22. Строгое уравновѣшеніе рудничныхъ полигоновъ.

И. М. Бахурина.

(Доложено 18 декабря).

Строгое уравновѣшеніе рудничныхъ полигоновъ по методу наименьшихъ квадратовъ въ практикѣ можно сказать совсѣмъ не встрѣчается. Причиной этого является сложность вычисленій, связанныхъ съ уравновѣшеніемъ по строгому методу, такъ какъ при этомъ необходимо, если рѣчь идетъ о полигонѣ произвольной формы, вычислить отдѣльно каждый коэффиціентъ при каждой отдѣльной поправкѣ непосредственно измѣренныхъ величинъ для составленія условныхъ уравненій, далѣе составлять изъ этихъ коэффиціентовъ произведенія и квадраты опять для каждаго отдѣльно и ихъ суммировать—для образованія уравненій коррелятъ; далѣе—само рѣшеніе уравненій коррелятъ не составляетъ уже трудности, точно также какъ и нахожденіе поправокъ для отдѣльныхъ измѣреній. Но нахожденіе поправокъ для координатъ пунктовъ и азимутовъ линій опять уже затруднительно, ибо оно непремѣнно требуетъ вычисленія поправокъ для каждаго отдѣльнаго пункта и постепеннаго суммированія этихъ поправокъ.

Между тѣмъ въ практикѣ очень часто совсѣмъ не интересно знать ни поправокъ отдѣльныхъ измѣреній, ни даже поправокъ координатъ отдѣльныхъ пунктовъ и азимутовъ становъ, но зато бываетъ очень желательно знать поправку координатъ какой нибудь одной точки и поправку азимута какого нибудь одного стана, которые, скажемъ, послужатъ исходными для съемки новаго полигона или которые получаются исходя изъ другой съемки, и является вопросъ объ уравновѣшеніи узлового пункта.

Для полигона произвольнаго вида мы должны однако и для полученія поправокъ одного пункта продѣлать всѣ вышеперечисленныя сложныя вычисленія, вотъ почему и въ подобныхъ этому случаяхъ строгое уравновѣшеніе на практикѣ также не встрѣчается.

Между тѣмъ причина сложности вычисленій заключается въ существѣ вопроса и о какомъ бы то ни было упрощеніи не можетъ быть рѣчи, если дѣло идетъ о произвольной формѣ полигона съ безконечной разнообразностью ея видоизмѣненій, и если мы не хотимъ достигнуть упрощеній путемъ отклоненія отъ строгости метода.

Возможность упрощенія начинается съ того момента, когда мы формѣ полигона припишемъ какую нибудь закономѣрность, причемъ всѣ выводы по столько будутъ интересны для практики, поскольку приписанная формѣ полигона закономѣрность соотвѣтствуетъ дѣйствительности. О закономѣрности формы обычныхъ рудничныхъ полигоновъ мы говорили (см. стр. 172 „О накопленіи погрѣшностей въ рудничныхъ полигонахъ“). Для полигоновъ такой формы производство строгаго уравновѣшенія значительно упрощается и хотя остается все таки достаточно сложнымъ, но не сложнѣе вычисленій уравновѣшенія въ другихъ какихъ-либо случаяхъ практики.

Упрощенія заключаются въ слѣдующемъ:

1) Вычисленія каждаго отдѣльно коэффиціента при каждой отдѣльной поправкѣ непосредственно измѣренныхъ величинъ можно избѣжать, и можно непосредственно вычислить коэффиціенты для уравненій коррелятъ, хотя и сами коэффиціенты въ условныхъ уравненіяхъ принимаютъ крайне простойвидъ.

2) Если насъ интересуютъ только поправки координатъ, то вычисленія поправокъ отдѣльныхъ элементовъ измѣренія можно избѣжать.

3) Можно дать формулу, благодаря которой найдется поправка координатъ любого пункта, не вычисляя поправокъ для координатъ прочихъ всѣхъ пунктовъ.

4) Можно дать формулу, по которой вычислится поправка азимута любого стана, не вычисляя поправокъ отдѣльныхъ угловъ.

При такихъ упрощеніяхъ можно думать, что методъ строгаго уравновѣшиванія можетъ себѣ найти мѣсто въ нѣкоторыхъ случаяхъ практики.

Вопросъ объ уравновѣшеніи полигона въ общемъ видѣ представится такъ: мы имѣемъ три уравненія погрѣшностей такого вида.

$$\left.\begin{aligned} a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + a_3\,\delta_3 + \ldots &= -f\alpha \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + \ldots &= -fy \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + \ldots &= -fx \end{aligned}\right\}$$

Гдѣ $\delta_1 - \delta_n$ суть поправки непосредственно измѣренныхъ величинъ, умноженныя на корень квадр. изъ вѣса.

Изъ этихъ уравненій составляемъ три уравненія коррелятъ слѣдующаго вида:

$$\begin{aligned} |aa|\,k_1 + |ab|\,k_2 + |ac|\,k_3 &= -f\alpha \\ |ab|\,k_1 + |bb|\,k_2 + |bc|\,k_3 &= -fy \\ |ac|\,k_1 + |bc|\,k_2 + |cc|\,k_3 &= -fx \end{aligned}$$

Рѣшая эти уравненія способомъ опредѣлителей, получимъ для k слѣдующія значенія:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{A}f\alpha + \mathrm{B}fy + \mathrm{C}fx \\ k_2 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{B}f\alpha + \mathrm{d}fy + \mathrm{E}fx \\ k_3 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{C}f\alpha + \mathrm{E}fy + \mathrm{F}fx \end{aligned}$$

Причемъ $\mathrm{D} = -\left\{ |aa|\,\mathrm{A} + |ab|\,\mathrm{B} + |ac|\,\mathrm{C} \right\}$

A, B, C, d, E и F суть миноры, значенія которыхъ таковы:

$$\mathrm{A} = +\begin{vmatrix} |bb| & |bc| \\ |bc| & |cc| \end{vmatrix} \quad \mathrm{B} = -\begin{vmatrix} |ab| & |ac| \\ |bc| & |cc| \end{vmatrix} \quad \mathrm{C} = +\begin{vmatrix} |ab| & |ac| \\ |bb| & bc| \end{vmatrix}$$

$$d = +\begin{vmatrix} |aa| & |ac| \\ |ac| & |cc| \end{vmatrix} \quad \mathrm{E} = -\begin{vmatrix} |aa| & |ac| \\ |ab| & bc| \end{vmatrix} \quad \mathrm{F} = +\begin{vmatrix} |aa| & |ab| \\ |ab| & bb \end{vmatrix}$$

Поправка $\delta_i = a_i\,k_1 + b_i\,k_2 + c_i\,k_3$.

Попробуемъ вести уравновѣшеніе нѣсколько иначе.

Уничтожимъ сначала невязку $f\alpha$, не обращая вниманіе на невязки fx и fg.

Тогда каждая изъ измѣренныхъ величинъ получитъ нѣкоторую поправку $\delta i'$, которая будетъ равна $= a_i \times -\frac{f\alpha}{|aa|}$ т. е. эту поправку мы получаемъ способомъ наименьшихъ квадратовъ, но пользуясь только первымъ уравненіемъ.

Взявъ теперь исправляемыя значенія измѣренныхъ величинъ, будемъ разсматривать ихъ какъ непосредственно измѣренныя величины и снова произведемъ уравновѣшеніе, но примемъ во вниманіе всѣ три уравненія.

Уравненія коррелятъ примутъ такой видъ:

$$\begin{aligned} |aa|\,k'_1 + |ab|\,k'_2 + |ac|\,k'_3 &= 0. \\ |ab|\,k'_1 + |bb|\,k'_2 + |bc|\,k'_3 &= -f'y \\ |ac|\,k'_1 + |bc|\,k'_2 + |cc|\,k'_3 &= -f'x \end{aligned}$$

Невязки $f'x$ и $f'x$ будутъ отличны отъ прежнихъ, но связаны съ ними такими соотношеніями:

$$f'y = fy - \frac{|ab|}{|aa|}f\alpha$$

и

$$f'x = fx - \frac{|ac|}{|aa|}f\alpha$$

Новыя значенія коррелятъ будутъ таковы:

$$\begin{aligned} \mathrm{k'}_1 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{A} \cdot 0 + \mathrm{B}f'y + \mathrm{C}f'x \\ \mathrm{k'}_2 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{B} \cdot 0 + df'y + \mathrm{E}f'\alpha \\ \mathrm{k'}_3 \cdot \mathrm{D} &= \mathrm{B} \cdot 0 + \mathrm{E}f'y + \mathrm{F}f'x \end{aligned}$$

Коэффиціенты A, B, C, d, E, F и D имѣютъ тѣ же значенія, что и раньше

Поправки δ, которыя мы опредѣлимъ съ помощью этихъ коррелятъ, будутъ имѣть такой видъ:

$$\delta''_i = a_i\,k'_1 + b_i\,k'_2 + c_i\,k'_3.$$

Прибавимъ къ $\delta i''$ ранѣе вычисленное $\delta i'$, мы получимъ прибавку $\delta i'''$, которую придали къ непосредственно измѣреннымъ величинамъ.

