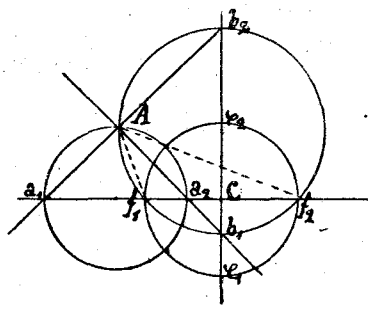
28. Конфокальныя совокупности.

Е. С. Федорова.

(Доложено 9 апрѣля 1912 г.).

I. Совокупности на плоскости.

Возьмемъ на плоскости инволюцію точекъ на прямой съ двумя вещественными двойными точками f_1 f_2 (фиг. 1), и примемъ каждую пару a_1 a_2 сопряженныхъ точекъ за концы діаметра нѣкотораго круга.



Фиг. 1.

Очевидно, что получимъ линейную приму круговъ съ двумя точечными кругами f_1 f_2, и ни одинъ изъ круговъ примы не будетъ имѣть ни съ какимъ другимъ общихъ точекъ.

Принявъ какую-либо точку A одного изъ круговъ примы за вершину прямоугольнаго трехугольника, гипотенуза котораго есть діаметръ того же круга на взятой прямой, найдемъ, что оба катета будутъ нормальными сопряженными по отношенію къ какой угодно кривой 2-го порядка (конопримѣ), имѣющей оба точечные круга f_1 и f_2 своими фокусами.

Прежде всего мы замѣтимъ, что изъ двухъ катетовъ одинъ касателенъ къ эллипсу, проходящему чрезъ точку A, а другой къ гиперболѣ, проходящей чрезъ ту же точку, и наоборотъ первый нормаленъ къ гиперболѣ, а второй къ эллипсу. Въ самомъ дѣлѣ, если соединимъ точку A съ точечными кругами f_1 и f_2, то получимъ двѣ гармонически сопряженныя пары лучей, изъ которыхъ одна перпендикулярная, откуда слѣдуетъ, что вторая пара съ первою образуетъ равные углы; это именно и имѣетъ мѣсто для эллипса и гиперболы въ точкѣ A, если обѣ кривыя имѣютъ своими фокусами точки f_1 и f_2.

Обоими фокусами опредѣляются и оси этихъ кривыхъ, изъ которыхъ прямая f_1 f_2 называется главною, а другая проходитъ чрезъ центръ C перпендикулярно къ первой.

На этой второй оси находятся мнимые фокусы кривыхъ. Въ самомъ дѣлѣ, тѣ же катеты на этой второй оси опредѣляютъ другую инволюцію изъ паръ точекъ b_1 съ b_2; пара такихъ сопряженныхъ точекъ этой второй инволюціи также представляетъ концы діаметровъ круговъ, но уже второй примы; эти круги необходимо должны проходить чрезъ точки f_1 f_2, потому что въ частномъ случаѣ, если вмѣсто A возьмемъ точку f_1, то обѣ касательныя (онѣ же и нормали къ кривымъ) будутъ прямыя f_1 b_1 и f_1 b_2 и онѣ должны быть другъ къ другу перпендикулярны; но круги, проходящіе чрезъ точечные круги линейной примы, сами образуютъ линейную приму, и всѣ круги этихъ обѣихъ примъ пересѣкаютъ другъ друга прямоугольно.

И такъ, на второй оси b_1 b_2 имѣемъ инволюцію съ двумя мнимыми двойными точками φ_1 и φ_2 и эти точки, по аналогіи съ точками f_1 и f_2, мы можемъ назвать мнимыми фокусами конопримъ; слѣдовательно, всѣ таковыя, въ совокупности, составляютъ приму, и всѣ имѣютъ общую пару вещественныхъ и общую пару мнимыхъ фокусовъ.

Два перпендикуляра Aa_1 и Aa_2 составляютъ двѣ

нормальныя сопряженныя нетолько по отношенію къ кривымъ, пересѣкающимся въ точкѣ A, но также и по отношенію къ ихъ крайнимъ разностямъ, которыя сводятся къ парѣ точекъ f_1 f_2. Если по этимъ кривымъ составимъ ихъ линейную приму, то два такіе перпендикуляра окажутся сопряженными по отношенію ко всѣмъ кривымъ примы, если только за элементы возьмемъ лучи то есть касательныя къ кривымъ системы [1]).

Дѣйствительно, если за элементы системы мы примемъ лучи, то прима полученныхъ конфокальныхъ кривыхъ окажется линейною примою конопримъ лучей.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ линейная прима конопримъ точекъ опредѣляется четырьмя точками, такъ линейная прима конопримъ лучей опредѣляется четырьмя общими касательными лучами, изъ которыхъ одна или обѣ пары могутъ быть мнимыми, что въ данномъ случаѣ и имѣетъ мѣсто.

Выраженіе „мнимая пара общихъ касательныхъ“ отмѣчаетъ, что точка ихъ пересѣченія есть центръ инволюціи лучей по отношеніи ко всѣмъ кривымъ. Таковою парою и является пара фокусовъ f_1 f_2, потому что каждая пара проходящихъ чрезъ нихъ перпендикуляровъ есть пара сопряженныхъ лучей инволюціи (изотропной) по отношенію ко всѣмъ кривымъ.

Но сама точка пересѣченія мнимыхъ касательныхъ можетъ быть и мнимою; вѣдь это выражаетъ только, что каждому лучу, проходящему чрезъ нѣкоторую точку, сопряженъ въ инволюціи лучъ, проходящій чрезъ другую постоянную точку.

Въ данномъ случаѣ такими мнимыми парами точекъ пересѣченія двухъ сопряженныхъ мнимыхъ касательныхъ являются двѣ безконечно-удаленныя точки, находящіяся на перпендикулярныхъ прямыхъ или такъ называемыя „круговыя точки“ (Kreispunkte нѣмецкихъ геометровъ). Это выражаетъ, что какому угодно лучу, исходящему изъ безконечно-удаленной точки сопряженъ лучъ, къ нему перпендикулярный то есть исходящій изъ сопряженной другой круговой точки мнимой пары.

Итакъ, прима конфокальныхъ кривыхъ есть линейная прима конопримъ лучей; въ каждой точкѣ плоскости пересѣкаются подъ прямымъ угломъ двѣ кривыя этой примы, изъ которыхъ одна есть эллипсъ, а другая гипербола. Лишь въ особомъ частномъ случаѣ, когда одна изъ двухъ точекъ f_1 или f_2 удаляется въ безконечность, то есть когда одинъ изъ общихъ фокусовъ становится безконечно-удаленною точкою, какъ эллипсы, такъ и гиперболы превращаются въ параболы, и мы получаемъ двѣ системы перпендикулярно пересѣкающихся параболъ лучей, какъ одну линейную приму.

Такъ какъ двѣ перпендикулярныя прямыя Aa_1 и Aa_2 есть нормали къ двумъ кривымъ примы, пересѣкающимся въ точкѣ A, онѣ же есть и касательныя къ этимъ кривымъ, то ихъ можно называть нетолько нормальными сопряженными (по отношенію ко всѣмъ кривымъ примы), но также и сопряженными нормалями или касательными, и тогда можемъ сказать, что чрезъ каждую точку плоскости проходятъ двѣ такія нормали или касательныя.

Если возьмемъ на плоскости прямую произвольнаго положенія, то въ каждой ея точкѣ пересѣкается двѣ сопряженныя нормали, изъ которыхъ одна относится къ эллипсамъ, а другая къ гиперболамъ системы. Получаемъ двѣ системы огибающихъ нѣкоторыя кривыя, разрядъ которыхъ легко опредѣлить по коррелятивной связи между точками прямой и направленіями проходящихъ прямыхъ.

Опредѣляемыя такимъ образомъ кривыя, есть, какъ извѣстно, параболы. Точка касанія такой параболы на данной прямой совпадаетъ съ точкою касанія двухъ пересѣкающихся въ ней кривыхъ системы то есть эллипса и гиперболы. Такая точка имѣется на прямой лишь въ единственномъ числѣ, потому что всякой прямой по отношенію ко всѣмъ кривымъ системы сопряжена только одна прямая, которая для данной системы къ ней перпендикулярна.

Такимъ образомъ для опредѣленія параболы, выводящейся изъ данной прямой мы имѣемъ достаточныя данныя, если только рѣшимъ, будетъ ли въ упомянутой точкѣ къ ней касателенъ эллипсъ или гипербола. Если допустимъ первое, то кромѣ этой прямой какъ касательной къ искомой параболѣ мы имѣемъ еще двѣ касательныя въ видѣ перпендикуляровъ къ общимъ осямъ кривыхъ въ точкахъ пересѣченія этой прямой съ осями [1]) и еще имѣемъ упомянутую точку касанія на ней то есть всего четыре данныя, достаточныя для опредѣленія параболъ. Совокупности всѣхъ прямыхъ на плоскости то есть линейной секундѣ, соотвѣтствуетъ такимъ образомъ линейная секунда параболъ.

Но эта секунда раздѣляется на двѣ части; къ одной касательны эллипсы, а къ другой гиперболы.

