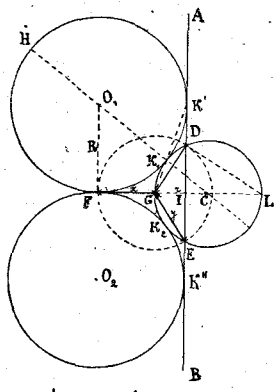
26. Одно изъ свойствъ касающихся окружностей.

А. К. Болдыревъ.

(Доложено 8 мая).

Теорема. (Черт. 1). Имѣемъ двѣ равныя взаимно-касающіяся окружности O_1, O_2. Имѣемъ прямую AB, касательную къ обѣимъ, и новую окружность C, касательную къ обѣимъ даннымъ.

Утверждаемъ, что точки пересѣченія этихъ двухъ касательныхъ, т. е. точки D и E, а также и точка касанія двухъ данныхъ окружностей, т. е. точка F, равно удалены отъ точки G, т. е. отъ одного изъ пунктовъ встрѣчи окружности C и прямой CF.



Черт. 1.

Доказательство:

$$CF^2 = CH \cdot CK_1 \quad \text{или} \quad CF^2 = CO_1^2 - O_1F^2$$

$$(x+r)^2 = (2R+r)r \quad \text{или} \quad (x+r)^2 = (R+r)^2 - R^2$$

$$x^2 + 2rx = 2Rr \quad \text{или} \quad x^2 + 2rx = 2Rr$$

$$x^2 = 2r\,(R - x)$$

Но съ другой стороны

$$GD^2 = GI \cdot GL$$

$$y^2 = 2r\,(R - x)$$

Поэтому

$$x = y.$$

Доказательство проф. Е. С. Федорова. Профессоръ Е. С. Федоровъ, которому я сообщилъ результатъ безъ вывода, прислалъ мнѣ совсѣмъ иное доказательство этой теоремы, основанное на методахъ Новой Геомегріи. Оно состоитъ въ слѣдующемъ. (Черт. 1).

Считаемъ данными по-прежнему три взаимно касательныя окружности $O_1 = O_2$ и C и прямую AB, касательную къ двумъ первымъ. Взявъ G за центръ, проводимъ новую окружность радіусомъ GF и докажемъ, что эта окружность пройдетъ чрезъ точки D и E (встрѣчи окружности C и прямой AB).

Принимаемъ кругъ G за кругъ преобразованія обратными радіусами т. е. такого преобразованія геометрической системы, когда каждая ея точка (X) замѣняется новой (Y), лежащей на томъ же лучѣ GX и при томъ такъ, что $GX \cdot GY = \rho^2 = GF^2$.

При такомъ преобразованіи окружности O_1 и O_2 замѣняются самими собою, какъ нормальныя къ окружности преобразованія. Прямая AB, касающаяся окружностей O_1 и O_2, замѣнится окружностью, проходящей чрезъ центръ преобразованія G и касательною къ тѣмъ же (точнѣе — къ преобразованнымъ) O_1 и O_2. Иными словами, AB превратится въ окружность C.

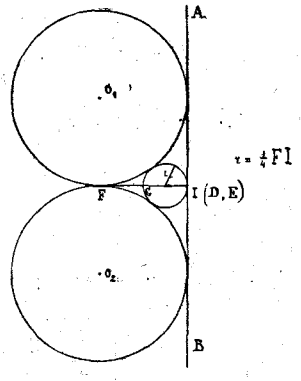
При этомъ точка пересѣченія AB съ окружностью преобразованія должна съ одной стороны остаться на мѣстѣ по смыслу замѣны, а съ другой должна упасть на окружность C[1]).

Этимъ доказано, что окружность преобразованія G пересѣкаетъ прямую AB въ той же точкѣ, что и окружность C.

Слѣдствіе 1. (Черт. 2) Вычертимъ особый тре-

[1]) Отсюда слѣдуетъ, что точки G, K_1 и K' лежатъ на прямой.

угольникъ, образованный двумя равными взаимно-касающимися окружностями O_1 и O_2 и общей къ нимъ касательной прямой AB. Радіусъ круга, вписаннаго въ такой треугольникъ равенъ $^1/_4$ разстоянія отъ точки касанія данныхъ окружностей до данной прямой



Чертежъ 2.

Краткое изслѣдованіе теоремы при различныхъ заданіяхъ.

1. Если оставимъ касательную прямую AB на мѣстѣ, а точки касанія K_1 и K_2 станемъ соотвѣтственно вращать по окружностямъ O_1 и O_2, то окружность C будетъ мѣняться по величинѣ и по характеру касанія (давая внѣшнія или внутреннія касанія; обращаясь одинъ разъ въ точку F и въ другомъ случаѣ въ прямую AB или ей симметричную съ другой стороны круговъ O_1 и O_2).

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ заданій, когда прямая AB и окружность C имѣютъ общія точки, теорема справедлива въ буквальномъ ея смыслѣ.

Въ этомъ нетрудно убѣдиться и построеніями, и разсужденіями.

2. Если же заданія таковы, что прямая AB и окружность C не имѣютъ общихъ точекъ, то теорема въ томъ видѣ, какъ она выражена въ самомъ началѣ, теряетъ смыслъ.

Однако, формула

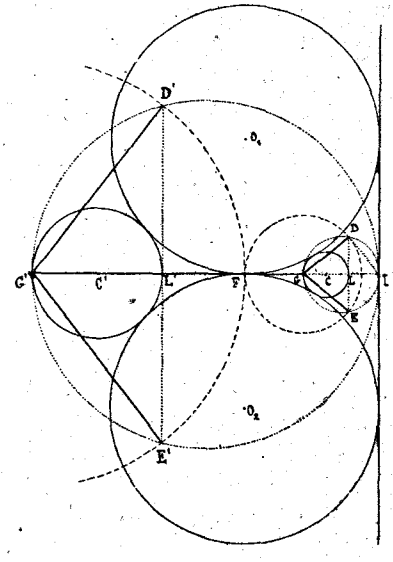
$$x^2 = 2r\ (R - x),$$

изъ которой теорема была выведена, сохраняетъ свое значеніе въ полной мѣрѣ, но получаетъ другой геометрическій смыслъ, который безъ особыхъ затрудненій можно усмотрѣть изъ чертежа 3.

Слѣдствіе 2. Изъ теоремы и ея изслѣдованія вытекаетъ способъ рѣшенія такой задачи на построенія. Выражаюсь сокращенно, пользуясь обозначеніями своихъ чертежей.

Даны окружности O_1 и O_2, равныя и взаимно касающіяся, и точка G на ихъ общей касательной. Построить новую окружность касательную къ обѣимъ даннымъ и проходящую чрезъ G.

Прежде всего проводимъ касательную AB и окружность изъ G радіусомъ GF. Если эти двѣ линіи пересѣкутся (черт. 1), то точки ихъ пересѣченія D и E будутъ принадлежать искомой окружности и задача сведена къ проведенію окружности чрезъ 3 точки G, D, E.



Чертежъ 3.

Если же AB и G не пересѣкутся (черт. 3), то строимъ еще одну вспомогательную окружность на GI, какъ на діаметрѣ, а точки D и E ея пересѣченія съ первой вспомогательной окружностью (центръ G) соединяемъ между собою. Получаемъ точку L. На GL, какъ на діаметрѣ строимъ окружность. Она и будетъ искомой.