Напишемъ теперь выраженіе для $\delta i'''$ полностью.

$$\delta_i''' = \delta_i' + \delta_i'' = -a_i \frac{f\alpha}{|aa|} + a_i k_i' + b_i k'_2 + c_i k'_3.$$

Или такъ:

$$\delta_i''' = -a_i \frac{f\alpha}{|aa|} + \frac{a_i}{D}\left[Bf'y + Cf'x\right] + \frac{b_i}{D}\Big| df'y +$$

$$+ Ef'x\Big| + \frac{c_i}{D}\Big| Ef'y + Ff'x\Big| .$$

Подставивъ сюда найденныя выше значенія для $f'x$ и $f'y$ получимъ:

$$\delta_i''' = -a_i \frac{f\alpha}{|aa|} + \frac{a_i}{D}\left[Bfy + Cfx - \frac{B|ab|}{|aa|} - \frac{C|ac|}{|aa|}\right] +$$

$$+ \frac{b_i}{D}\left[dfy + Efy - \frac{d|ab|}{|aa|} f\alpha - \frac{E|ac|}{|aa|} f\alpha\right] + \frac{c_i}{D}\left[Ey + Ffx - \right.$$

$$\left. - E\left|\frac{ab}{aa}\right| f\alpha - F\frac{|ac|}{|aa|} f\alpha\right| .$$

Соединивъ въ одно коэффиціентъ при ai, получимъ:

$$D \cdot \left[(-D - B|ab| - C|ac|)\frac{f\alpha}{|aa|} + Bfy + Cfx\right]$$

Замѣтимъ, что по свойству опредѣлителей:

$$B|aa| + d|ab| + E|ac| = 0$$

или

$$B = -\frac{d|ab| + E|ac|}{|aa|}$$

Это есть коэффиціентъ при $f\alpha$ въ скобкахъ, передъ которыми стоитъ bi.

Точно также $C|aa| + E|ab| + F(ac) = 0$

и

$$C = -\frac{E|ab| + F|ac|}{|aa|}$$

Это есть коэффиціентъ при $f\alpha$ въ скобкахъ, передъ которыми стоитъ ci.

Замѣтимъ, что $-D = A|aa| + B|ab| + C|ac|$, а потому $-D - B|ab| - C|ac| = A|aa|$.

Такимъ образомъ коэффиціентъ при $f\alpha$ въ скобкахъ, передъ которыми стоитъ ai будетъ равенъ

$$\frac{A|aa|}{|aa|} = A$$

Введя въ выраженіе для δ_i''' всѣ указанныя преобразованія, получимъ:

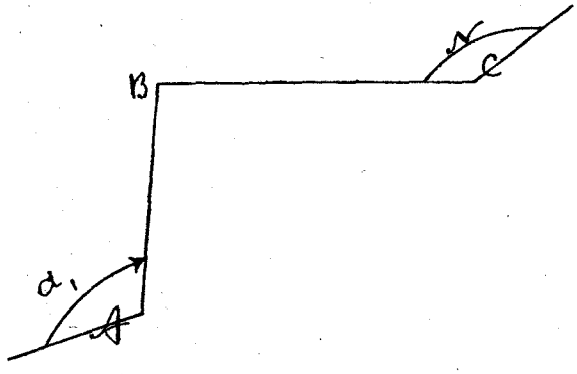
$$\delta_i''' = a_i(Af\alpha + Bfy + Cfx) + b_i(ABf\alpha + Dfy + Efx) +$$
$$+ Ci\ (Cfx + Efy + Ff\alpha) = \delta_i .$$

Получаемъ извѣстное положеніе Гауса, доказанное для нашего частнаго случая, т. е.

Если несовершенно уравновѣшеныя наблюденія снова уравновѣсить, какъ будто бы онѣ были непосредственными наблюденіями, то получимъ тотъ же самый результатъ, какъ если бы съ самаго начала уравновѣсили непосредственныя наблюденія, принявъ во вниманіе всѣ условныя уравненія.

Обратимся теперь къ уравновѣшенію полигоновъ разсматриваемаго нами вида.

Пусть намъ данъ полигонъ ABC, состоящій изъ двухъ прямолинейныхъ участковъ AB и BC пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.



Полигонъ идетъ отъ точки A имѣя включающій его въ съемку уголъ α_1 и кончается въ точки C имѣя замыкающіи его уголъ α_N.

Пусть координаты точекъ A и C извѣстны намъ съ точностью, превращающей точность опредѣленія точекъ въ полигонной рудничной съемкѣ и пусть полигонъ ABC вставленъ между двумя такими направленіями, которыя намъ опять таки извѣстны съ большой точностью. Пусть въ части AB будетъ n становъ примѣрно одинаковой длины, которую назовемъ черезъ s.

Пусть въ части BC m становъ той же, что и въ AB длины. Пусть далѣе AB ||оси абсциссъ и Bc|| оси ординатъ. Начавъ вычисленіе азимутовъ становъ отъ точки A найдемъ, дойдя до точки C, невязку $f\alpha$ въ углахъ. Слѣдуя обычному правилу, распредѣлимъ эту невязку поровну между всѣми углами; такимъ образомъ невязка въ углахъ уничтожается.

Вычисляя координаты съ уже исправленными значенія, угловъ, найдемъ невязни fy и fx, причемъ будемъ считать, что невязки равны вычисленному значенію—то, которое должно быть:

$$fy \text{ и } fx = \text{вычисл.} - \text{данное}$$

Назвавъ черезъ δ поправки, которыя надо придать къ угламъ и $\frac{ds}{\sqrt{p}}$ поправки, которыя надо придать къ длинѣ одного стана, напишемъ условныя уравненія, принявъ для простоты слѣдующія допущенія: sin азимута любого стана въ полигонѣ AB положимъ $= 0$, а $\cos = 1$, въ полигонѣ BC sin азимута положимъ $= 1$, а $\cos = 0$.

$$(1)\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \cdots\cdots + \delta_n + \delta_{n+1} + \delta_{n+2} + \cdots\cdots + \delta_{n+m} + \delta_{n+m+1} = 0.$$

$$(2)\ ns\delta_1 + (n-1)s\delta_2 + \cdots s\delta_n + \frac{1}{\sqrt{p}}(ds_{n+1} + ds_{n+2} + \cdots\cdots + ds_{n+m}) = -fy.$$

$$(3)\ \frac{1}{\sqrt{p}}(ds_1 + ds_2 + \cdots + ds_n) - ms\delta_1 - \cdots \cdots - ms\delta_n - ms\delta_{n+1} - (m-1)s\delta_{m+2} - (m-2)s\delta_{m+3} - \cdots - s\delta_{n+m} = -fx.$$

Умноживъ первое уравненіе на ms и придавъ къ третьему, преобразуемъ третье въ такой видъ:

$$(4)\ \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}(ds_1 + ds_2 + \cdots\cdots + ds_n) + s\delta_{n+2} + 2s\delta_{n+3} + 3s\delta_{n+4} + \cdots + (m-1)s\delta_{n+m} + ms\delta_N = -fx.$$

Это уравненіе мы могли бы получить иначе.

Представимъ себѣ, что вычисленіе координатъ ведется отъ точки C къ точкѣ B въ полигонѣ BC и отъ точки BA къ точкѣ B, то получимъ невязку въ точкѣ B, которая не будетъ отличаться отъ прежде полученной нами невязки въ точкѣ C при вычисленіи полигона отъ A къ C, ибо $f\alpha = 0$.

Если же теперь составимъ условное уравненіе для fx, то и получимъ, преобразованное (3).

Составивъ теперь коэффиціенты при коррелятахъ въ нормальныхъ уравненіяхъ, получимъ:

$$|aa| = N = n + m + 1 \qquad |ab| = \frac{(n+1)n}{2}s = \omega\frac{n^2}{2}s$$

$$|ac| = \frac{m(m+1)}{2} = \omega\frac{m^2 s}{2}$$

$$|bb| = \frac{m}{p} + \frac{n^3}{3}s^2 \qquad |bc| = 0 \quad |cc| = \frac{n}{p} + \frac{m^3 s^2}{3}$$

Принимая $\frac{n(n+1)}{2}$ приблизительно равнымъ $\frac{n^2}{2}$ мы дѣлаемъ погрѣшность того же порядка, которая допускается Іорданомъ въ его теоріи вытянутаго полигона, полагая $\sum_{i=1}^{i=n} n_i^2 = \frac{n^3}{3}$.