[1]) Какъ извѣстно изъ теоріи конопримъ, для системы точекъ имѣемъ по отношенію къ линейной примѣ конопримъ сопряженныя пары точекъ, а не прямыхъ; уже изъ этого слѣдуетъ, что въ системѣ лучей имѣются сопряженные лучи.

[1]) Потому что эти точки будутъ вершинами эллипсовъ, а въ вершинахъ оси сопряжена перпендикулярная касательная.

Весьма легко рѣшить для каждой данной прямой, къ какой половинѣ она относится, руководствуясь тѣмъ соображеніемъ, что касательная къ эллипсу не можетъ пересѣкать главную ось внутри отрѣзка, образуемаго фокусами, и наоборотъ, касательныя къ гиперболѣ могутъ эту ось пересѣкать въ точкахъ только внутри этого отрѣзка. Въ промежуткѣ между этими двумя разрядами лучей находятся линейныя примы лучей, имѣющія фокусы своими центрами, что и составляетъ крайнюю разность конопримъ лучей.

Если изъ каждой точки произвольной прямой d проведемъ два перпендикуляра — соотвѣтственныя касательныя къ эллипсу и гиперболѣ, то совокупность первыхъ огибаетъ одну параболу, которую можно назвать параболою эллипсовъ, а совокупность вторыхъ—параболу гиперболъ.

Построивъ для данной прямой, какъ поляры, полюсъ по отношенію къ одной изъ кривыхъ системы и проведя изъ него къ ней перпендикуляръ, мы найдемъ двѣ нормальныя сопряженныя по отношенію ко всѣмъ кривымъ системы, и значитъ каждая изъ нихъ есть геометрическое мѣсто полюсовъ другой, которые мы можемъ отмѣтить буквами D_1, D_2, D_3 . . .

Изъ каждой точки D можно къ соотвѣтственной кривой провести двѣ касательныя и обѣ ихъ точки касанія будутъ находиться на прямой d; но эти же касательныя есть одновременно и касательныя къ соотвѣтственной параболѣ. Отсюда видимъ, что, измѣняя положеніе точки D на сопряженной нормали, мы измѣняемъ величину угла между двумя касательными къ одной и той же параболѣ, и, въ частности, можемъ найти такую точку D_i, касательныя изъ которой образуютъ между собою прямой уголъ; эта точка будетъ находиться на директриссѣ параболы, которая, въ свою очередь, параллельна главной касательной (то есть касательной, перпендикулярной къ діаметрамъ параболы).

Если-бы эта директрисса пересѣкла прямую прямую d въ точкѣ Q на конечномъ разстояніи, то Q оказалась бы точкою пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ касательныхъ къ одной и той же параболѣ, а это невозможно, потому что во всѣхъ точкахъ этой прямой изъ пересѣкающихся перпендикуляровъ одинъ касателенъ къ эллипсу, а другой—къ гиперболѣ. Другими словами, точка Q должна находиться въ безконечности, а прямая d должна быть главною касательною къ соотвѣтственной параболѣ, а точка P пересѣченія ея съ нормальною сопряженною есть вершина параболы.

Имѣется, и хорошо извѣстна, также другая линейная секунда параболъ, которую мы можемъ въ этой системѣ коррелятивно связать съ точками плоскости.

Для совокупности прямыхъ, пересѣкающихся въ какой-нибудь точкѣ A, мы можемъ найти соотвѣтственную совокупность нормальныхъ сопряженныхъ, и эта именно совокупность также огибаетъ параболу, и такимъ образомъ соотвѣтственно каждой точкѣ строится особая парабола. Я на этомъ не останавливаюсь, какъ на получившемъ изложеніе въ основныхъ руководствахъ [1]).

II. Совокупности на сферѣ.

Теоремы и слѣдствія, выведенныя для плоскости, могутъ быть перенесены и на сферу, но не вполнѣ, и притомъ это конечно зависитъ отъ того, какую именно систему мы выберемъ на сферѣ. Наибольшій интересъ имѣетъ въ данномъ случаѣ та система, для которой имѣютъ мѣсто нетолько позиціонныя построенія общаго характера, но и всѣ тѣ, которыя основаны на измѣреніи угловъ, то есть элементовъ, состоящихъ изъ пары діаметрально противоположныхъ точекъ; въ этой системѣ построенія, основанныя на измѣреніи отрѣзковъ, перенесены быть не могутъ; это находится въ связи съ коренною особенностью этой системы — полнымъ отсутствіемъ безконечно-удаленныхъ точекъ, какъ особыхъ экстраэлементовъ. Напротивъ того, здѣсь всѣ элементы одного и того же разряда.

На плоскости мы имѣемъ напр. рядъ равностоящихъ точекъ; каждыя три сосѣднія такія точки вмѣстѣ съ безконечно-удаленною, взятою на той же прямой, составляютъ четыре гармоническіе элемента на прямой; въ нашей сферической системѣ нѣтъ безконечно-удаленныхъ точекъ, а слѣдовательно только-что упомянутое соотношеніе изъ четырехъ точекъ, изъ коихъ одна безконечно-удаленная, теперь не имѣетъ мѣста.

Однако здѣсь величины отрѣзковъ могутъ быть измѣряемы центральными угловыми величинами. Если возьмемъ на линейной примѣ четыре элемента ABCD, ограничивающіе три равные отрѣзка, то найдемъ, что для трехъ элементовъ ABC четвертый гармоническій есть M, если BM измѣряется прямымъ угломъ, для трехъ элементовъ BCD четвертый гармоническій будетъ уже N, гдѣ CN прямой уголъ и т. д. Вмѣсто постояннаго четвертаго гармоническаго элемента, мы имѣемъ здѣсь перемѣнный и

[1]) Reye. Geometrie der Seege I 178 ff.

значитъ гармоническіе элементы здѣсь складываются иначе.

Такимъ образомъ теоремы, въ выраженіе которыхъ входитъ величина отрѣзковъ, вообще не могутъ быть изъ плоскости переносимы на сферическую систему, хотя, какъ увидимъ ниже, въ частныхъ случаяхъ, это и можетъ имѣть мѣсто. Есть и общеизвѣстные случаи, напр. равенство радіусовъ, сферическаго круга, равенство отрѣзковъ касательныхъ, проведенныхъ къ сферическому кругу изъ точки A, отъ этой точки до точекъ касанія.

Кривыя второго и высшаго порядковъ, конечно, имѣются, какъ во всѣхъ другихъ геометрическихъ системахъ, но уже между кривыми второго порядка или конопримами нельзя различать тѣхъ трехъ главныхъ разрядовъ—эллипсовъ, гиперболъ и параболъ—которые мы устанавливаемъ на плоскости, и нельзя именно потому, что это различеніе основано на понятіи о безконечно-удаленныхъ точкахъ. Имѣются конопримы вообще, но не спеціально эллипсы, гиперболы и параболы. Но всѣ разсужденія, основанныя только на угловыхъ построеніяхъ и приводящія къ отысканію фокусовъ, примѣнимы и для этой системы, а потому напр. и здѣсь по двумъ фокусамъ и одной касательной мы можемъ построить коноприму.

Мы можемъ именно оба фокуса принять за два вещественныхъ двойныхъ элемента инволюціи на линейной примѣ; данная касательная пересѣчетъ линейную приму въ одномъ элементѣ, который принадлежитъ парѣ сопряженныхъ элементовъ; изъ сопряженнаго элемента опускаемъ перпендикуляръ на касательную и получаемъ элементъ касанія, принадлежащій двумъ искомымъ конопримамъ, пересѣкающимся въ этомъ элементѣ прямоугольно; оба же перпендикуляра, пересѣкающіеся въ этой точкѣ, есть нормальныя сопряженныя.

Мы такимъ образомъ можемъ повторить много построеній и теоремъ, выведенныхъ для конфокальныхъ конопримъ на плоскости.

Хотя здѣсь упомянутые разряды конопримъ и не представлены, но мы можемъ условно ввести эти разряды, чтобы въ одинаковыхъ терминахъ формулировать теоремы, относящіяся къ плоскости и къ данной сферической системѣ. Такъ какъ система имѣетъ абсолютный центръ, съ которымъ связана симметрія системы, то, установивъ таковой, мы можемъ всѣ элементы, которые на сферѣ образуютъ съ этимъ центромъ прямой уголъ, параллелизировать безконечно-удаленнымъ точкамъ на плоскости; получимъ окружность, которую можемъ назвать главною, и тогда признать, за тѣми конопримами, которыя не имѣютъ съ этою окружностью общихъ элементовъ, названіе эллипсовъ, за тѣми, которыя имѣютъ одинъ общій элементъ, названіе параболъ и наконецъ тѣми, которыя имѣютъ два общихъ элемента, названіе гиперболъ, и даже касательныя къ послѣднимъ, имѣющія точки касанія на главной окружности, называть ассимптотами гиперболъ.

Симметрія на плоскости, о которой упомянуто, сводится къ тремъ двойнымъ осямъ симметріи, изъ коихъ двѣ совпадаютъ съ осями конопримъ, а третья—перпендикулярна къ плоскости. Для данной системы она даже повышается, потому что къ этимъ элементамъ симметріи мы можемъ прибавить еще плоскости симметріи, проходящія чрезъ двойныя оси симметріи, взятыя попарно.

