27. Дополнительное замѣчаніе къ статьѣ А. К. Болдырева.

„Одно изъ свойствъ касающихся окружностей".

Къ свойствамъ сфероприм векторіальныхъ круговъ.

Е. С. Федорова.

Пользуюсь случаемъ, чтобы въ тысячный разъ отмѣтить преимущества метода новой геометріи, теоремы которой не знаютъ исключеній, а всегда имѣютъ совершенную общность.

Этимъ авторомъ уже приводится сообщенное мною ему (въ нѣсколькихъ словахъ; въ текстѣ авторъ нѣсколько расширилъ мое сообщеніе) доказательство его теоремы по методу новой геометріи. Самъ же онъ до конца пользуется методомъ геометріи древнихъ, а потому натыкается на затрудненіе въ томъ случаѣ, когда кругъ g не пересѣкаетъ касательную AB, и устраняетъ это затрудненіе дополнительнымъ построеніемъ.

По методу новой геометріи тутъ никакихъ двухъ построеній не надо, такъ какъ всегда искомый кругъ получается изъ касательной AB непосредственно преобразованіемъ обратными радіусами.

Въ данномъ случаѣ одинъ конецъ діаметра искомаго круга—точка G есть данная, а другой конецъ—точка L есть полюсъ прямой AB по отношенію къ кругу G преобразованія. Слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ, и однимъ и тѣмъ же способомъ, мы получаемъ по имѣющимся даннымъ точку L, чѣмъ искомый кругъ и опредѣляется вполнѣ.

Или еще проще: соединяемъ точку K′ съ данною точкою G прямою; точка K_1 и есть точка касанія съ кругу O_1 искомаго круга.

Мало того, въ формулировкѣ автора теорема представляетъ нѣчто неполное, недодѣланное. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь изъ точки g всегда можно провести къ даннымъ двумъ окружностямъ не одинъ, а два касательныхъ круга, и только одинъ изъ нихъ пересѣкаетъ касательную A_1A_2 въ (вещественныхъ) точкахъ D и E. Также нѣтъ надобности, чтобы обѣ данныя окружности были равны.

Поэтому, мнѣ представляется гораздо цѣлесообразнѣе и проще теорему А. К. Болдырева формулировать слѣдующимъ образомъ: чрезъ каждую точку G, взятую на прямой, проходящей чрезъ общую точку внѣшняго касанія F двухъ произвольныхъ круговъ O_1 и O_2, можно провести къ нимъ два касательные круга. Они получаются черезъ преобразованіе обратными радіусами обѣихъ общихъ касательныхъ, если G примемъ за центръ, а GF за радіусъ круга преобразованія и кромѣ точки G, опредѣляются парою вещественныхъ или мнимыхъ точекъ [1]) пе-

---

[1]) Двѣ мнимыя точки пересѣченія круга прямою есть, какъ извѣстно, концы діаметра круга, прямоугольно пересѣкающаго данный кругъ то есть двойныя мнимыя точки инволюціи (по отношенію къ кругу) на этой прямой.

Задача проведенія круга по одной вещественной точкѣ G и парѣ мнимыхъ точекъ D_1 и E_1 сводится къ отысканію круга, центръ котораго находится на перпендикулярѣ изъ средины O отрѣзка D_1E_1, проходящаго чрезъ точку G и прямоугольно пересѣкающаго кругъ, имѣющій діаметромъ тотъ же отрѣзокъ. Задача рѣшается очень просто, если предварительно произвести преобразованіе обратными радіусами, принявъ за центръ круга преобразованія точку O пересѣченія упомянутаго перпендикуляра съ кругомъ діаметра D_1E_1, а за радіусъ длину $OD_1=OE_1$. Остается чрезъ преобразованную точку G′ провести кругъ, прямоугольно пересѣкающій прямую D_1E_1(преобразованный кругъ) и сдѣлать обратное преобразованіе.

Но такъ какъ, проектируя точки D_1E_1 изъ точки F (фиг. 3 Болдырева) на параллельную сопряженную къ D_1E_1 получаемъ точки D и E, чрезъ которыя кругъ G пройдетъ вещественно, то само собою получается добавочное построеніе Болдырева при условіи, что прямая DE есть поляра точки I.

ресѣченія круга преобразованія съ общими касательными.

Къ этому можно прибавить слѣдующее.

Если возьмемъ три круга, касательные другъ къ другу, то общія касательныя къ каждымъ двумъ кругамъ, проведенныя въ ихъ общей точкѣ касанія, пересѣкаются въ одной точкѣ (радикальномъ центрѣ), которая есть центръ ортогональнаго круга, проходящаго чрезъ всѣ три точки касанія. Принявъ этотъ кругъ за кругъ преобразованія обратными радіусами найдемъ что всѣ три остальныя пары общихъ касательныхъ преобразуются въ три пары круговъ, проходящихъ чрезъ радикальный центръ, а такъ какъ три точки пересѣченія паръ касательныхъ находятся на одной прямой, то значитъ пары полученныхъ круговъ, кромѣ радикальнаго центра, пересѣкаются въ такихъ трехъ точкахъ, которыя находятся съ нимъ на одной окружности.

Съ обобщеніемъ теоремы А. К. Болдырева можно идти и дальше, нисколько не измѣняя хода доказательства, приведеннаго въ статьѣ этого автора.

Въ самомъ дѣлѣ, ту же теорему мы можемъ формулировать и такъ: линейная прима круговъ G (ортогональныхъ по отношенію къ обоимъ даннымъ) каждую изъ общихъ касательныхъ пересѣкаетъ въ той же инволюціи паръ точекъ, что и круги, касательные къ тѣмъ же даннымъ кругамъ; а такъ какъ совокупность круговъ, одинаково касательныхъ (то есть или оба имѣютъ внѣшнее касаніе, или одинъ внѣшнее, а другой внутреннее касаніе) къ двумъ даннымъ, есть сфероприма векторіальныхъ круговъ, (причемъ опредѣленная векторіальность должна быть придана и обоимъ даннымъ кругамъ, чѣмъ и обусловливается распредѣленіе точекъ внутренняго и внѣшняго касанія), то значитъ каждая сфероприма отмѣчаетъ на общей касательной (соотвѣтственной) ту же инволюцію паръ точекъ, что и линейныя примы круговъ ортогональныхъ.

Приведенное (стр. 292) доказательство вовсе не требуетъ даже, чтобы оба данные круга были касательны другъ къ другу, а требуетъ только, чтобы эти круги имѣли общія касательныя (внѣшнія или внутреннія). Центры же ортогональныхъ круговъ всегда въ совокупности составляютъ радикальную ось, независимо отъ того, касаются ли оба данные круга или нѣтъ.

Поэтому, теорема А. К. Болдырева въ обобщенномъ, по методу новой геометріи видѣ, раскрываетъ одно изъ интересныхъ свойствъ сферопримъ векторіальныхъ круговъ.

1 іюля 1913 г.