Рѣшая уравненія коррелятъ, мы найдемъ для нихъ слѣдующія значенія:

$$k_1 = \frac{1}{D}(Bfy + Cfx)$$

$$k_2 = \frac{1}{D}(dfy + Efy)$$

$$k_3 = \frac{1}{D}(Efy + Ffx)$$

Коэффиціенты B, C, d, E, F и D вычисляются, какъ указано на стр. 260 причемъ вычисленія нѣсколько упрощаются, вслѣдствіе того что $|bc| = 0$, а остальные коэффиціенты имѣютъ очень простой видъ.

$$B = -|ab|\,|cc| \quad C = -|ac|\,|bb| \quad d = N|cc| - |ac|^2$$

$$E = |ab|\,|ac| \quad F = N|bb| - |ab|^2$$

Подставляя сюда найденныя выше значенія $|ab|, |cc|$ и пр. получимъ.

$$B = -\frac{n^2 s}{2}\left(\frac{n}{p} + \frac{m^2 s^3}{3}\right) \qquad C = -\frac{m^2 s}{2}\left(\frac{m}{p} + \frac{n^3 s^2}{3}\right)$$

$$d = N\left(\frac{m}{p} + \frac{n^3}{3}s^2\right) - \frac{m^4 s^2}{4} \qquad F = N\left(\frac{n}{p} + \frac{m^3}{3}s^2\right) - \frac{n^4}{4}s^2$$

$$E = \frac{m^2 n^2}{4}s^4$$

Такимъ образомъ зная число становъ въ полигонахъ A B и B C и среднюю длину стана, находимъ безъ труда всѣ нужные коэффиціенты.

Остается вычислить опредилитель D.

$$-D = N.A + \frac{n^2}{2}s\,B + \frac{m^2 s}{2}C$$

B и C у насъ уже найдены, остается найти A.

$$A = |bb|\,|cc| = \left(\frac{m}{p} + \frac{n^3 s^2}{3}\right)\left(\frac{n}{p} + \frac{m^3 s^2}{3}\right)$$

Назовемъ длину полигона AB черезъ L_1 и длину полигона BC черезъ L_2 и введемъ эти величины въ данные выше коэффиціенты
Тогда получимъ:

$$|aa| = N \qquad |ab| = \frac{nL_1}{2} \qquad |ac| = \frac{mL_2}{2}$$

$$|bb| = \frac{m}{p} + \frac{nL_1^2}{3} \qquad |bc| = 0 \qquad |cc| = \frac{n}{p} + \frac{mL_2^2}{3}$$

$$B = -\frac{nL_1}{2}\left(\frac{n}{p} + \frac{mL_2^2}{3}\right) \qquad C = -\frac{mL_2}{2}\left(\frac{m}{p} + \frac{nL_1^2}{3}\right)$$

$$d = N\left(\frac{m}{p} + \frac{nL_1^2}{3}\right) - \frac{m^2 L_2^2}{4} \qquad F = N\left(\frac{n}{p} + \frac{mL_2^2}{3}\right) - \frac{n^2 L_1^2}{4}$$

$$E = \frac{L_1^2 L_2^2}{4} \qquad A = \left(\frac{m}{p} + \frac{nL_1^2}{3}\right)\left(\frac{n}{p} + \frac{mL_2^2}{3_1}\right)$$

Итакъ корреляты k_1, k_2 и k_3 унасъ извѣстны $\frac{k_2}{p}$ есть та поправка, которую надо придать къ измѣренному значенію длины стана въ полигонѣ BC. Нетрудно видѣть, что $-fy - \frac{mk_2}{p}$ есть та поправка, которую надо придать къ вычисленному значенію ординаты точки B, чтобы получить ея уравновѣшенное значеніе; $\frac{k_3}{p}$ есть та поправка, которую надо придать къ измѣренному значенію длины стана въ полигонѣ AB, слѣдов. $\frac{nk_3}{p}$ есть та поправка, которую надо придать къ вычесленному значенію абсциссы точки B, чтобы получить ея уравновѣшенное значеніе.

Положимъ: Уравн. знач. X_B = вычисл. зн. $X_B + \delta X_B$

Уравн. знач. Y_B = вычисл. зн. $Y_B + \delta Y_B$

тогда:

$$\delta X_B = \frac{nk_3}{p}$$

$$\delta Y_B = -fy - \frac{mk_2}{p}$$

Назовемъ черезъ i номеръ пункта считая номеръ пункта B за O и подвигаясь отъ B къ A въ полигонѣ AB и отъ B къ C въ полигонѣ BC.

Тогда поправка для угла, вершиной котораго служитъ пунктъ N°i въ полигонѣ AB, будетъ $\delta_{\alpha i}$

$$\delta_{\alpha i} = k_1 + isk_2$$

a въ полигонѣ ВС

$$\delta\alpha i = k_1 + isk_3$$

Суммируя всѣ поправки $\delta\alpha i$ отъ $i=1$ до $i=n$, получимъ поправку азимута послѣдняго въ полигонѣ АВ стана (примыкающаго къ В).

$$\delta B_A = nk_1 + \frac{n(n+1)s}{3}k_2 \cong nk_1 + \frac{n^2s}{2}k_2 = nk_1 + \frac{nL_1}{2}k_2.$$

Суммируя всѣ поправки, полагая $i=1$ до $i=m$ получимъ поправку азимута послѣдняго въ полигонѣ ВС стана (примыкающаго къ В)

$$-\delta B_C = mk_1 + \frac{m(m+1)}{2}k_3 = mk_1 + \frac{m^2s}{2}k_3 = mk_1 +$$

$$+\frac{mL_2}{2}k_3.$$

Повѣркой можетъ служить равенство:

$$\delta B_A + k_1 - \delta B_C = Nk_1 + \frac{m^2s}{2}k_3 + \frac{n^2s}{2}k_2 = |aa|\,k_1 +$$

$$+|ab|\,k_2 + |ac|\,k_3 = 0.$$

Назовемъ дальше черезъ i нумеръ стана въ полигонѣ АВ или ВС, у котораго N° пункта, ближайшаго къ В будетъ i, тогда поправка азимута ($\delta A i$) любого стана въ полигонѣ АВ будетъ

$$\delta A i = \delta B_A - ik_1 - \frac{i(i+1)s}{2}k_2$$

а въ полигонѣ ВС

$$\delta A i = \delta B_C + ik_1 + \frac{i(i+1)s}{2}k_3.$$

Поправки для координатъ любого пункта въ полигонѣ АВ могутъ быть вычислены по слѣдующимъ формуламъ:

$$\delta X i = \frac{n-i}{p}k_3$$

$$\delta y i = \delta y_B - k_1 is\left(n - \frac{i}{2}\right) - k_3 i\left(\frac{L_1^2}{2} - \frac{i^2s^2}{6}\right).$$

Поправки для координатъ любого пункта въ полигонѣ ВС можно вычислить по такимъ формуламъ:

$$\delta x i = \delta x_B + k_1 is\left(m - \frac{i}{2}\right) + k_3 i\left(\frac{i^2s^2}{6} + \frac{L_2^2}{2}\right)$$

$$\delta y i = \delta Y_B + \frac{ik_2}{p} = -fy - \frac{(m-i)k_2}{p}.$$

По формуламъ, приведеннымъ выше, мы можемъ найти уравновѣшенное значеніе любого пункта полигона, не вычисляя уравновѣшеннаго значенія координатъ всѣхъ прочихъ пунктовъ и также уравновѣшенное значеніе азимута любого стана, не вычисляя уравновѣшеннаго значенія всѣхъ прочихъ.

Если же мы хотимъ произвести уравновѣшеніе полностью, т. е. вычислить поправки для координатъ всѣхъ пунктовъ и азимутовъ всѣхъ становъ, то удобнѣе вести вычисленіе слѣдующимъ образомъ.

1) Найти сначала поправки δX_B и δY_B по даннымъ выше формуламъ и подвигаться при исправленіи отъ точки В къ А и С.

2) Поправка абсциссы въ полигонѣ АВ получится для каждаго послѣдующаго пункта (N°$i+1$) изъ поправки предыдущаго пункта (N°i) вычитаніемъ величины $\frac{k_3}{p}$.

Поправка ординаты въ полигонѣ АВ получится для каждаго послѣдующаго пункта (N°$i+1$) изъ поправки предыдущаго (N°i) вычитаніемъ величины $s\,(ik_1 + i^2k_2)$.

3) Поправка абсциссы въ полигонѣ ВС получится для каждаго послѣдующаго пункта изъ поправки предыдущаго (N°i) вычитаніемъ величины $s\,(ik_1 + i^2k_3)$.

Поправка ординаты въ полигонѣ BC получится изъ поправки предыдущаго пункта прибавленіемъ величины $\frac{k_2}{p}$.

Какъ видно изъ хода уравновѣшенія, для вычисленія поправокъ абсциссъ въ полигонѣ AB и ординатъ въ полигонѣ BC намъ придется вычислять величины пропорціональныя приращенію этихъ координатъ.

Для исправленія азимутовъ становъ, будемъ вести это исправленіе отъ A къ B, прибавляя къ исправленному азимуту предыдущаго стана поправку k_1+ik_2 въ полигонѣ AB и k_1+ik_3 въ полигонѣ BC.