Принявъ упомянутую условную терминологію, мы можемъ различить эллипсы отъ гиперболъ тѣмъ, что въ первыхъ касательныя пересѣкаютъ главную ось конопримъ внѣ отрѣзка, ограниченнаго фокусами, а касательныя къ гиперболамъ пересѣкаютъ эту ось внутри этого отрѣзка.

По отношенію къ каждой данной линейной примѣ легко построить тѣ двѣ параболы, огибающія которыхъ (т. е. касательныя) есть одновременно и касательныя къ эллипсамъ и гиперболамъ въ элементахъ данной примы. Эти двѣ параболы прямоугольно пересѣкаются въ элементѣ данной примы, сопряженномъ самой примѣ, и этотъ элементъ представляетъ вершину обѣихъ параболъ.

Такъ какъ въ данномъ случаѣ параболы, вообще опредѣляемыя четырьмя данными, по существу не отличаются отъ конопримъ общаго характера, которыя опредѣляются пятью данными, то значитъ теперь нужно отмѣтить и эту пятую, опредѣляющую, данную. Но собственно и для плоскости имѣлась эта пятая данная въ видѣ безконечно-удаленной касательной; въ данномъ случаѣ она представлена главною окружностью.

Но, употребляя эту условную терминологію, мы не должны упускать изъ виду этой условности. Въ параболахъ на плоскости центръ есть безконечно-удаленная точка, и она же есть точка касанія къ безконечно-удаленной касательной. Въ данномъ случаѣ послѣдняя представлена элементомъ на главной окружности, а центръ есть элементъ, совершенно независимый отъ предыдущаго, что и понятно, такъ какъ центръ есть элементъ, сопряженный элементамъ безконечно-удаленнымъ, каковыхъ въ данной системѣ не имѣется. Уже поэтому понятіе о центрѣ, какъ о всякомъ образѣ, связанномъ съ безконечно-удаленными элементами, здѣсь получаетъ другое значеніе, и во всякомъ случаѣ центры на плоскости и въ сферической системѣ не есть элементы проективные.

Въ этой системѣ имѣются и сферопримы, которыя мы могли бы, по аналогіи съ образами на плоскости, назвать сферическими кругами, но эти круги никоимъ образомъ не есть образы, проективныя съ кругами на плоскости. Въ этихъ сферическихъ кругахъ имѣются и сферическіе центры, но эти элементы тѣмъ болѣе не есть элементы, проективные центрамъ круговъ на плоскости.

Если возьмемъ два круга, то и въ этой системѣ ими опредѣлится линейная прима круговъ, но проективнаго соотвѣтствія между ними и линейными примами круговъ на плоскости не имѣется; но если бы случилось [1]), что оба взятые круга оказались гомологичными кругамъ на плоскости, то обѣ линейныя примы круговъ, оказались бы проективными.

Чтобы придать всѣмъ этимъ заключеніямъ полную наглядность, да и вообще выяснить, какія теоремы на плоскости не примѣнимы къ сферической системѣ, проще всего ограничиться разсмотрѣніемъ точекъ одной полусферы, у которой, въ такомъ случаѣ имѣется абсолютный центръ. Мы можемъ систему точекъ на плоскости привести въ переспективное положеніе съ точками на сферѣ, если эти точки будетъ проектировать лучами изъ центра, и притомъ центръ системы конфокальныхъ кривыхъ помѣстимъ на діаметрѣ, перпендикулярномъ къ плоскости главной окружности полусферы.

При такой перспективной связи всякая инволюція точекъ на плоскости будутъ проектироваться инволюціей точекъ на полусферѣ. Ясно, что круги на плоскости уже не будутъ проектироваться кругами на полусферѣ, и конечно обратно, круги полусферы не будутъ проектироваться кругами на плоскости.

Если теоремы о кругахъ, напр. объ ихъ линейныхъ примахъ, какъ опредѣляемыхъ двумя пересѣкающимися кругами, такъ и двумя кругами, не имѣющими общихъ точекъ, одинаково примѣнимы для обѣихъ системъ, то все таки между этими геометрическими образами перспективнаго отношенія установить нельзя.

Но для конопримъ общаго характера имѣетъ мѣсто и это общее соотношеніе, такъ что линейная прима конопримъ точекъ и конопримъ лучей, полученная на плоскости, можетъ быть перспективно перенесена и на поверхность сферы; такія же теоремы, какъ присутствіе въ конопримѣ точекъ одной равносторонней гиперболы, двухъ параболъ и т. п. для сферической системы мѣста не имѣютъ.

Въ виду такого соотношенія обѣихъ системъ, приходится раздѣлить теоремы, уже извѣстныя для плоскости, и имѣющія отношеніе къ системѣ конфокальныхъ кривыхъ, на такія, которыя справедливы и для сферической системы и такія, которыя къ ней непримѣнимы.

Я ограничусь краткою выпискою первыхъ:

1. При фокусѣ F, соединенномъ линейными примами точекъ съ двумя точками касанія A и B и точкою T пересѣченія обѣихъ касательныхъ, образуется два равные угла AFT и BFT.

Если проведемъ соотвѣтственную директриссу [1]) и соединимъ точки касанія линейною примою, которая пересѣчетъ директриссу въ точкѣ P, то найдемъ, что пара этихъ точекъ A и B гармонически раздѣляется примою TF и точкою P, и такъ какъ точка P есть полюсъ примы TF, то TF и PF есть нормальныя сопряженныя, ибо обѣ проходятъ чрезъ фокусъ F; слѣдовательно, два луча FA и FB гармонически раздѣляются взаимно перпендикулярными лучами FT и FP, что и треб. док.

Отсюда непосредственно заключаемъ:

2. На двухъ постоянныхъ касательныхъ всѣ остальныя отмѣчаютъ гомологичныя точки, и каждая пара такихъ точекъ проэктируется изъ фокуса примами подъ однимъ и тѣмъ же угломъ.

3. Три пары противоположныхъ вершинъ полнаго четырехсторонника, описаннаго около конопримы, проектируются изъ каждаго фокуса въ симметрической инволюціи (то есть имѣющей перпендикулярные двойные лучи).

Такъ какъ въ каждой точкѣ по отношенію къ любой конопримѣ опредѣляется инволюція лучей (двойныя лучи инволюціи есть касательныя), то по отношенію къ двумъ конопримамъ опредѣляется новая инволюція, двойными лучами которой будетъ общая для обѣихъ пара гармонически сопряженныхъ. Для конфокальныхъ кривыхъ такою общею парою является пара нормальныхъ сопряженныхъ; слѣдовательно:

4) Пары касательныхъ къ конфокальнымъ кривымъ, проведенныя изъ любой точки, составляютъ сопряженные лучи симметрической инволюціи.

То, что пары такихъ лучей по отношенію ко всѣмъ линейнымъ примамъ конопримъ лучей, образуютъ инволюцію, есть непосредственное слѣдствіе теоремы Дезарга которая для системы точекъ гласитъ, что всякая прямая пересѣкаетъ коноприму и каждую пару противополож-

[1]) Напр. если-бы оба круга, имѣли своими сферическими центрами общій центръ системы на сферѣ.

[1]) То есть поляру даннаго фокуса.

ныхъ сторонъ вписаннаго въ немъ четырехугольника въ сопряженныхъ парахъ инволюціи, а слѣдовательно для системы лучей выразится такъ: пара касательныхъ къ конопримѣ и каждая пара лучей, проведенныхъ изъ точки ихъ пересѣченія чрезъ противоположныя вершины описаннаго около нея четырехугольника образуютъ инволюцію лучей; но такимъ четырехугольникомъ, какъ четырьмя касательными, опредѣляется линейная прима конопримъ лучей, и значитъ всѣ пары касательныхъ къ этимъ конопримамъ есть пары сопряженныхъ лучей.

Особенность системы конфокальной линейной примы только въ томъ, что всѣ эти инволюціи симметричны, то есть что биссектрисы сопряженныхъ паръ лучей взаимно перпендикулярны.

Сама теорема Дезарга, какъ выводимая независимо отъ безконечно-удаленныхъ точекъ, конечно, справедлива нетолько для разсматриваемой, но и для всѣхъ вообще геометрическихъ системъ, какъ одна изъ основныхъ теоремъ новой геометріи, имѣющая въ основаніи только позиціонныя построенія.

Если въ четырехугольникѣ, за вершины котораго приняты фокусы F и F_1 и двѣ произвольныя точки G и G_1 конопримы мы проведемъ діагонали FG и F_1 G_1 и, кромѣ того, къ конопримѣ двѣ касательныя GM и G_1M, то найдемъ, что FM дѣлитъ пополамъ уголъ GFG_1 и F_1M дѣлитъ пополамъ уголъ GF_1G_1 и значитъ:

5) Въ четырехугольникъ FF_1GG_1, составленномъ изъ двухъ фокусовъ FF_1 и двухъ произвольныхъ точекъ GG_1 конопримы можно вписать кругъ, имѣющій центръ въ точкѣ M.

Если точку G_1 примемъ за перемѣнную, передвигающуюся по конопримѣ, то связанная съ нею точка M будетъ передвигаться по касательной къ конопримѣ въ точкѣ G, а слѣдовательно и обратно, если будемъ передвигать точку M по касательной въ точкѣ G, то точка G_1 будетъ описывать коноприму, что представляетъ удобный способъ построенія послѣдней по точкамъ, когда извѣстны оба фокуса и одна касательная съ точкою касанія.

