъ или иначе между перпендикулярами къ плоскости проекціи и проектируемой плоскости.

Малая ось конопримы Паппуса имѣетъ величину $\pi/2$, а полюсъ $\pi/4$; полюсъ даннаго перпендикуляра съ центромъ конопримы образуетъ уголъ $\alpha$, меньшій чѣмъ $\pi/4$; такъ какъ полюсъ этого перпендикуляра есть фокусъ конопримы Гашетта, то, принимая его за центръ сферическаго круга радіуса $\pi/4$, на перпендикулярной оси конопримы найдемъ оба конца малыхъ полуосей этой конопримы, а слѣдовательно и величину $x$ разности полуоси противъ величины $\pi/4$. Отсюда величина большой полуоси конопримы Паппуса есть $\pi/4+x$,. Принявъ конецъ малой оси этой конопримы за центръ сферическаго круга радіуса $\pi/4+x$, найдемъ полюсы фокальныхъ осей на большой оси той же конопримы. Такимъ образомъ опредѣлены всѣ искомые элементы конопримы.

Для вычисленія имѣемъ:

$\cos\pi/4=\cos\alpha.\cos(\pi/4-x)$, $\cos(\pi/4+x)=\cos\pi/4\cos\beta$, гдѣ $\beta$ половина углового разстоянія полюсовъ фокальныхъ осей конопримы Паппуса отъ центра. Наконецъ имѣемъ еще

$$\cos\alpha.\cos\beta+\frac{\cos(\pi/4+x)}{\cos(\pi/4-x)},\ \text{а отсюда}\ \cos^2\pi/4=\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\text{или}\ \cos^2\beta=\frac{1}{\cos^2\pi/4}-\frac{1}{\cos^2\alpha}\ ^{1})$$

Однако, несмотря на такія аналогіи въ свойствахъ конопримъ Паппуса и Гашетта между ними въ одномъ отношеніи есть существенное различіе, которое и позволяетъ ихъ отличать другъ отъ друга.

Фокальная ось первой нетолько не есть общая ось примы плоскостей, пересѣкающихъ коноприму Гашетта въ перпендикулярныхъ парахъ, но даже не имѣется ни одной такой плоскости, хотя бы уже потому, что полюсъ этой оси находится на ея малой полуоси и значитъ даже наибольшій изъ угловъ пересѣченія меньше прямого. Но такъ какъ перпендикуляры къ круговымъ сѣченіямъ конуса Паппуса есть фокальныя оси конуса Гашетта, то значитъ плоскости, полярныя этимъ осямъ по отношенію къ послѣднему конусу (его директриссы), обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ центральные лучи каждой изъ нихъ есть пересѣченія двухъ плоскостей, касательныхъ къ конусу въ лучахъ пересѣченія его съ плоскостями, проходящими черезъ фокальную ось. Полюсъ (перпендикуляръ)

---

[1]) Ср. Reye Geometrie der Lage I 260, гдѣ они значатся посреди ряда другихъ особыхъ конусовъ, въ томъ числѣ и конусовъ Гашетта (Hachette), о которыхъ рѣчь дальше.

[1]) При $\alpha=\pi/4$ $\beta=\pi/2$. Это рѣшеніе соотвѣтствуетъ конопримѣ Паппуса въ видѣ двухъ взаимно перпендикулярныхъ дугъ большого круга и полярной конопримѣ Гашетта въ видѣ отрѣзка дуги большого круга величиною $\pi/2$.

директриссы [1]) есть другая фокальная ось конуса; слѣдовательно, каждому лучу директриссы полярна плоскость, проходящая чрезъ эту другую фокальную ось, плоскость, пересѣкающая конусъ Паппуса въ двухъ перпендикулярныхъ лучахъ, а этимъ лучамъ полярны двѣ плоскости, касательныя къ конусу Гашетта, проведенныя черезъ какой-нибудь лучъ на директриссѣ, и такъ, каждыя двѣ плоскости, проведенныя изъ такого луча касательно къ конусу Гашетта есть двѣ взаимно перпендикулярныя плоскости, а это и составляетъ отличительное свойство этихъ конусовъ. Такихъ директриссъ двѣ, а потому имѣется двѣ плоскости, изъ всѣхъ лучей которыхъ проходитъ пара взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, касательныхъ къ конусу Гашетта; эти плоскости есть поляры его фокальныхъ осей (директриссы). Итакъ, проектирующіе конусы стереографической проекціи есть конусы Паппуса, а конусы Гашетта въ построеніяхъ стереографической проекціи примѣненія не находятъ.

29 іюня 1913 года.