Средняя погрѣшность одного наблюденія съ вѣсомъ $=1$ будетъ равна

$$m = \pm\sqrt{\frac{|p\Delta\Delta|}{3}}.$$

Здѣсь каждое Δ представляетъ изъ себя сумму двухъ поправокъ, одна изъ нихъ $= -\frac{f\alpha}{N}$, а вторая та, которая вычисляется при производствѣ окончательнаго уравновѣшенія

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Суммируя квадраты Δ получимъ:

$$|p\Delta\Delta| = |p\Delta_1\Delta_1| + 2|p_1p_2\Delta_1\Delta_2| + |p\Delta_2\Delta_2|.$$

Всѣ Δ_1 равны между собою и равны $= -\frac{f\alpha}{N}$, и вѣсъ ихъ $=1$

$$|p\Delta_1\Delta_1| = \frac{f^2\alpha}{N^2} \cdot N = f\alpha \cdot \frac{f\alpha}{N}$$

$$2|p_1p_2\Delta_1\Delta_2| = -2\frac{f\alpha}{N}|p\Delta_2| = 0$$

$$|p\Delta_2\Delta_2| = -fy \cdot k_2 - fx \cdot k_3$$

отсюда $|p\Delta\Delta| = f\alpha \cdot \frac{f\alpha}{N} - fy \cdot k_2 - fx\,k_3$.

Если назвать $\frac{-f\alpha}{N} = k_1$, то остается справедливымъ извѣстное равенство:

$$|p\Delta\Delta| = -|WK|$$

Задача уравновѣшенія преслѣдуютъ двоякую цѣль—во-первыхъ правильное распредѣленіе полученной невязки, а во-вторыхъ—рѣшеніе вопроса о вѣсѣ полученныхъ при съемки результатовъ.

Вторая цѣль не достижима ни при какомъ другомъ методѣ уравновѣшенія кромѣ метода строгаго уравновѣшенія по способу наименьшихъ квадратовъ.

Какъ мы уже говорили для полигона какого угодно вида первая цѣль достигается съ такими трудностями, что въ рудничной практикѣ можно ее считать недостижимой. Еще менѣе достижима вторая цѣль, ибо вычисленія съ нею связанныя по сложности своей не уступаютъ самому уравновѣшенію.

Для полигона разсматриваемаго вида достиженіе второй цѣли, какъ и первой значительно упрощается. Вотъ формулы, дающія возможность получить средняя ошибки уравновѣшенныхъ величинъ.

(Для вывода ихъ надо взять сумму $dm^2 \cdot \left(\frac{dR}{dl}\right)^2$ гдѣ $\frac{dR}{dl}$ производная уравновѣшенной величины по непосредственно измѣренной, а dm средняя ошибка самой непосредственно измѣренной величины).

Средняя погрѣшность M_{xB} уравновѣшеннаго значенія абсциссы точки B будетъ равна

$$M_{xB}^2 = d\alpha^2\left(\frac{n}{p} + \frac{n^2}{p^2}\cdot\frac{F}{D}\right)$$

Средняя погрѣшность M_{yB} уравновѣшеннаго значенія ординаты точки B будетъ равна:

$$M_{yB}^2 = d\alpha^2\left(\frac{m}{p} + \frac{m^2}{p^2}\cdot\frac{d}{D}\right).$$

Здѣсь $d\alpha$ — средняя погрѣшность одного наблюденія съ вѣсомъ $=1$, т. е. погрѣшность измѣренія

одного угла теодолитомъ, а остальныя величины n, p, m, d, F и D — уже намъ извѣстны.

Члены $d\alpha^2 \cdot \frac{n}{p}$ и $d\alpha^2 \cdot \frac{m}{p}$ суть квадраты среднихъ погрѣшностей неуравновѣшенныхъ значеній X и Y, члены $\frac{n^2}{p^2} \cdot \frac{F_1}{D} d\alpha^2$ и $\frac{m^2}{p^2} \cdot \frac{d}{D} d\alpha^2$ уменьшеніе квадрата средней ошибки вслѣдствіе уравновѣшенія

Средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія азимута стана прилегающаго къ угловой точкѣ B (въ полигонѣ AB) будетъ равна.

$$M^2_{\alpha B} = nd\alpha^2 \left[1 + \frac{n}{D}\left(A + BL_1 + \frac{dL_1^2}{4}\right)\right]$$

Довольно простой видъ имютъ выраженія, дающія среднюю погрѣшность Mx_i уравновѣшеннаго значенія абсциссы любого пункта въ полигонѣ AB и My_i ординаты въ полигонѣ BC.

$$M^2_{x_i}(AB) = d\alpha^2\left(\frac{n-i}{p} + \frac{(n-i)^2}{p^2}\cdot\frac{F}{D}\right)$$

$$M^2_{y_i}(BC) = d\alpha^2\left(\frac{m-i}{p} + \frac{(m-i)^2}{p^2}\cdot\frac{d}{D}\right).$$

Сложнѣе будутъ формулы для среднихъ погрѣшностей уравновѣшенныхъ значеній ординаты любого пункта въ полигонѣ AB и абциссы въ полигонѣ AC, однако и эти формулы вполнѣ доступны для вычисленія.

Средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія ординаты любого пункта въ полигонѣ AB будетъ равна:

$$M^2_{y_i}(AB) = d\alpha^2\left[\frac{n^3s^2}{3} - \frac{i^3s^2}{3} + \frac{1}{D}\cdot(AR^2 + 2B\cdot sR + dS)\right]$$

Здѣсь A, B, d и D намъ уже извѣстные коэффиціенты, а R и S новые, причемъ:

$$R = \frac{(n-i)^2 s}{2} \qquad S = \frac{n^3s^2}{3} + \frac{i^3s^2}{6} - \frac{iL_1^2}{2}$$

Если положить $i = n$ (для точки A), то $R = s = 0$ и все выраженіе для M_{yi} обращается въ 0, если положить $i = 0$ (для точки B) то $R = \frac{n^2 s}{2}$ и $s = \frac{n^3 s^2}{3}$, а все выраженіе приметъ такой видъ:

$$M^2_{y_{i=0}} = d\alpha^2\left[\frac{n^3s^2}{3} + \frac{1}{D}\left(A\frac{n^2s}{2} + B\frac{n^3s^2}{3}\right)\frac{n^2s}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{D}\left(B\frac{n^2s}{2} + d\frac{s^2n^3}{3}\right)\frac{n^3s^2}{3}\right]$$

По смыслу этого выраженія оно должно равнятся $= M^2_{y_B} = d\alpha^2\left(\frac{m}{p} + \frac{m^2}{p^2}\right)$.

Чтобы убѣдиться аналитически въ справедливости этого равенства, замѣтимъ, что по свойству опредѣлителей:

$$A|ab| + B|bb| + C|bc| = 0$$

$$\text{и } B|ab| + d|bb| + E|bc| = 0$$

слѣдовательно:

$$\frac{An^2s}{2} + \frac{Bn^2s^3}{3} = -\frac{mB}{p}$$

$$\text{и } \frac{Bn^2s}{2} + d\cdot\frac{n^3s^2}{3} = -\frac{m}{p}d$$

такъ какъ $\frac{n^2s}{2} = |ab|$ $\frac{n^3s^3}{3} = |bb| - \frac{m}{p}$, а $|bc| = 0$.

Замѣтивъ еще, что

$$B|ab| + d|bb| + E|bc| = -D$$

и что, слѣдовательно $B\frac{n^2s}{2} + d\frac{n^3s^2}{3} = -D\left(1 + \frac{m}{pD}\right)$. легко убѣдиться въ справедливости вышеприведеннаго равенства. Выраженіе для средней погрѣшности Mx_i урановѣшеннаго значенія абсциссы любой точки полигона B C имѣетъ послѣ того, какъ сум-

мировать квадраты производныхъ непосредственно измѣренныхъ величинъ, весьма сложный видъ, а именно:

$$M^2_{xi} : d\alpha^2 = ni^2 s^2 + \frac{2i^3 s^2}{3} + \frac{m^3 s^2}{3} + \\ + \frac{R}{D}\left(AR + BS + CT\right) + \frac{S}{D}\left(BR + dS + ET\right) + \\ + \frac{T}{D}\left(CR + ES + FT\right)$$

Здѣсь A, B, C, d, E, F и D намъ извѣстные коэффиціенты и R, S и T новые, имѣющіе такія значенія:

$$R = \frac{m^2 s}{2} + isn + \frac{i^2 s}{2} \qquad S = is\frac{n^2 s}{2} \qquad T = \frac{m^3 s^2}{3} + \frac{i^3 s^2}{6}$$

Полученное выраженіе можно преобразовать; замѣтимъ, что три послѣдніе члена можно представить въ видѣ опредѣлителя:

$$\frac{R}{D}\left(AB + BS + CT\right) + \frac{S}{T}\left(BR + dS + ET\right) + \frac{T}{D} \cdot$$

$$\left(CR + ES + FT\right)\frac{1}{D} = \begin{vmatrix} R & S & T & O \\ |aa| & |ab| & |ac| & R \\ |ab| & |bb| & |bc| & S \\ |ac| & |bc| & |cc| & T \end{vmatrix}$$

Здѣсь $|aa|$, $|ab|$, $|ac|$, $|bb|$, $|bc|$ и $|cc|$ извѣстные намъ коэффиціенты. Умноживъ вторую строку на is и отнявъ ее отъ первой и умноживъ затѣмъ первый столбецъ на is и отнявъ его отъ послѣдняго, отнявъ послѣ этого послѣднюю строку отъ первой и наконецъ 3-й столбецъ отъ послѣдняго, получимъ новый опредѣлитель, тожественный данному

$$\frac{1}{D}\begin{vmatrix} R_1 & O & T_1 & R_2 \\ |aa| & |ab| & |ac| & R_1 \\ |ab| & |bb| & |bc| & O \\ |ac| & |bc| & |cc| & T \end{vmatrix} = \frac{R_1}{D}(AR_1 + CT_1) + \frac{T_1}{D}(CR + \\ + FT_1) + R_2.$$