Если FF_1 GG_1 примемъ за полный четырехсторонникъ, то кромѣ четырехъ упомянутыхъ вершинъ получимъ еще третью пару противоположныхъ вершинъ H и H_1. Такъ какъ въ немъ роли всѣхъ такихъ паръ одинаковы, то можемъ, замѣнивъ пару точекъ G съ G_1 парою H съ H_1, сказать, что если на касательныхъ къ кругу изъ точки H произвольно возьмемъ по точкѣ F и F_1, и изъ этихъ точекъ проведемъ двѣ другія касательныя къ тому же кругу, то чрезъ точку H_1 ихъ пересѣченія проходитъ коноприма, раздѣляющая въ этой точкѣ уголъ между этими касательными пополамъ.

Или можемъ выразить это соотношеніе еще общнѣе: изъ трехъ паръ вершинъ одна составляетъ фокусы конопримы, проходящей чрезъ остальныя четыре точки.

Если присоединить сюда еще то соображеніе, что пара фокусовъ сама по себѣ представляетъ исключительную разность конфокальныхъ кривыхъ, то получимъ, какъ слѣдствіе, что чрезъ каждыя двѣ пары противоположныхъ вершинъ полнаго четырехсторонника, одновременно описаннаго около круга и нѣкоторой конопримы, проходятъ три кривыя конофокальной примы конопримъ.

На основаніи теоремы 3 всѣ три пары противоположныхъ вершинъ полнаго четырехсторонника, одновременно описаннаго около конопримы и круга, проектируются изъ каждаго фокуса этихъ кривыхъ, въ частности изъ центра круга, въ парахъ лучей симметрической инволюціи, то это имѣетъ мѣсто и въ данномъ случаѣ; два перпендикулярные двойные луча этой инволюціи есть нормальные сопряженные по отношенію къ линейной примѣ конфокальныхъ конопримъ лучей, представленныхъ данною конопримою и парою точекъ FF_1 какъ общихъ фокусовъ всѣхъ конопримъ; отсюда слѣдуетъ, что каждая пара сопряженныхъ лучей этой инволюціи есть пара касательныхъ къ конопримамъ то есть:

6) Если полный четырехсторонникъ одновременно описанъ около круга и около конопримы, то всѣ сопряженныя пары лучей инволюціи изъ центра круга составляютъ пары касательныхъ къ кривымъ конфокальной примы, и обратно если изъ двухъ точекъ одной кривой проведемъ двѣ пары касательныхъ къ другой конопримѣ той же конфокальной примы, то получимъ четырехсторонникъ, описанный около круга.

Изъ этой замѣчательной теоремы Шаля (Chasles) Рейе[1]) выводитъ слѣдующія важныя теоремы, предварительно сдѣлавъ слѣдующія опредѣленія.

Если данъ отрѣзокъ PQ дуги на конопримѣ, то точку пересѣченія A касательныхъ изъ P и Q онъ отмѣчаетъ терминомъ „полюсъ“, а отрѣзки AP и AQ „примыкающими“ (Schenkel) даннаго отрѣзка дуги; двѣ дуги одной кривой, коихъ полюсы находятся на другой кривой той же конфокальной примы онъ

[1]) Geometrie der Lage II, 182.

называетъ „сравнимыми“ (по выраженію Шаля онѣ „подобны“, semblables).

1. Разность двухъ сравнимыхъ дугъ равна разности суммъ примыкающихъ; касательныя къ обѣимъ парамъ конечныхъ точекъ касательны и къ нѣкоторому кругу.

2. Если двѣ сравнимыя дуги имѣютъ общую точку, разность этихъ дугъ равна разности примыкающихъ къ дугѣ, составленной изъ соединенія обѣихъ данныхъ.

3. Если данный отрѣзокъ точкою A, такъ раздѣлимъ на двѣ части, чтобы онѣ составили примыкающія къ дугѣ кривой, то, подвигая одинъ конецъ примыкающей по кривой, и всякій разъ отъискивая посказаннымъ условіямъ точку A, найдемъ, что она движется по другой конфокальной кривой.

4. Двѣ дуги сравнимы, если они могутъ быть составлены изъ одинаковаго числа сравнимыхъ частей.

5. Если двѣ сравнимыя дуги мы раздѣлимъ на одинаковое число m сравнимыхъ частей, то полюсы всѣхъ этихъ $2m$ дугъ находятся на конфокальной кривой, а примыкающія составятъ части двухъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ одной и описанныхъ около другой конфокальной кривой. Разность въ величинѣ дугъ равна разности обѣихъ частей многоугольниковъ.

6. Если полную дугу кривой раздѣлимъ на m сравнимыхъ частей, то совокупность примыкающихъ составитъ часть описаннаго многоугольника, вписаннаго въ другой конфокальный эллипсъ, такъ что, построивъ оба эллипса, мы легко построимъ изъ одной точки многоугольникъ, описанный около одного изъ нихъ и вписанный въ другомъ. Всѣ построенные такимъ образомъ m угольники имѣютъ одинаковый периметръ.

7. Если лучъ, пущенный на внутреннюю сторону эллипса будетъ постоянно отражаться въ немъ, то онъ пройдетъ путь по многоугольнику, вписанному въ этомъ эллипсѣ и, описанному около другой конфокальной кривой. Если и эта другая кривая есть эллипсъ и если послѣ m отраженій лучъ возвратится въ прежнюю точку, то можно построить безконечное множество m угольниковъ, описанныхъ около одного и вписанныхъ въ другомъ эллипсѣ, и всѣ эти многоугольники имѣютъ равный периметръ.

Если чрезъ точки на сферѣ мы проведемъ лучи изъ центра сферы, то получимъ линейную секунду лучей. Квадратичная прима лучей, проходящихъ чрезъ коноприму точекъ на сферѣ, есть коноприма лучей или конусъ. Поэтому разсматриваемую здѣсь систему мы можемъ назвать системою конфокальныхъ конусовъ.

Въ каждомъ квадратичномъ конусѣ имѣется, слѣдовательно, двѣ фокусныя оси. Вообще, чрезъ каждый лучъ проходятъ двѣ сопряженныя нормальныя плоскости, а совокупность всѣхъ плоскостей, проходящихъ чрезъ лучъ, составляетъ инволюцію, а именно пары плоскостей этой инволюціи касательны къ одному изъ конфокальныхъ конусовъ. Въ частности, инволюція плоскостей, проходящихъ чрезъ фокальныя оси, состоитъ изъ паръ взаимно-перпендикулярныхъ (изотропна); сама же пара этихъ осей есть спеціальный конусъ этой конфокальной примы.

Въ каждомъ квадратичномъ конусѣ, кромѣ этихъ двухъ примъ плоскостей, имѣются еще двѣ особыя примы изъ параллельныхъ плоскостей, пересѣкающихъ конусъ въ кругахъ.

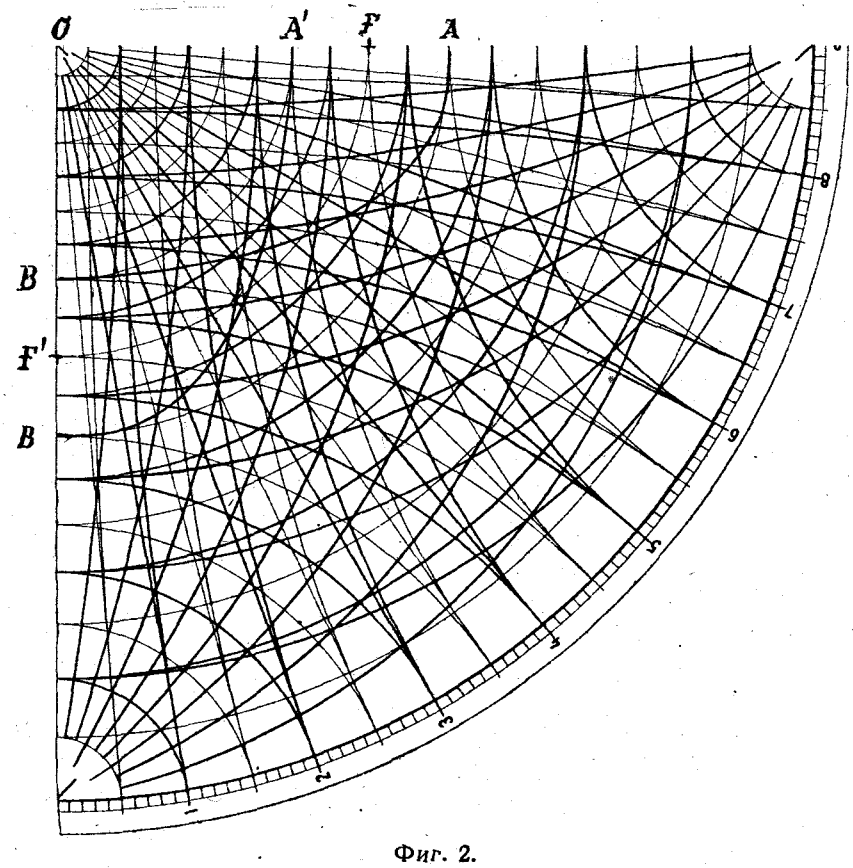
Эти круговыя сѣченія легко получить, если данные конусы замѣнить конусами полярными; такъ какъ въ только-что разсмотрѣнной системѣ элементами являются плоскости (конечно, проходящія чрезъ общій центръ), то въ полярной системѣ онѣ замѣняются перпендикулярными къ нимъ лучами. По аналогіи съ системами точекъ и лучей на плоскости можно было бы заключить, что построеніе линейныхъ примъ конопримъ для этихъ двухъ системъ будетъ различное, и потому въ данномъ случаѣ система конфокальныхъ кривыхъ могла бы и не быть линейною примою.

