21. О теоремѣ замкнутости въ теоріи тригонометрическихъ рядовъ.

Н. М. Крылова.

(Доложено 8 мая 1913 г.).

Въ теоріи рядовъ Fourier особо важное значеніе имѣетъ, какъ извѣстно, слѣдующая формула:

$$(1)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a^2+b^2),$$

гдѣ:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

а $f(x)$ есть произвольная ограниченная и интегрируемая функція въ интервалѣ $(0,2\pi)$. Соотношеніе (1), названное уравненіемъ замкнутости (l'équation de fermeture) проф. В. А. Стекловымъ и обобщенное имъ для многихъ функцій встрѣчающихся въ анализѣ и математической физикѣ, получило въ сравнительно недавнее время нѣсколько различныхъ доказательствъ, причемъ всѣ они основываются на той или иной формулѣ, такъ назыв., суммируемости тригонометрическихъ рядовъ.

Естественнымъ представляется поэтому приложить къ доказательству разсматриваемой теоремы наиболѣе простой процессъ суммируемости, основанный на томъ, что всякій тригонометрическій рядъ можетъ быть, какъ извѣстно интегрируемъ почленно, т. е. по данному ряду Fourier функціи $f(x)$, который, вообще говоря, можетъ быть и расходящимся, образуемъ такимъ образомъ вполнѣ опредѣленную функцію:

$$(2)\quad \mathrm{F}(x) = \int_0^x f(x)\,dx = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_0^x \cos nx\,dx + b_n\int_0^x \sin nx\,dx\right);$$

это представитъ собой, вполнѣ опредѣленный процессъ для суммируемости ряда, ибо очевидно по $\mathrm{F}(x)$ изъ формулы (2) можно получить и функцію $f(x)$ (послужившую для образованія ряда Fourier) во всѣхъ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ $f(x)$ есть производная своего неопредѣленнаго интеграла.

Замѣчая-же теперь, что рядъ, полученный почленнымъ интегрированіемъ будетъ равномѣрно сходящимся, если одна изъ оконечностей интервала интегрированія есть перемѣнная величина, видимъ, что при опредѣленномъ значеніи h и при напередъ заданномъ, сколь угодно маломъ значеніи ε, можно указать такое значеніе N указателя n, что для $n \geq \mathrm{N}$:

$$(3)\quad \left| f_h - \left[\frac{a_0}{2} + \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{n} a_i\int_{x-h}^{x+h}\cos it\,dt + b_i\int_{x-h}^{x+h}\sin it\,dt\right]\right| < \varepsilon,$$

гдѣ

$$f_h = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt;$$

обозначая для краткости черезъ $S(n, h)$ сумму, стоящую въ скобкахъ въ лѣвой части формулы (3), получимъ интегрируя отъ 0 до 2π, слѣдующій результатъ, при $n \geq N(h)$.

$$\int_0^{2\pi} \Big[f_h - S(n, h) \Big]^2 dx < \varepsilon_1, \text{ гдѣ } \lim \varepsilon_1 = 0;$$

образуя теперь разность:

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big[f - S(n,h) \Big]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big[(f - f_h) + (f_h - S(n, h) \Big]^2 dx,$$

убѣждаемся, что очевидно:

$$I_n < \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big[f - f_h \Big]^2 dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big[f_h - S(n, h) \Big]^2 dx,$$

а потому при достаточно маломъ значеніи h [1]),

$$I_n < \frac{2\varepsilon_2}{\pi} + \frac{2\varepsilon_1}{\pi},$$

т. е. будетъ сколь угодно мало, ибо на основаніи леммы, установленной [2]) проф. Стекловымъ, можно найти столь малое значеніе h, что

$$(4^1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^{2\pi} [f - f_h]^2 dx < \varepsilon_2,$$

при произвольномъ напередъ заданномъ, сколь угодно маломъ значеніи ε_2.

Возвращаясь теперь къ формулѣ (4), представимъ ее въ развернутомъ видѣ:

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f \,.\, S(n, h)\,da +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(n,h)^2 dx$$

и замѣтимъ, что

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \cos it\,dt = \frac{\sin ih \,.\, \cos ix}{ih};$$

$$\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \sin it\,dt = \frac{\sin ih \,.\, \sin ix}{ih};$$

отсюда имѣемъ:

$$S(n,h) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \frac{\sin ih}{ih}(a_i \cos ix + b_i \sin ix);$$

слѣдовательно:

$$I_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 dx - 2\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\frac{\sin ih}{ih} +$$

$$+ \sum_{n=1}^n (a_i^2 + b_i^2)\left(\frac{\sin ih}{ih}\right)^2;$$

[1]) и при достаточномъ большомъ значеніи n.

[2]) Stekloff et Tamarkine. Problème des vibrations transversales d'une verge elastique homogène. Rendiconti di Palermo . 1911.

прибавляя и вычитая въ правой части полученнаго соотношенія количество

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{n} a_i^2+b_i^2,$$

имѣемъ:

$$(6)\quad \ldots\quad I_n=\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2dx-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{i=1}^{n} a_i^2+b_i^2\right]+$$

$$+\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)\left(1-\frac{\sin ih}{ih}\right)^2\right];$$

причемъ каждое изъ выраженій, стоящихъ въ правой части (6) въ прямыхъ скобкахъ будетъ очевидно положительнымъ, ибо, какъ извѣстно:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^2+b_i^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2dx,$$

а потому каждое изъ нихъ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ при достаточно большомъ значеніи n и достаточно маломъ значеніи h, ибо при этихъ условіяхъ $\lim I_n=0$, какъ выше было доказано; имѣемъ поэтому:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} a_i+b_i^2,$$

что и доказываетъ теорему замкнутости.

Приведенное, весьма простое, доказательство [1]) хотя и пользуется леммой [2]) проф. В. А. Стеклова, выражаемой формулой (4[1]), но все же существенно отличается отъ различныхъ доказательствъ той же теоремы, данныхъ проф. В. А. Стекловымъ и приближается скорѣе по идеѣ къ доказательству проф. Hurwitz'a [3]) (основанному на методѣ ариѳметическихъ среднихъ Cesaro-Fejer'a), имѣя за собой, мнѣ кажется, преимущество бо̀льшей простоты, т. к. оно базируется на примѣненіи теоремы о почленномъ интегрированіи тригонометрическихъ рядовъ, которая сама представляетъ собою частный случай теоремы замкнутости.

Петербургъ.
8/5 1913.

---

[1]) Въ статьѣ „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“ (Записки Горнаго Института t VI, вып. I) приведены два доказательства теоремы замкнутости, изъ которыхъ первое основано на методѣ суммированія Weierstrass'a, а второе на теоремѣ о возможности почленнаго интегрированія тригонометрическаго ряда; съ цѣлью исправить недостаточно строго обоснованное второе доказательство и написана настоящая замѣтка.

[2]) Въ томъ или иномъ видѣ неявно лемма эта входитъ, по самому существу вопроса почти во всѣ доказательства теоремы замкнутости.

[3]) Hurwitz. Math. Annalen. 1903.