Здѣсь коэффиціенты A, C, F и D прежніе, а R_1: T_1 и R_2 новые и равные

$$R_1 = is\left(m - \frac{i}{2}\right) \quad T_1 = -\frac{i^3 s^2}{6} + \frac{iL_2^2}{2} + \frac{n}{d}$$

$$R_2 = i^2 m s^2 - im^2 s^2 - i^3 s^2 s - s^2 i^2 n$$

Подставимъ все это въ ранѣе найденное выраженіе для $M^2 xi$ и получимъ:

$$M^2_{xi} : d\alpha^2 = \frac{n}{p} - \frac{2}{3} i^3 s^2 + i^2 m s^2 + \frac{1}{D}(AR_1^2 + \\ + 2CR_1 T_1 + FT_1^2).$$

Среднюю погрѣшность азимута любого стана въ полигонѣ AB найдемъ по формулѣ:

$$M^2_{A_i} = d\alpha^2\left(r^2 + \frac{Ar^2 + 2Brt + dt^2}{D}\right)$$

r и t имѣютъ значенія, равныя:

$$r = n - i \qquad t = \frac{n^2 - i^2}{2} s.$$

Для средней погрѣшности азимута любого стана въ полигонѣ BC получимъ:

$$M^2_{Ai} : d\alpha^2 = n + i + \frac{1}{D}$$

R	S	T	O
$\|aa\|$	$\|ab\|$	$\|ac\|$	R
$\|ab\|$	$\|bb\|$	$\|bc\|$	S
$\|ac\|$	$\|bc\|$	$\|cc\|$	T

Здѣсь:

$$R = n + i \qquad S = \frac{n^2 s}{2} \qquad T = \frac{i^2 s}{2}.$$

Вычтя изъ послѣдняго столбца первый и вычтя затѣмъ изъ первой строки вторую и разложивъ опредѣлитель по элементамъ первой строки, получимъ:

$$M^2_{A_i} : d\alpha^2 = r + \frac{Ar^2 + 2Crt + Ft^2}{D}$$

гдѣ $r = m - i$ $t = \frac{m^2 - i^2}{2} s.$

Мы предположили въ полигонѣ АВ n становъ и въ полигонѣ ВС m становъ примѣрно одинаковой длины.

Представимъ теперь себѣ, что средняя длина становъ въ полигонѣ АВ замѣтно отличается отъ средней длины стана въ полигонѣ ВС, но что въ самыхъ полигонахъ по отдѣльности станы остаются примѣрно равными между собою.

Сдѣлавъ такое предположеніе, мы уже не можемъ строго говоря считать вѣса измѣренія полигоннаго угла въ участкахъ АВ и ВС одинаковыми, точно такъ же какъ и вѣса измѣренія становъ.

Примемъ вѣсъ угла полигона АВ за 1, назовемъ вѣсъ измѣренія угла полигона ВС—p_1; вѣсъ измѣренія длины стана въ полигонѣ АВ по прежнему p, а въ полигонѣ ВС—p_2.

Назовемъ еще среднюю длину стана въ полигонѣ АВ—s_1, а въ полигонѣ ВС—s_2, оставимъ остальныя обозначенія тѣми же, что и прежде.

Невязку въ углахъ f^α распредѣлимъ сообразно вѣсу измѣреній.

Поправка на одинъ уголъ въ полигонѣ АВ будетъ:

$$\delta\alpha_{AB} = -\frac{f\alpha}{n + m : p_1 + 1 : \sqrt{p_1}}$$

Вѣсъ угла при точкѣ В мы приняли средній пропорціональный между вѣсами becъ угловъ полигона АВ и ВС, для простоты можемъ его считать $= 1$.

Обозначимъ $N = n + m : p_1 + 1 : \sqrt{p_1} = \infty n + m : p_1 + 1$.

Поправка на одинъ уголъ въ полигонѣ ВС будетъ:

$$\delta\alpha_{Bc} = -\frac{f\alpha}{p_1 N}$$

Составимъ для даннаго случая условныя уравненія, преобразовавъ, какъ и прежде.

$$(1).\ \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 \ldots + \delta\alpha_n + \delta\alpha_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{p_1}} d\alpha_{n+2} + \frac{1}{\sqrt{p_1}} d\alpha_{n+3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$(2).\ ns_1\delta\alpha_1 + (n-1)s_1\delta\alpha_2 + \ldots + s\delta\alpha_n + \frac{1}{\sqrt{p_2}}(ds_m + ds_{m+1} + \ldots) = -fy$$

$$(3).\ \ldots + \frac{1}{\sqrt{p}}(ds_1 + ds_2 + \ldots) + \frac{s}{\sqrt{p_1}} d\alpha_{n+2} + \frac{2s}{\sqrt{p_1}} d\alpha_{n+3} + \ldots = -fx$$

Коэффиціенты въ уравненіяхъ коррелятъ будутъ:

$$|aa| = n + m : p_1 + 1 = N \qquad |ab| = \frac{n^2 s_1}{2} = \frac{nL_1}{2} \qquad |ac| = \frac{mL_2}{2\sqrt{p_1}}$$

$$|bc| = 0 \qquad |bb| = \frac{m}{p_2} + \frac{n^3 s_1^2}{3} = \frac{m}{p_2} + \frac{nL_1^2}{3} \qquad |cc| = \frac{n}{d_2} + \frac{mL_2^2}{2p_1}$$

Такъ какъ коэффиціенты A, B, C, d, E, F и D необходимые въ послѣдующемъ ходѣ уравновѣшенія образуются изъ вышенаписанныхъ, то мы получимъ новое значеніе коэффиціентовъ A . . . D, произведя въ написанныхъ на стр. 260 выраженіяхъ слѣдующія измѣненія

1) N замѣняется его новымъ значеніемъ

2) L_2 вездѣ замѣняется черезъ $\frac{L_2}{\sqrt{p_1}}$

3) $\frac{m}{p}$ замѣняется черезъ $\frac{m}{p_1}$

Въ остальномъ новые коэффиціенты A . . . D будутъ совершенно тоинственны со старыми.

Выраженіе для δX_B отъ прежняго не отличается:

$$\delta X_B = \frac{nk_3}{p}\ ^*)$$

Для δy_B имѣемъ:

$$\delta y_B = -fy - \frac{m}{p_2} k_2$$

замѣнивъ $\frac{m}{p}$ черезъ $\frac{m}{p_2}$.

$\delta\alpha_i$ для полигона А В не измѣняется $= k_1 + (n-i)s_1 k_2$

*) Формулы для опредѣленія коррелятъ само собою разумѣется сохраняютъ свою прежнюю форму при новыхъ значеніяхъ коэффиціентовъ.

для полигона В С имѣемъ $\delta\alpha_i = \frac{k_1 + (m-i)\,s_c k_3}{p_1}$

δ_{BA} остается прежнимъ $= nk_1 + \frac{nL_1}{2} k_2$

$$-\delta_{BC} = \frac{mk_1}{p_1} + \frac{m^2 s L_2}{2p_1} k_2$$

Поправка для азимута любого стана въ полигонѣ АВ сохраняетъ вполнѣ прежнюю форму:

$$\delta A_i = \delta B_A - ik_1 - \frac{i^2 s}{2} k_3$$

Въ поправку δA_i для полигона ВС войдетъ вѣсъ p_1

$$\delta A_i = \delta B_c + \frac{ik_1}{p_1} + \frac{i^2 s}{2p_1} k_3$$

Выраженіе для поправки δX_i въ полигонѣ АВ свой видъ не измѣнитъ:

$$\delta X_i = \frac{n-i}{p} k_3$$

а для δY_i въ полигонѣ ВС войдетъ вѣсъ p_2

$$\delta Y_i = -fy - \frac{m-i}{p_2} k_2$$

Выраженіе для поправки δY_i въ полигонѣ АВ останется безъ измѣненія, а поправка δY_i въ полигонѣ ВС измѣнится въ томъ смыслѣ, что k_1 и k_3 замѣнятся $\frac{k_1}{p_1}$ и $\frac{k_3}{p_1}$.

Суммируя все, что можно сказать объ измѣненіи формы выраженій для случая неравныхъ среднихъ длинъ становъ въ полигонахъ АВ и ВС сравнительно со случаемъ ихъ равенства, можно придти къ слѣдующему:

1) Не измѣняются выраженія:

a) Всѣ выраженія для полигона АВ (кромѣ п. В).

b) δX_B; Mx_B.

2) Измѣняются появленіемъ p_2 вмѣсто p выраженія:

δY_B; MY_B; $\delta Y_{i(BC)}$; $M\alpha_{i(BC)}$;

3) Измѣняются появленіемъ $\frac{k_1}{p_1}$ и $\frac{k_3}{p_1}$ выраженія:

δA_i для полиг. ВС, $\delta X_{i(BC)}$.