Однако, такое заключеніе можетъ быть и невѣрно, потому что системы точекъ и лучей на плоскости не родственны: въ первой мы имѣемъ линейную приму экстраэлементовъ (безконечно удаленныхъ точекъ), во второй только одинъ единственный экстраэлементъ (безконечно удаленную прямую). Системы же точекъ и лучей на сферѣ родственны; отсутствіе экстраэлементовъ для обѣихъ системъ есть лишь условіе родственности; сама же родственность доказывается тѣмъ, что всѣмъ сфероприматъ одной изъ этихъ системъ коррелятивны сфероприматъ другой. Родственность же устанавливаетъ то слѣдствіе, что всѣ теоремы и построенія одной изъ этихъ системъ непосредственно переносятся на другую.

Отсюда, въ частности, вытекаетъ, что если на сферѣ даны двѣ конопримы, то можетъ случиться, что будемъ ли мы ихъ разсматривать какъ конопримы точекъ или какъ конопримы лучей, линейная ихъ прима будетъ одна и та же и значитъ построеніе этой примы для обѣихъ системъ будетъ одинаково.

Если изобразимъ конопримы системы точекъ въ граммастереографической проекціи, то получимъ кривую, полуоси которой будутъ напр. OA и OB, а ея фокусъ точка F (фиг. 2). Чтобы перейти къ полярной конопримѣ, мы можемъ сохранить это изображеніе неприкосновеннымъ, но принять проекцію за гномостереографическую, и, для сравнимости изображеній, эту проекцію нужно преобразовать въ граммастереографическую.

отношенію къ этому кругу; получится другое изображеніе, напр. такое, что полуоси конопримы будутъ OA′ и OB′, и тогда, по извѣстнымъ намъ правиламъ, мы опредѣляемъ ея фокусы, изъ которыхъ одинъ пусть будетъ точка F′. Будучи фокусомъ конопримы A′B′, эта точка имѣетъ очень опредѣленное значеніе и по отношенію къ конопримѣ AB. Такъ какъ каждыя двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости, проходящія чрезъ фокусную ось F′ есть сопряженныя нормальныя плоскости по отношенію къ конопримѣ A′B′ (и всѣмъ ей конфокальнымъ) то значитъ перпендикуляры къ этимъ плоскостямъ, проведенныя изъ центра, есть сопряженные лучи по отношенію къ конопримѣ AB (и всѣмъ другимъ, для которыхъ изображеніе примы конопримъ A′B′ въ граммастереографической проекціи есть изобра-



Фиг. 2.

Это преобразованіе можетъ быть совершено такимъ образомъ, что кругъ на сферѣ, діаметръ котораго измѣряется прямымъ угломъ, мы принимаемъ за мнимый кругъ проективности, и каждой точкѣ конопримы на сферѣ мы находимъ ея поляру по

женіе въ гномостереографической проекціи). Но оба луча, перпендикулярные къ фокусной оси F′, лежатъ въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси; если же въ нѣкоторой центральной плоскости каждые два взаимноперпендикулярные лучи, сопряжены по отно-

шенію къ квадратичному конусу, то это имѣетъ мѣсто и для всѣхъ, параллельныхъ ей, нецентральныхъ плоскостей; кривая сѣченія конуса въ каждой такой плоскости есть, слѣдовательно, кругъ.

И такъ, плоскости, перпендикулярныя къ фокусной оси F′ пересѣкаютъ коноприму AB въ кругахъ, и такихъ круговыхъ сѣченій имѣется, слѣдовательно, два.

Отсюда и обратно, плоскости, перпендикулярныя къ оси F, есть круговыя сѣченія конопримы A′ B′.

Такъ какъ коноприма и на сферѣ вполнѣ опредѣляется двумя полуосями, то значитъ, всякая коноприма на сферѣ, сумма полуосей которой измѣряется прямымъ угломъ, тождественно одинакова съ конопримою полярною.

Двѣ такія конопримы въ ихъ полярномъ отношеніи другъ къ другу могутъ быть выведены одна изъ другой поворотомъ около центра на прямой уголъ, какъ это показано на фиг. 2 [1]).

Если конопримы, въ которыхъ сумма полуосей равна прямому углу, мы назовемъ *гармоническими*, то найдемъ, что двѣ таковыя опредѣляютъ линейную приму гармоническихъ конопримъ, которую естественно назвать также *гармонической*.

На основаніи всего изложеннаго выводимъ, что двѣ гармоническія примы взаимно полярныхъ конопримъ тождественно одинаковы; онѣ распадаются на пары тождественно одинаковыхъ взаимно полярныхъ конопримъ.

III. Совокупности въ пространствѣ.

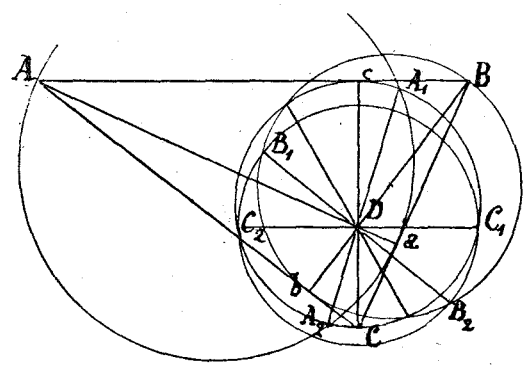
Аналогичныя, хотя и болѣе сложныя, разсужденія мы можемъ примѣнить и для системы въ пространствѣ.

Въ основаніе разсужденій мы и здѣсь положимъ инволюцію точекъ на плоскости, какъ въ основаніе разсужденія для системы на плоскости мы положили инволюцію точекъ на прямой. Послѣдняя характеризуется двумя двойными точками, первая же нѣкоторою, произвольно взятою, конопримою K^2, точки которой находятся на полярныхъ къ нимъ касательныхъ.

Въ такой инволюціи каждой точкѣ на плоскости коррелятивна, по отношенію къ данной кривой, ея поляра, на которой, въ свою очередь, кривая вызываетъ инволюцію паръ точекъ. Такимъ образомъ, соотвѣтственно каждой, данной на плоскости, точкѣ, получается безконечное множество паръ точекъ, каждая изъ которыхъ, совокупно съ данною точкою, составляетъ полярный трехугольникъ. Таковые составляютъ поэтому линейную терцію.

Если изъ какой-либо точки въ пространствѣ проведемъ лучи чрезъ вершины полярнаго трехугольника, то получимъ трехгранникъ, въ которомъ каждое ребро будетъ сопряжено съ противоположною гранью по отношенію къ кривой K^2, но изъ всѣхъ точекъ пространства имѣется только одна пара (симметричныхъ по отношенію къ плоскости чертежа) точекъ, исходящіе изъ которой три луча взаимно перпендикулярны, такъ что въ этомъ отношеніи каждому полярному трехугольнику на плоскости соотвѣтствуетъ одна единственная пара точекъ въ пространствѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, если A, B и C три вершины такого трехугольника, то, проведя чрезъ нихъ плоскости, перпендикулярныя къ противоположнымъ сторонамъ, найдемъ, что всѣ три пересѣкутся въ перпендикулярѣ къ плоскости, проектирующимся въ точкѣ D. Остается найти превышеніе искомой пары точекъ надъ плоскостью чертежа (фиг. 3).



Фиг. 3.

Это превышеніе найдется, если отрѣзки, A*a*, B*b* и C*c*, представляющіе высоты даннаго трехугольника, примемъ за діаметры шаровъ; тогда именно три шара и пересѣкутся въ парѣ искомыхъ точекъ. Въ сѣченіяхъ по тремъ вертикальнымъ плоскостямъ мы получимъ равнобедренные трехугольники съ общимъ

[1]) Въ перечисленіи «Р е й е» (l. c. I 260) особыхъ видовъ конусовъ, таковые конусы вовсе не вошли. Полное изложеніе предмета заключается въ имѣющей появиться статьѣ „Разряды конусовъ и простой способъ распознаванія этихъ разрядовъ“.

основаніемъ, состоящемъ изъ найденной пары точекъ, и если каждый такой трехугольникъ поворотомъ около его линіи высоты на прямой уголъ мы совмѣстимъ съ плоскостью чертежа, то найденная пара точекъ представится въ видѣ трехъ паръ A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, находящихся на одномъ кругѣ, имѣющемъ центръ въ точкѣ D; каждая изъ этихъ паръ представитъ концы діаметра этого круга въ пересѣченіи съ однимъ изъ ранѣе проведенныхъ круговъ.

Отсюда заключаемъ, что если бы три круга, опредѣляемые діаметрами Aa, Bb и Cc мы приняли за опредѣляющіе линейную секунду круговъ и отыскали бы мнимый ортогональный кругъ этой секунды, то его центръ D выразилъ бы проекцію, а его діаметръ — разстояніе пары искомыхъ точекъ, изъ которыхъ данный трехугольникъ проектируется тремя взаимно перпендикулярными лучами [1]).

Если бы мы найденныя въ пространствѣ точки соединили бы лучами съ точками кривой K^2, то получили бы конусы, для которыхъ эти три взаимно перпендикулярные луча были бы осями то есть перпендикулярными сопряженными, потому что очевидно, что они сопряжены и что они взаимноперпендикулярны.

Мы могли бы каждую пирамиду, опредѣляемую тремя сопряженными, по отношенію къ конусу, лучами, назвать *полярнымъ трехгранникомъ*, и тогда было бы очевидно, что произвольное плоское сѣченіе конуса и какого-нибудь его полярнаго трехгранника есть коноприма и полярный, по отношенію къ ней, трехугольникъ.

Въ частности, оси конуса есть нормальныя сопряженныя кривой K^2.

---

[1]) Точка D есть т. наз. точка высотъ трехугольника. Приведенная теорема справедлива, пока эта точка находится внутри трехугольника то есть пока всѣ его углы острые, что имѣетъ мѣсто для полярныхъ трехугольниковъ инволюціи на плоскости.

Обобщенная для всѣхъ трехугольниковъ, теорема гласитъ: точка высотъ трехугольника есть центръ ортогональнаго круга линейной секунды круговъ, опредѣляемой тремя кругами, діаметры которыхъ есть высоты трехугольника. Радіусъ этого ортогональнаго круга есть средняя пропорціональная разстояній точки высотъ отъ вершинъ и противоположныхъ имъ сторонъ трехугольника

Если всѣ три угла трехугольника острые, ортогональный кругъ секунды есть кругъ мнимый; если же одинъ изъ угловъ трехугольника тупой, этотъ кругъ есть кругъ вещественный то есть прямоугольно пересѣкаетъ остальные три круга.

Если около какой-нибудь коносекунды точекъ [1]) мы опишемъ конусъ, то каждый его полярный трехгранникъ составляетъ три сопряженные луча и по отношенію къ коносекундѣ, потому что плоскость, въ которой находятся точки касанія лучей конуса къ коносекундѣ, пересѣкаетъ нетолько конусъ, но и коносекунду точекъ въ конопримѣ точекъ, а полярный трехгранникъ въ полярномъ трехугольникѣ.

Слѣдовательно, въ частности, три оси описаннаго конуса будутъ нормальными сопряженными коносекунды, а такъ какъ изъ каждой точки пространства можно провести только одинъ конусъ, касательный къ коносекундѣ, то значитъ въ каждой точкѣ пространства пересѣкаются три нормально сопряженныхъ луча по отношенію къ данной коносекундѣ.

Отсюда видимъ, что положеніемъ одной, произвольно данной въ пространствѣ, точки вполнѣ опредѣляются три исходящіе изъ нее сопряженные нормальные луча, если дана какая-нибудь коносекунда точекъ или какъ особый спеціальный случай даже и коноприма K^2.

Но эти три нормально-сопряженные луча опредѣляются также и по одной данной плоскости, если ее принять за плоскость, проходящую чрезъ два изъ этихъ трехъ лучей.

Эта плоскость пересѣкаетъ плоскость чертежа въ прямой; если послѣднюю примемъ за поляру, то по отношенію къ ней легко найдемъ полюсъ, и перпендикуляръ, опущенный изъ него на данную плоскость, опредѣлитъ въ пространствѣ точку, относительно которой теперь извѣстно: въ какой плоскости находятся два изъ трехъ нормально сопряженныхъ лучей, извѣстенъ и третій лучъ. Проведя изъ этой точки всѣ лучи чрезъ точки кривой K^2, получимъ конусъ, а также и одну изъ его осей; двѣ его другія оси, находящіяся въ плоскости, перпендикулярной къ уже извѣстной оси, и есть искомыя.

Каждую изъ трехъ нормально сопряженныхъ плоскостей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, мы можемъ принять за плоскость, касательную къ одной коносекундѣ, относительной которой извѣстны еще центръ и всѣ три ея оси, изъ коихъ двѣ есть оси кривой K^2, а третья къ нимъ перпендикулярна. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя эти данныя, мы имѣемъ, по условіямъ симметріи, восемь касательныхъ плоскостей, а въ нихъ точки касанія къ коносекундамъ. Этихъ данныхъ вполнѣ достаточно для опредѣленія коносекунды, и притомъ получается такая совокуп-

---

[1]) Квадратичной поверхности.

ность коносекундъ, что въ каждой точкѣ пространства взаимно-перпендикулярно пересѣкаются три изъ нихъ. Эта совокупность называется *системою конфокальныхъ коносекундъ*; въ число ихъ входитъ, какъ особый спеціальный случай, и кривая K^2, называющаяся *фокальною конопримою*.

Если этою кривою опредѣляется въ каждой точкѣ пространства три нормальныя сопряженныя, то и обратно, совокупностью изъ трехъ такихъ сопряженныхъ на плоскости чертежа опредѣляется кривая K^2, такъ какъ каждые три такіе луча отмѣчаютъ на плоскости чертежа полярный трехугольникъ, а полярные трехугольники опредѣляютъ полярную систему, а слѣдовательно и ту кривую проективности, которая характеризуетъ эту систему.

Отсюда видимъ, что для системы конфокальныхъ секундъ мы имѣемъ фокальную коноприму не на одной только, а на всѣхъ трехъ плоскостяхъ симметріи системы, такъ какъ полярные трехугольники мы одинаково получаемъ на всѣхъ этихъ трехъ плоскостяхъ пересѣченіемъ тѣхъ же трехъ нормально сопряженныхъ лучей, проведенныхъ изъ одной точки; но при этомъ, конечно, кривою проективности полярной системы можетъ быть нетолько вещественная, но и мнимая коноприма.

Изъ одной точки въ пространствѣ мы можемъ провести безконечное множество конусовъ, касательныхъ къ коносекундамъ системы, и каждые три луча изъ этой точки, сопряженные по отношенію къ какому либо конусу, будутъ сопряжены и по отношенію къ коносекундѣ, около которой описанъ конусъ; но эти нормальныя сопряженныя то есть оси одного изъ конусовъ, будутъ таковыми по отношенію ко всѣй примѣ конусовъ, имѣющихъ ту же вершину, всѣхъ вписанныхъ въ нихъ коносекундъ.

Отсюда видимъ, что всѣ конусы этой примы имѣютъ общія оси и притомъ конфокальны, а значитъ имѣютъ также общія фокальныя оси. Ихъ общая плоскость симметріи, проходящая чрезъ эти оси, и касательная плоскость къ одной изъ коносекундъ въ вершинѣ конусовъ, и сами оси принадлежатъ поверхности коносекундъ.

Въ самомъ дѣлѣ, каждыя двѣ взаимноперпендикулярныя плоскости, проходящія чрезъ эти оси, фокальныя, сопряжены относительно всѣхъ конусовъ и всѣхъ коносекундъ. Какую бы плоскость мы ни провели чрезъ эту ось, ея полюсъ долженъ находиться на первой плоскости, также какъ эта вторая плоскость проходитъ чрезъ полюсъ первой; но такой же полюсъ долженъ находиться и въ плоскости третьей перпендикулярной, какъ съ нею сопряженной, слѣдовательно, этотъ полюсъ тоже долженъ находиться на той же фокальной оси; другими словами, сама фокальная ось состоитъ изъ точекъ касанія коносекундъ къ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ эту ось; слѣдовательно, одна изъ трехъ конфокальныхъ секундъ, пересѣкающихся перпендикулярно въ какой-нибудь точкѣ пространства, есть однополый гиперболоидъ.

Легко понять, какая-именно изъ трехъ нормальныхъ сопряженныхъ плоскостей въ данной точкѣ A есть касательная къ однополому гиперболоиду; вѣдь точка есть общій центръ конфокальныхъ конусовъ, описанныхъ около коносекундъ примы; въ частности, двѣ фокальныя оси, находящіяся на поверхности однополаго гиперболоида, являются таковыми для конусовъ, проходящихъ чрезъ фокальныя конопримы, находящіяся въ плоскостяхъ симметріи; какъ таковыя, эти оси находятся внутри конусовъ то есть пересѣкаютъ плоскости симметріи необходимо во внутреннихъ точкахъ этихъ конопримъ. Такъ какъ это одинаково относится ко всѣмъ точкамъ пересѣченія поверхности съ плоскостями симметріи, то значитъ всѣ точки пересѣченія однополаго гиперболоида плоскостями симметріи находятся внутри фокальныхъ конопримъ. Отсюда слѣдуетъ, что кривыя сѣченія коносекунды плоскостями симметріи будутъ однородны съ фокальными кривыми; если одна изъ фокальныхъ кривыхъ есть эллипсъ, то сѣченіе поверхности плоскостью этого эллипса будетъ также эллипсъ, заключенный внутри фокальнаго, и если фокальная кривая гипербола, то сѣченіе поверхности плоскостью этой гиперболы есть тоже гипербола, заключенная внутри фокальной [1]).