4) Особеннымъ образомъ измѣняется выраженіе:

Mx_i для полигона ВС.

Общее выраженіе для средней погрѣшности функціи уравновѣшенныхъ величинъ.

Разсмотримъ этотъ вопросъ вообще.

Пусть намъ даны три условныя уравненія:

$$a_1\delta_1 + a_2\delta_2 + a_3\delta_3 + a_4\delta_4 + \ldots\ldots\ldots + w_1 = 0$$
$$b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3 + b_4\delta_4 + \ldots\ldots\ldots + w_2 = 0$$
$$c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + c_3\delta_3 + c_4\delta_4 + \ldots\ldots\ldots + w_3 = 0.$$

Здѣсь $\frac{\delta}{\sqrt{p}}$ есть поправка непосредственной измѣренной величины, назовемъ $\delta l = \frac{\delta}{\sqrt{p}}$

Какъ извѣстно, корреляты k_1 k_2 и k_3 находятся изъ слѣдующихъ выраженій:

$$k = \frac{1}{D}(Aw_1 + Bw_2 + Cw_3)$$
$$k = \frac{1}{D}(Bw_1 + dw_2 + Ew_3)$$
$$k = \frac{1}{D}(Cw_1 + Ew_2 + Fw_3)$$

A, B, C, d, E, F и D суть миноры нѣкотораго извѣстнаго опредѣлителя.

Пусть дана нѣкоторая функція U непосредственно измѣренныхъ величинъ l_1, l_2, l_3 . . . Вставляя въ эту функцію вмѣсто l_1, l_2, l_3 . . . ихъ уравновѣшенныя значенія L_1, L_2, L_3 найдемъ уравновѣшенное значеніе функціи U, среднюю погрѣшность которой и попробуемъ найти, назвавъ ее Mu.

Имѣемъ:

$$M^2u = \sum\left(\frac{dU}{dl}\right)^2 dl^2 = d\alpha^2 \sum\left(\frac{dU}{dl}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2$$ гдѣ $d\alpha$ —

средняя погрѣшность съ вѣсомъ $= 1$.

Составимъ производныя $\frac{dd}{Ul}$

$$\frac{dU}{dl_1} = \frac{dU}{dL_1}\frac{dL_1}{dl_1} + \frac{dU}{dL_2}\cdot\frac{dL_2}{dl_1} + \frac{dU}{dL_3}\cdot\frac{dL_3}{dl_1} + \frac{dU}{dL_4}\cdot\frac{dU}{dl_1} +$$

$$\frac{dU}{dl_2} = \frac{dU}{dL_1}\cdot\frac{dL_1}{dl_2} + \frac{dU}{dL_2}\cdot\frac{dL_2}{dl_2} + \frac{dU}{dL_3}\cdot\frac{dL_3}{dl_2} + \frac{dU}{dL_4}\cdot\frac{dL_4}{dl_2} —$$

$$\frac{dU}{dl_3} = \frac{dU}{dL_1}\cdot\frac{dL_1}{dl_3} + \frac{dU}{dL_2}\cdot\frac{dL_2}{dl_3} + \frac{dU}{dL_3}\cdot\frac{dL_3}{dl_3} + \frac{dU}{dL_4}\cdot\frac{dL_4}{dl_3} + \cdot$$

Уравновѣшенныя значенія L_1, L_2 L_3, и т. д. выражается такимъ образомъ:

$$L_1 = l_1 + \delta l_1 = l_1 + \frac{a_1}{\sqrt{p_1}}k_1 + \frac{b}{\sqrt{p_1}}k_2 + \frac{c_1k_3}{\sqrt{p_1}}$$

$$L_2 = l_1 + \delta l_2 = l_1 + \frac{a}{\sqrt{p_2}}k_1 + \frac{b_2}{\sqrt{p_2}}k_2 + \frac{c_2}{\sqrt{p^2}}k,$$

. . . . . .

Взявъ производныя отъ L по непосредственно измѣреннымъ величинамъ, и замѣтивъ, что:

$$\frac{dk_1}{dl_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{D}(Aa_i + Bb_i + Cc_i)$$

$$\frac{dk_2}{dl_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{D}(Ba_i + db_i + Ec_i)$$

$$\frac{dk_3}{dl_i} = \frac{\sqrt{p_i}}{D}(Ca_i + Eb_i + Fc_i)$$

получимъ:

$$\frac{dL_1}{dl_1} = 1 + \frac{a_1}{D}(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1) + \frac{b_1}{D}(Ba_1 + db_1 +$$

$$+ Ec_1) + \frac{c_1}{D}(Ca_1 + Eb_1 + Fc_1)$$

$$\frac{dL_2}{dl_1} = \frac{a_2}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\cdot(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1) +$$

$$+ \frac{b_2}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}(Ba_1 + db_1 + Ec_1) +$$

$$+ \frac{c_2}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}(Ca_1 + Eb_1 + Fc_1)$$

$$\frac{dL_3}{dl_1} = \frac{a_3}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_3}}(Aa_1 + Bb_1 + Cc_1) + \frac{b_3}{D}\cdot\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_3}}(Ba_1 +$$

$$+ db_1 + Ec_1) + \frac{c_3}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_3}}(Ca_1 + Eb_1 + Fc_1)$$

. . . . . .

$$\frac{dL_1}{dl_2} = \frac{a_1}{D}\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}(Aa_2 + Bb_2 + Cc_2) + \frac{b_1}{D}\cdot\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}(Ba_2 +$$

$$+ db_2 + Ec_2) + \frac{c_1}{D}\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}(Ca_2 + Eb_2 + Fc_2)$$

$$\frac{dL_2}{dl_2} = 1 + \frac{a_2}{D}\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}(Aa_2 + Ba_2 + Cc_2) + \frac{b_2}{D}\cdot\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_2}}\cdot$$

$$\cdot(Ba_2 + db_2 + EC_2) + \frac{c_2}{D}\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_2}}(Ca_2 + Eb_2 + Fc_2)$$

. . . . . .

и т. д.

Введемъ такія обозначенія $= \frac{dU}{dl} = \frac{dU}{dL_1} = u_1$

$$\frac{dU}{dL_2} = u_2 \qquad \frac{dU}{dL_3} = u_3$$

Величины, квадраты которыхъ намъ надо суммировать, можно теперь переписать такимъ образомъ:

$$\frac{dU}{dl_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_i}} = \frac{1}{\sqrt{p_i}}\left(u_1\frac{dL_1}{dl_i} + u_2\frac{dL_2}{dl_i} + u_3\frac{dL_3}{dl_i}\cdot\ \cdot\ \cdot\right)$$

Подставимъ теперь въ каждое такое выраженіе найденныя нами значенія $\frac{dL}{dl}$ и взявъ въ каждомъ такомъ отдѣльномъ выраженіи за скобки $(Aa_i + Bb_i + Cc_i)$, потомъ $(Ba_i + db_i + Ec_i)$, потомъ $(Ca_i + db_i + Ec_i)$, мы представимъ каждое такое $\frac{dU}{dl}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_i}}\cdot$ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{dU}{dli}\cdot\frac{1}{\sqrt{pi}}=\frac{u_i}{\sqrt{pi}}+\frac{R}{D}(Aa_i+Bb_i+Cc_i)+$$

$$+\frac{S}{D}(Ba_i+db_i+Ec_i)+T(Ca_i+Eb_i+Fc_i)$$

причемъ R, S, T для всевозможныхъ $\frac{dU}{dli}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_1}}$ одинаковы, почему мы ихъ и пишемъ безъ значковъ.

Значенія этихъ коэфиціентовъ таковы:

$$R=\frac{a_1}{\sqrt{p_1}}u_1+\frac{a_2}{\sqrt{p_2}}u_2+\frac{a_3}{\sqrt{p_3}}u_3+\frac{a_4}{\sqrt{p_4}}u_4+\ldots$$

$$S=\frac{b_1}{\sqrt{p_1}}u_1+\frac{b_2}{\sqrt{p_2}}u_2+\frac{b_3}{\sqrt{p_3}}u_3+\frac{b_4}{\sqrt{p_4}}u_4+\ldots$$

$$T=\frac{c_1}{\sqrt{p_1}}u_1+\frac{c_2}{\sqrt{p_2}}u_2+\frac{c_3}{\sqrt{p_3}}u_3+\frac{c_4}{\sqrt{p_4}}u_4+\ldots$$

Благодаря этому можно писать:

$$\frac{dU}{dl_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_1}}=\frac{u_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{R}{D}(Aa_1+Bb_1+Cc_1)+$$

$$+\frac{S}{D}(Ba_1+db_1+Ec_1)+\frac{T}{D}(Ca_1+Eb_1+Fc_1)=$$

$$=\frac{u_1}{\sqrt{p_1}}+\frac{v_1}{D}$$

$$\frac{du}{dl_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_2}}=\frac{u_2}{\sqrt{p_2}}+\frac{R}{D}(Aa_2+Bb_2+Cc_2)+$$

$$+\frac{S}{D}(Ba_2+db_2+Ec_2)+\frac{T}{D}(Ca_2+Eb_2+Fc_2)=$$

$$=\frac{u_2}{\sqrt{p_2}}+\frac{v_2}{D}\text{ и т. д.}$$

Обозначенія v_1, v_2 . . . введены для сокращенія.