И дѣйствительно, легко доказать, что изъ трехъ фокальныхъ кривыхъ одна есть эллипсъ, другая—гипербола.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ какой-нибудь точкѣ C фокальной кривой мы проведемъ касательную плоскость, то точка C будетъ общимъ полюсомъ всѣхъ такихъ плоскостей по отношенію къ кривой, которая сама по себѣ есть спеціальная разность системы конфокальныхъ секундъ; отсюда заключаемъ, что точка C есть общее основаніе нормалей, сопряженныхъ съ плоскостями, проходящими чрезъ касательную, а потому въ самой касательной пересѣкается пара сопряженныхъ нормальныхъ плоскостей, то есть каждая такая касательная есть фокальная ось. Поэтому, если, принявъ точку C за центръ конуса, проведемъ изъ нея лучи чрезъ другую фокальную

[1]) Точки этой внутренней гиперболы, конечно, удалены отъ центра (на соотвѣтственныхъ радіусахъ векторахъ) больше, чѣмъ точки внѣшней.

кривую, получимъ круговой конусъ. Въ частности, если имѣется на какой-нибудь фокальной кривой безконечно-удаленная точка, то круговой конусъ для этого случая станетъ круговымъ цилиндромъ; всякая плоскость пересѣкаетъ послѣдній въ эллипсѣ и только въ эллипсѣ; значитъ, изъ двухъ вещественныхъ фокальныхъ кривыхъ одна должна быть эллипсомъ, а другая гиперболой.

Такъ какъ касательная къ фокальной кривой въ точкѣ C есть фокальная ось, то значитъ, плоскость, перпендикулярная къ ней и проходящая чрезъ точку C пересѣкаетъ каждую коносекунду системы въ такой конопримѣ, которая имѣетъ въ точкѣ C одинъ изъ своихъ фокусовъ. Въ частности, вершины фокальныхъ гиперболъ есть фокусы фокальнаго эллипса, плоскость котораго перпендикулярна къ плоскости гиперболы, а вершины этого эллипса есть фокусы фокальной гиперболы, и значитъ обѣ эти кривыя имѣютъ общую главную ось.

Имѣя обѣ эти кривыя, мы легко построимъ любую коносекунду системы по произвольно данной на главной оси точкѣ, которая будетъ одною изъ вершинъ этой поверхности.

Въ самомъ дѣлѣ, въ плоскости эллипса, коимъ вполнѣ опредѣляется линейная прима конопримъ лучей въ его плоскости, по любой точкѣ опредѣляются двѣ прямоугольно-пересѣкающіяся въ этой точкѣ конфокальныя конопримы, изъ коихъ одна есть эллипсъ, а другая гипербола; то же и въ плоскости гиперболы. Двумя же сѣченіями коносекунды въ двухъ плоскостяхъ симметріи вполнѣ опредѣляется и сама поверхность. Ясно, что если кривыя въ обѣихъ плоскостяхъ есть эллипсы, то поверхность есть эллипсоидъ; если обѣ кривыя гиперболы, то поверхность есть двуполый гиперболоидъ.

Но не каждая точка на главной оси есть вершина конфокальной поверхности; если означимъ вершины фокальнаго эллипса чрезъ E_1 и E_2, а вершины фокальной гиперболы чрезъ H_1 и H_2, причемъ $E_1E_2 > H_1H_2$, то вершины остальныхъ эллипсовъ сѣченія должны вообще находиться внѣ отрѣзка H_1H_2, вершины остальныхъ гиперболъ сѣченія должны находиться внутри отрѣзка E_1E_2; поэтому одновременно вершинами и эллипса, и гиперболы могутъ быть только точки, находящіяся внутри отрѣзковъ E_1H_1 E_2H_2, то есть одновременно находящіяся внутри какъ фокальнаго эллипса, такъ и фокальной гиперболы. Только такія точки могутъ быть и вершинами двуполаго гиперболоида, и притомъ такой гиперболоидъ будетъ единиченъ, такъ какъ въ плоскости фокальнаго эллипса онъ будетъ пересѣкаться въ эллипсѣ, а въ плоскости фокальной гиперболы онъ будетъ пересѣкаться въ гиперболѣ.

Этотъ результатъ, повидимому, находится въ противорѣчіи съ тою общею теоремою, по которой въ каждой точкѣ пространства прямоугольно пересѣкаются три конфокальныя поверхности. Это противорѣчіе того же рода, что мы имѣемъ и для системы на плоскости (и на сферѣ), гдѣ также въ каждой точкѣ прямоугольно пересѣкаются эллипсъ и гипербола, между тѣмъ какъ точки внутри отрѣзка, образуемаго фокусами, вовсе не принадлежатъ никакому эллипсу, а точки внѣ этого отрѣзка — никакой гиперболѣ. Это особенность предѣльнаго случая, такъ какъ достаточно взять точку хотя бы безконечно-близкую къ главной оси, и уже чрезъ нея пройдутъ обѣ фокальныя кривыя, которыя пересѣкутся въ ней прямоугольно.

Теперь разсмотримъ спеціальные случаи конфокальныхъ совокупностей.

На плоскости и на сферѣ эти совокупности опредѣляются парою фокусовъ. Мы можемъ: 1) сближать эти фокусы до ихъ слитія и 2) удалять одинъ отъ другого, пока одинъ изъ нихъ не сдѣлается безконечно-удаленнымъ. Ясно, что на сферѣ послѣдній случай не имѣетъ мѣста, такъ какъ нѣтъ безконечно-удаленныхъ точекъ [1]).

Въ первомъ случаѣ эллипсы замѣнятся кругами, а именно концентрическими; гиперболы же станутъ неопредѣленными и будутъ представлены лишь ассимптотами, такъ что совокупность гиперболъ будетъ представлена линейною примою центральныхъ лучей, которые, конечно, во всѣхъ точкахъ будутъ пересѣкать круги прямоугольно. Это одинаково относится къ системамъ на плоскости и на сферѣ, а слѣдовательно и къ конусамъ.

Во второмъ случаѣ обѣ системы кривыхъ то-есть и эллипсы, и гиперболы замѣнятся параболами; эти двѣ системы параболъ пересѣкаютъ другъ друга прямоугольно и въ совокупности составляютъ линейную приму параболъ лучей.

Въ пространствѣ конфокальная система опредѣляется одною единственною, произвольно взятою, конопримою, которая можетъ быть вещественною или мнимою.

Если она вещественна, то въ спеціальныхъ случаяхъ можетъ быть 1) кругомъ, 2) параболою и 3) парою прямыхъ (еще болѣе спеціальные случаи, когда кругъ точечный или обѣ прямыя сливаются въ одну двойную есть лишь частные предѣльные случаи перечисленныхъ).

---

[1]) Я не разсматриваю случая мнимыхъ фокусовъ, такъ какъ мы уже знаемъ, что это не есть особенный случай, а относится лишь къ инволюціи не на главной, а на второй оси.

Въ случаѣ 1) очевидно, что совокупность получаетъ ось вращенія, понятіе о главной оси системы, какъ общей главной оси фокальныхъ эллипса и гиперболы становится неопредѣленнымъ. Въ этомъ случаѣ для опредѣленія поверхностей остается дѣйствительнымъ лишь критерій сѣченія поверхностей плоскостями симметріи, которыя въ данномъ случаѣ находятся въ безконечно большомъ числѣ, но они уже не будутъ плоскостями симметріи каждой поверхности въ отдѣльности, а только плоскостями симметріи совокупности; это всѣ плоскости, проходящія чрезъ ось вращенія, и центральная плоскость, перпендикулярная къ этой оси.

Въ сѣченіи по послѣдней плоскости мы находимъ совокупность концентрическихъ круговъ и центральныхъ лучей; въ сѣченіи по каждой плоскости, проходящей чрезъ ось вращенія, мы находимъ обыкновенную совокупность эллипсовъ и прямоугольно пересѣкающихъ ихъ гиперболъ.

Отсюда заключаемъ, что конфокальныя поверхности этого случая есть 1) эллипсоиды вращенія, 2) однополые гиперболоиды вращенія и 3) плоскости, проходящія чрезъ ось вращенія (они замѣстятъ собою двуполые гиперболоиды общаго случая).

Съ этимъ случаемъ, слѣдовательно, совокупляется и третій случай, такъ какъ мы и его можемъ опредѣлить двумя пересѣкающимися въ центрѣ прямыми, представляющими центральные лучи, прямоугольно пересѣкающіе совокупность концентрическихъ круговъ.

Особый спеціальный случай этой совокупности есть тотъ, когда эллипсоиды становятся шарами. однополые гиперболоиды становятся неопредѣленными круговыми конусами. Въ этомъ случаѣ, всѣ поверхности кромѣ концентрическихъ шаровъ въ сущности распадаются на линейную секунду центральныхъ лучей.

Во второмъ случаѣ центръ системы также удаляется въ безконечность; какъ эллипсъ, такъ и гипербола замѣняются двумя фокальными параболами. Въ обѣихъ плоскостяхъ симметріи мы получаемъ примы конфокальныхъ параболъ, какъ сѣченій поверхностей.

Къ этому случаю вполнѣ примѣнимы всѣ приведенныя выше разсужденія общаго случая, а потому на него мы должны смотрѣть не какъ на особый спеціальный, а просто какъ на частный случай, охарактеризованный данными условіями. Поэтому мы можемъ непосредственно получить результаты, а именно: одна изъ поверхностей есть параболическій гиперболоидъ какъ частный случай однополаго; вершины этой поверхности на главной оси находятся только въ предѣлахъ отрѣзка, образуемаго обоими фокусами фокальныхъ параболъ (а значитъ и ихъ вершинами); обѣ другія поверхности есть эллиптическіе параболоиды какъ частные случаи эллипсоида и двуполаго гиперболоида.

Наконецъ и изъ этого частнаго случая выдѣляется особый спеціальный.

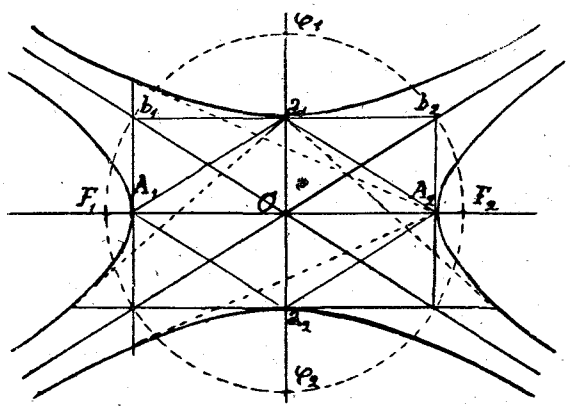
Замѣтимъ, что въ плоской системѣ конфокальныхъ параболъ, хотя вообще кривыя, входящія въ составъ примы не имѣютъ центра обратнаго равенства, но совокупность всѣхъ параболъ получаетъ такой центръ, который есть единственный настоящій фокусъ системы, потому что другой фокусъ удаленъ въ безконечность. Въ числѣ параболъ системы крайними разностями являются какъ сама главная ось, такъ и перпендикулярная къ ней прямая, проходящая чрезъ единичный фокусъ.

За фокальную параболу въ пространственной системѣ мы можемъ принять какую угодно параболу этой примы. Всѣмъ параболамъ этой примы принадлежитъ, въ качествѣ фокуса, одна и та же точка; но для прямой, какъ спеціальной параболы фокусъ становится неопредѣленнымъ и представленъ каждою точкою на этой прямой; но ясно, что отъ выбора точки всѣ остальныя построенія независимы, а главною осью становится прямая, проходящая чрезъ эту точку и перпендикулярная къ прямой. Принявъ эту прямую за главную ось, а данную за спеціальную фокальную параболу, мы на перпендикулярной плоскости симметріи получимъ фокальную параболу также въ видѣ центральной прямой, перпендикулярной къ первой плоскости симметріи. Получаемъ конфокальную совокупность, въ которой плоскость, проходящая чрезъ обѣ спеціальныя параболы, есть спеціальный параболоидъ, а всѣ остальные есть параболоиды вращенія, какъ частные случаи эллиптическихъ параболоидовъ; параболическій гиперболоидъ вырождается при этомъ въ приму плоскостей, проходящихъ чрезъ главную ось; сама же эта ось становится осью вращенія совокупности.

Теперь перейдемъ къ случаямъ, когда конфокальная совокупность опредѣляется мнимою конопримою, которая можетъ быть эллипсомъ или гиперболомъ.

Легко доказать, что **инволюція** (полярная система) **опредѣляемая мнимою гиперболою, тождественна съ тою, какая опредѣляется вещественною сопряженною гиперболою**, подразумѣвая подъ послѣднею ту, которая изъ нея выводится перестановкою полуосей, причемъ вещественные фокусы перемѣняются на мнимые и обратно. Если F_1 и F_2 фокусы одной ги-

перболы (мнимой), то φ_1 и φ_2—фокусы сопряженной (вещественной) гиперболы, и слѣдовательно главная ось послѣдней перпендикулярна къ главной оси первой (фиг. 4). Ассимптоты обѣихъ гиперболъ одни и тѣ же.



Фиг. 4.

Чтобы доказать это, достаточно изучить свойства сопряженныхъ гиперболъ.

Двѣ такія гиперболы принадлежатъ линейной примѣ гиперболъ точекъ, имѣющей двойную ось симметріи и двѣ проходящія чрезъ нея (подъ прямымъ угломъ) плоскости симметріи [1]). Въ нихъ вписанъ прямоугольникъ, коего пары противоположныхъ сторонъ выражаютъ величины осей обѣихъ гиперболъ, а ассимптоты—его діагонали.

Взявъ одну изъ вершинъ этого прямоугольника напр. b_1, мы найдемъ, что его поляра по отношенію къ гиперболѣ F_1F_2 есть прямая, проходящая чрезъ точку A_1 и параллельная ассимптотѣ точки b_1 то есть прямая A_1a_2; также найдемъ, что поляра вершины b_2 есть прямая A_2a_2; отсюда слѣдуетъ, что полюсъ прямой b_1b_2 есть точка a_2 пересѣченія двухъ предъидущихъ прямыхъ. Поэтому, если примемъ гиперболу F_1F_2 за мнимую, то за полюсъ прямой b_1b_2 придется принять діаметрально-противоположную точку a_1, которая находится въ такомъ случаѣ на своей полярѣ и слѣдовательно принадлежитъ вещественной кривой проективности. Безконечно удаленныя точки на ассимптотахъ есть также точки, принадлежащія той же вещественной кривой, чѣмъ послѣдняя и опредѣляется какъ гипербола $\varphi_1\varphi_2$ то есть имѣющая эти точки своими вещественными фокусами, что и тр. док.

Если изъ точки a_1 проведемъ двѣ касательныя къ гиперболѣ F_1F_2 и соединимъ точки касанія прямою, то послѣдняя есть сторона прямоугольника, противоположная сторонѣ b_1b_2; то же найдемъ, если изъ вершины A_2 гиперболы проведемъ касательныя къ сопряженной гиперболѣ $\varphi_1\varphi_2$ и соединимъ точки касанія; такимъ образомъ устанавливаются полярныя отношенія между вершинами и сторонами прямоугольника съ одной стороны и сторонами и вершинами ромба $a_1A_1\,a_2A_2$ съ другой.

Кромѣ того, извѣстно, что четыре вершины прямоугольника съ обѣими парами фокусовъ F_1F_2 и $\varphi_1\varphi_2$ находятся на одномъ кругѣ.

Въ заключеніе упомяну, что между точками обѣихъ кривыхъ можно установить особый видъ проективности, называемый кристаллографическою (также Affinität). Для этого достаточно принять проективность слѣдующихъ четырехъ точекъ $Oa_1b_1A_1\overline{\wedge}$ $OA_1b_1a_1$: это будетъ проективность кристаллографическая, потому что прямымъ, параллельнымъ въ одной плоской системѣ, будутъ гомологичны параллельныя же прямыя другой системы.

Нетолько прямая самогомологичныхъ точекъ Ob_1, но и всѣ прямыя, соединяющія гомологичныя точки, то есть въ частности прямая A_1a_1 и всѣ ей параллельныя есть прямыя самогомологичныя; поэтому, всѣ прямыя, параллельныя ассимптотамъ, пересѣкаютъ гомологичныя точки двухъ сопряженныхъ гиперболъ на равныхъ разстояіяхъ отъ точки ихъ пересѣченія съ другою ассимптотою. Пользуясь этою теоремою и имѣя какую-нибудь гиперболу, весьма просто построить гиперболу, ей сопряженную.

Въ отношеніи теоріи конфокальныхъ совокупностей сдѣланный выводъ показываетъ, что совокупность поверхностей, выводящаяся изъ принятой за фокальную кривую мнимой гиперболы, не представляетъ ничего новаго, и вошла въ составъ тѣхъ, которыя выводились на основаніи вещественной гиперболы.

Если принять во вниманіе, что въ общемъ случаѣ мы имѣемъ связанныя главныя осью двѣ фокальныя кривыя на двухъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ симметріи, изъ коихъ одна—эллипсъ, а другая—гипербола, что на третьей плоскости симмет-

[1]) Какъ симметричная линейная прима она упомянута въ статьѣ „Симметрія линейныхъ совокупностей конопримъ“ (эти Записки III 328); въ ней замѣчена неточность въ томъ, что всѣ гиперболы этой примы названы подобными, тогда какъ подобны только всѣ тѣ гиперболы, точки которыхъ заключены внутри одного угла между ассимптотами; сопряженныя гиперболы заключены внутри двухъ разныхъ угловъ и понятно, что онѣ не подобны.

ріи фокальная кривая не можетъ быть ни эллипсъ, ни гипербола, и, какъ теперь оказывается, мнимая гипербола, то остается возможнымъ къ допущенію лишь мнимый эллипсъ, чѣмъ выводъ фокальныхъ кривыхъ и заканчивается.

Въ заключеніе отмѣтимъ, что можно вывести инволюціи и на безконечно-удаленной плоскости; такъ какъ для нея изъ любой точки проектируются три нормально сопряженныхъ луча, то соотвѣтственная кривая проективности есть мнимый кругъ, и это имѣетъ мѣсто для всякихъ конфокальныхъ совокупностей въ пространствѣ.