Суммируемъ теперь квадраты $\frac{dU}{dl}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}$, получимъ:

$$\sum\left(\frac{dU}{dl}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2=\sum\frac{u^2}{p}+\frac{2}{D}\sum\frac{u}{\sqrt{p}}\cdot v+\sum\frac{v^2}{D^2}$$

Разсмотримъ сначала Σv^2, для чего напишемъ одно v^2 въ развернутомъ видѣ. Сдѣлавъ нѣкоторые преобразованія, получимъ:

$$v^2=$$

$$(RA+SB+TC)\,[R(A\,.\,aa+Bab+Cac)+$$

$$+S(Baa+dba+Eac)+T(Caa+Eba+Fca)]$$

$$+(RB+Sd+TE)\,[R(Aab+Bbb+Cbc)+$$

$$+S(Bab+dbb+Ebc)+T(Cab+Ebb+Fbc)]$$

$$+(RC+SE+TF)\,[R(Aac+Bbc+Ccc)+$$

$$+S(Bac+dbc+Ecc)+T(Cac+Ebc+Fcc)]$$

Теперь видно, что для того, чтобы получить Σv^2, надо въ написанномъ выше выраженіи для v^2 замѣнить коэффиціенты aa, ab, ac, bb, bc, cc черезъ $|aa|$, $|ab|$, $|ac|$, $|bb|$, $|bc|$, $|cc|$.

Тогда, пользуясь свойствами опредѣлителей легко видѣть, что выраженія стоящія въ [ ] равны послѣдовательно:

$$=-R\,.\,D\,;-S\,.\,D\text{ и }-T\,.\,D$$

а вся сумма $\sum\frac{v^2}{D^2}$ преобразуется въ такой видъ:

$$\sum\frac{v^2}{D^2}=-\frac{1}{D}[(RA+SB+TC).R+S(RB+Sd+TE)+$$

$$+T(RC+SE+TF)]=$$

$$=-\frac{1}{D}\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline R & S & T & 0\\ \hline |aa| & |ab| & |ac| & R\\ \hline |ab| & |bb| & |bc| & S\\ \hline |ac| & |bc| & |cc| & T\\ \hline\end{array}=-\frac{0}{D}$$

Обратимся теперь ко второму члену, т. е. къ суммѣ $2\sum\frac{u}{\sqrt{p}}v$

Напишемъ ее въ развернутомъ видѣ:

$$\frac{u_1}{\sqrt{p_1}}\,v_1 = \frac{u_1}{\sqrt{p_1}}\,\mathrm{R}\,(\mathrm{A}a_1+\mathrm{B}b_1+\mathrm{C}c_1)+$$

$$+\mathrm{S}.\frac{u_1}{\sqrt{p_1}}\,(\mathrm{B}a_1+db_1+\mathrm{E}c_1)+\frac{\mathrm{T}u_1}{\sqrt{p_1}}\,(\mathrm{C}a_1+\mathrm{E}b_1+\mathrm{F}c_1)$$

$$\frac{u_2}{\sqrt{p_2}}\,v_2 = \frac{u_2}{\sqrt{p_2}}\,\mathrm{R}\,(\mathrm{A}a_2+\mathrm{B}b_2+\mathrm{C}c_2)+$$

$$+\frac{u_2}{\sqrt{p_2}}\,\mathrm{S}\,(\mathrm{B}a_2+db_2+\mathrm{E}c_2)+\frac{u_2}{\sqrt{p_2}}\,\mathrm{T}\,(\mathrm{C}a_2+\mathrm{E}b_2+\mathrm{F}c_2)$$

$$\frac{u_3}{\sqrt{p_3}}\,v_3 = \frac{u_3}{\sqrt{p_3}}\,\mathrm{R}\,(\mathrm{A}a_3+\mathrm{B}b_3+\mathrm{C}c_3)+$$

$$+\frac{u_3}{\sqrt{p_3}}\,\mathrm{T}\,(\mathrm{B}a_3+db_3+\mathrm{E}c_3)+\frac{u_3}{\sqrt{p_3}}\,\mathrm{T}\,(\mathrm{C}a_3+\mathrm{E}b_3+\mathrm{F}c_3)$$

Не трудно видѣть, что если вынести за скобки RA, затѣмъ SB, затѣмъ TC, то за скобками получится не что иное, какъ R; если же вынести RB+Sd+TE, то получимъ S и если вынести RC+SE+TF, то получится за скобками T.

Слѣдовательно:

$$\sum\frac{u}{\sqrt{p}}\,v = \mathrm{R}\,(\mathrm{RA}+\mathrm{SB}+\mathrm{TC})+\mathrm{S}\,(\mathrm{RB}+\mathrm{S}d+\mathrm{TE})+$$

$$+\mathrm{T}\,(\mathrm{RC}+\mathrm{SE}+\mathrm{TF}) = \mathrm{Q}$$

Отсюда искомое выраженіе для средней погрѣшности уравновѣшеннаго значенія любой функціи получается равнымъ:

$$\mathrm{M}_u^2 = d\alpha^2\left[\sum\frac{u^2}{p}+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}}\right]$$

Здѣсь $d\alpha^2\,.\,\sum\frac{u^2}{p}$ есть квадратъ средней погрѣшности неуравновѣшеннаго значенія U', а $d\alpha^2\,\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{D}}$ уменьшеніе квадрата средней погрѣшности за счетъ уравновѣшенія.

Приложеніе общей формулы.

Для разысканія средней погрѣшности уравновѣшенныхъ величинъ приложимъ общую формулу:

$$\mathrm{M}^2u\,:\,d\alpha^2 = \sum\frac{u^2}{p}+\frac{1}{\mathrm{D}}$$

R	S	T	O
| aa |	| ab |	| ac |	R
| ab |	| bb |	| bc |	S
| ac |	| bc |	| cc |	T

R, S и T напишемъ въ развернутомъ видѣ

$$\mathrm{R} = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}}\,.\,u_1+\frac{a_2}{\sqrt{p_2}}\,u_2+\frac{a_3}{\sqrt{p_3}}\,u_3+\ldots$$

$$\mathrm{S} = \frac{b_1}{\sqrt{p_1}}\,u_1+\frac{b_2}{\sqrt{p_2}}\,u_2+\frac{b_3}{\sqrt{p_3}}\,u_3+\ldots$$

$$\mathrm{T} = \frac{c_1}{\sqrt{p_1}}\,u_1+\frac{c_2}{\sqrt{p_2}}\,u_3+\frac{c_3}{\sqrt{p_3}}\,u_2+\ldots$$

Погрѣшность $\mathrm{M}x_B$.

Погрѣшность $\mathrm{M}x_\mathrm{B}$ есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія абсциссы угловой точки B.

$$\mathrm{R} = \mathrm{S} = 0, \qquad \mathrm{T} = \frac{n}{\mathrm{p}} \qquad \sum\frac{n^2}{\mathrm{p}} = \frac{n}{\mathrm{p}}$$

$$\mathrm{M}^2x_\mathrm{B}\,:\,d\alpha^2 = \frac{n}{p}+\frac{1}{\mathrm{D}}$$

O	O	T	O
| aa |	| ab |	| ac |	0
| ab |	| bb |	O	0
| ac |	O	| cc |	T

$$=$$

$$=\frac{n}{p}+\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} |aa| & |ab| & 0 \\ |ab| & |bb| & 0 \\ |ac| & 0 & \mathrm{T}\end{vmatrix} = \frac{n}{p}+\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{D}}\begin{vmatrix} |aa| & -ab| \\ |ab| & -bb|\end{vmatrix} =$$

$$=\frac{n}{p}+\frac{n^2}{p^2}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{D}}.$$

Погрѣшность $\mathrm{M}y_\mathrm{B}$.

Погрѣшность $\mathrm{M}y_\mathrm{B}$ есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія ординаты угловой точки B

$$\mathrm{R} = \frac{n^2s_1}{2} = |\,ab\,| \qquad \mathrm{S} = \frac{n^3{s_1}^2}{3} \qquad \mathrm{T} = 0$$

$$\sum\frac{u^2}{p} = \frac{n^3{s_1}^2}{3} \qquad s = |\,bb\,| - \frac{m}{p^2}$$

$$M^2 y_B = d\alpha \left\{ \frac{nL_1^2}{3} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} |\,ab\,| & |\,bb\,| - \frac{m}{p_2} & 0 & 0 \\ |\,aa\,| & |\,ab\,| & |\,ac\,| & |\,ab\,| \\ |\,ab\,| & |\,bb\,| & 0 & |\,bb\,| - \frac{m}{p_2} \\ |\,ac\,| & 0 & |\,cc\,| & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

Вычтя въ опредѣлителѣ изъ первой строки третью, а затѣмъ изъ послѣдняго столбца второй, получимъ:

$$M^2_{y_B} : d\alpha^2 = \frac{n^3 s_2^2}{3} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & -\frac{m}{p_2} & 0 & \frac{m}{p^2} - \frac{nL_1^2}{3} \\ |\,aa\,| & |\,ab\,| & |\,ac\,| & 0 \\ |\,ab\,| & |\,bb\,| & 0 & -\frac{m}{p^2} \\ |\,ac\,| & 0 & |\,cc\,| & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{n^3 s_1^2}{3} + \left(\frac{m}{p_2} - \frac{nL_1^2}{3}\right) + \frac{m}{p_2}\left\{B \,.\, O + \frac{m}{p_2} \,.\, d + E \,.\, O\right\}$$

Окончательно:

$$M^2_{y_B} = d\alpha^2 \left(\frac{m}{p_2} + \frac{m^2}{p_2^2} \cdot \frac{d}{D}\right).$$

Погрѣшность $M\alpha_B$

Погрѣшность $M\alpha_B$ есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія азимута стана прилегающаго къ угловой точкѣ B (въ полигонѣ AB)

$$\sum \frac{n^2}{p} = n = R = n \qquad S = \frac{n^2 s_1}{2} = |\,ab\,| \qquad T = 0$$

$$M^2_{\alpha_B} : d\alpha^2 = n + \begin{vmatrix} R & S & 0 & 0 \\ |\,aa & |\,ab\,| & |\,ac\,| & R \\ |\,ab\,| & |\,bb\,| & |\,bc\,| & S \\ |\,ac\,| & |\,bc\,| & |\,cc\,| & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R + \frac{1}{D}(AR^2 + 2BRS + dS^2) = n\left[1 + \frac{n}{D}(A + B L_1 + d\frac{L_1^2}{4})\right]$$

Погрѣшность $M\alpha_i$

Погрѣшность $M\alpha_i$ есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія азимута какого угодно стана.

Для полигона AB:

Остается очевидно справедливымъ выраженіе:

$$M^2\alpha_i : d\alpha^2 = R + \frac{1}{D}(AR^2 + 2BRS + dS^2).$$

при новыхъ значеніяхъ R и S

$$R = n - i \qquad S = \frac{n^2 - i^2}{2} s.$$

Для полигона BC.

Обратимся къ общей формулѣ

$$\sum \frac{u^2}{p} = n + \frac{i}{p_2} = R = n + \frac{i}{p_2}$$

$$S = \frac{n^2 s_1^2}{2} \qquad T = \frac{i^2 s_2}{2p_1}$$

$$M^2_{\alpha_i} : d\alpha^2 = n + \frac{i}{p} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} n + \frac{i}{p_2} & |\,ab\,| & \frac{i^2 s_2}{2p_1} & 0 \\ |\,aa\,| & |\,ab\,| & |\,ac\,| & n + \frac{i}{p_1} \\ |\,ab\,| & |\,bb\,| & 0 & |\,ab\,| \\ |\,ac\,| & 0 & |\,cc\,| & \frac{i_2 s_2}{2p_1} \end{vmatrix} =$$

$$= n + \frac{i}{p_5} + \frac{1}{D}$$

$\frac{i-m}{p_1}$	0	$\frac{i^2-{}^2ms_2}{2p_1}$	$-n-\frac{i}{m}\frac{1}{p_1}+\frac{m}{p_1}$
$\mid aa \mid$	$\mid ab \mid$	$\mid ac \mid$	$\frac{i-m}{p_5}$
$\mid ab \mid$	$\mid bb \mid$	0	0
$\mid ac \mid$	0	$\mid cc \mid$	$\frac{i^2-m^2}{2p_1}s_2$

Разложивъ опредѣлитель, получимъ:

$$M^2\alpha_i : d\alpha^2 = R + \frac{AR^2 + 2CBT + FT^2}{D}.$$

Значенія R и T:

$$R = \frac{m-i}{p_1} \qquad T = \frac{m^2-i^2}{2p_1}s_2.$$

Погрѣшность M_{x_i}.

Погрѣшность M_{xi} есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія абсциссы любой точки.

Для полигона AB.

Аналогично выводамъ для Mx_B можно прямо написать:

$$M^2_{x_i} = d\alpha^2\left(\frac{n-i}{p} + \frac{n-i)^2}{p}\frac{F}{D}\right).$$

Для полигона BC.

Для полигона BC надо прибѣгнуть къ общей формулѣ.

Производныя u_1 u_2 и т. д. по s для первыхъ n становъ $= 1$, для остальныхъ $= 0$.

Производныя u_1, u_2 и т. д. по α для первыхъ n становъ равны между собою $u = -is_2$, послѣ сего идутъ послѣдовательно численно уменьшаясь на 1, т. е. $-(i-1)s_2$; $-(i-2)s_2$; . . до . -1 . s_2.

Отсюда $\sum \frac{u^2}{p} = \frac{n}{p} + ni^2s_2^2 + \frac{i^3s^2}{3p_1}$

$$R = \frac{a_1}{\sqrt{p_1}}u_1 + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} . u_2 + \frac{a_3}{\sqrt{p_3}}u_3 \ldots\ldots = $$
$$= -nis_2 - \frac{i^2s_2}{2p_1}$$

$$S = \frac{b_1}{\sqrt{p_1}}u_1 + \frac{b_2}{\sqrt{p_2}}u_2 + \frac{b_3}{\sqrt{p_3}}u_3 \ldots\ldots = $$
$$= -is_2\frac{n^2s_1}{2} = -is_2 \mid ab \mid$$

$$T = \frac{c_1}{\sqrt{p_1}}u_1 + \frac{c_2}{\sqrt{p_2}}u_2 + \frac{c_3}{\sqrt{p_3}}u_3 \ldots\ldots = $$
$$= \frac{n}{p} - \frac{i^3s_2^2}{6p_2}.$$

Выраженіе M_{xi} не измѣнится, если мы у R, S и T одновременно перемѣнимъ знаки.

$$M^2_x : d\alpha^2 = \frac{n}{p} + ni^2s_2{}^3 + \frac{i^3s_2^2}{3p} +$$

$$+\frac{1}{D}$$

$nis_2 + \frac{i^2s_2}{2p_1}$	$is_2 \mid ab \mid$	$\frac{i^3s_2^2}{6p_1}\frac{n}{p}$	0
$\mid aa \mid$	$\mid ab \mid$	$\mid ac \mid$	$nis_2 + \frac{i^2s_2}{2p_1}$
$\mid ab \mid$	$\mid bb \mid$	0	$is_2 \mid ab \mid$
$\mid ac \mid$	0	$\mid cc \mid$	$\frac{i^3s_2^2}{6p_2} - \frac{n}{p}$

Умноживъ вторую строчку на is_2 и вычитая ее изъ первой, умноживъ затѣмъ первый столбецъ на i_2 и вычтя изъ послѣдняго, получимъ:

$$M^2_{x_i} : d\alpha^2 = \sum \frac{u^2}{p} +$$

$$+ \frac{1}{D}$$

R_1	0	T_1	R_2
$\lvert aa \rvert$	$\lvert ab \rvert$	$\lvert ac \rvert$	R_1
$\lvert ab \rvert$	$\lvert bb \rvert$	0	0
$\lvert ac \rvert$	0	$\lvert ce \rvert$	T_1

$$= \sum \frac{u^2}{p} + R_2 + \frac{1}{D}\left(AR_1^2 + 2CR_1T_1 + F_1T_1^2\right)$$

$$R_1 = is_2\frac{2m-i}{2p} \qquad T_1 = \frac{n}{p} + \frac{i}{2p_1}\left(L_2^2 - \frac{i^2s_2^2}{3}\right)$$

$$R_2 = \frac{ms^2i^2}{p_1} - \frac{i^3s^2}{p_1} - ns^2i^2.$$

Сдѣлавъ приведеніе въ выраженіи $\sum \frac{u^2}{p} + R_2$, получимъ окончательно:

$$M^2_{x_i} : d\alpha^2 = \frac{n}{p} + \frac{ms_2^2i^2}{p_1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{i^3s^2}{p_1} + \frac{1}{D}\Big(AR_1^2 + 2CR_1T_1 + FT_1^2\Big).$$

Погрѣшность M_{y_i}.

Погрѣшность M_{y_i} есть средняя погрѣшность уравновѣшеннаго значенія ординаты любой точки.

Для полигона АВ.

$$R = \frac{(n-i)^2}{2} \qquad S = \frac{n^3s^2}{3} + \frac{i^3s_1^2}{6} - \frac{iL_1^2}{2} \qquad T = 0$$

$$\sum \frac{n^2}{p} = \frac{n^3s_1^2}{3} - \frac{i^3s_1^2}{3}$$

$$M_{y_i} = d\alpha^2\left[\frac{n\cdot L_1^2}{3} - \frac{i^3s_1^2}{3} + \frac{1}{D}(AR^2 + 2BSR + ds^2)\right].$$

Для полигона ВС.

Точно такъ же, какъ на стр. 274, получимъ:

$$M_{y_i} = d\alpha^2\left(\frac{m-i}{p_2} + \frac{(m-i)^2}{p_2}\,\frac{1}{D}\right).$$