I.

# 17. О накопленіи погрѣшностей въ съемкѣ рудничныхъ полигоновъ.

**И. М. Бахурина**

(доложено 18 декабря).

Вопросъ о накопленіи погрѣшностей въ рудничномъ полигонѣ произвольной формы приводитъ къ разсмотрѣнію сложныхъ формулъ, не дающихъ возможности сдѣлать какіе-нибудь общіе выводы или дать общія правила для рѣшенія вопроса въ различныхъ случаяхъ практики. Причина этого заключается въ самой постановкѣ вопроса. Въ самомъ дѣлѣ если мы будемъ разсматривать ломаную линію произвольной формы, то въ виду безконечнаго разнообразія и сложности формы послѣдней, нельзя думать о возможности какого-нибудь обобщенія или упрощенія результатовъ. Возможность упрощенія начинается съ того момента, когда ломаной линіи мы припишемъ какую нибудь закономѣрность, въ самомъ простомъ случаѣ представимъ себѣ данную ломаную приближающейся по своей формѣ къ прямой или напримѣръ приближающейся къ правильной формѣ, представляя изъ себя часть периметра правильнаго многоугольника.

Въ обычныхъ рудничныхъ полигонахъ подобная простая правильность ломаной линіи отсутствуетъ, прямые вытянутые полигоны встрѣчаются довольно рѣдко, а вышеупомянутая правильная ломаная линія еще рѣже. Вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя сказать, чтобы въ формѣ обычныхъ рудничныхъ полигоновъ отсутствовала всякая закономѣрность по крайней мѣрѣ на рудникахъ каменноугольныхъ юга Россіи, которые мы главнымъ образомъ и имѣемъ въ виду во всемъ дальнѣйшемъ разсужденіи [1]).

Всѣ подземныя выработки въ рудникѣ можно отнести къ двумъ группамъ, которыя въ сущности охватываютъ почти все разнообразіе рудничныхъ галлерей, одна группа—выработки идущіе по паденію пласта (или вкрестъ его въ пустой породѣ), а другая группа выработки идущіе по простиранію пласта; направленія выработокъ этихъ группъ пересѣкаются другъ съ другомъ подъ углами, примѣрно равными прямому.

Такимъ образомъ полигоны, съ которыми встрѣчаемся въ практикѣ, не представляютъ по своей формѣ полнаго отсутствія закономѣрности, наоборотъ эта закономѣрность есть и заключается въ присутствіи болѣе или менѣе значительныхъ прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся примѣрно подъ прямыми углами. Къ разсмотрѣнію накопленія погрѣшностей въ такихъ полигонахъ мы и перейдемъ.

При этомъ будемъ предполагать, что координатныя оси выбраны такимъ образомъ, что ось абсциссъ идетъ примѣрно по линіи паденія пласта, а ось ординатъ примѣрно по линіи простиранія пласта.

Будемъ искать погрѣшность, накопившуюся въ какомъ нибудь пунктѣ полигона относительно его начальной точки, т. е. считая пока положеніе начальной точки опредѣленнымъ съ точностью превышающей таковую другихъ полигонныхъ пунктовъ и точно также будемъ пока считать свободнымъ отъ погрѣшности направленіе линіи, отъ которой исходитъ полигонъ.

Погрѣшность, накопившуюся отъ неправильности измѣренія длинъ для полигоновъ разсматриваемаго вида, легко найти, если установить законъ накопленія погрѣшностей для одного стана.

[1]) И еще одна оговорка—мы будемъ говорить лишь о положеніи точки на горизонтальной плоскости, не касаясь координаты Z.

Принято считать, что $\delta_s$ средняя погрѣшность измѣренія длины $s$ одного стана слагается изъ трехъ видовъ погрѣшностей, изъ которыхъ одна не зависитъ отъ длины стана, другая пропорціональна $\sqrt{}$ изъ длины, а третья пропорціонально самой длинѣ.

Другими словами $\delta S^2 = a^2 + b^2 s + c^2 s^2$

Для полигона какого угодно вида справедливо положеніе: Погрѣшность точки перпендикулярно (или параллельно) заданному направленію равна квадратичной суммѣ проэкцій погрѣшностей измѣренія каждаго отдѣльнаго стана на направленіе $\perp$ (или $\parallel$) заданному. Для вытянутаго полигона имѣющаго n становъ примѣрно одинаковой длины, погрѣшность $\Delta S$ послѣдняго пункта вдоль длины полигона, можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$(\Delta S)^2 = na^2 + b^2 L + c^2 \Sigma s^2 = na^2 + b^2 L + c^2 L s \quad \text{ибо}$$
$$\Sigma s^2 = ns^2 = Ls.$$

Для полигона разсматриваемой формы погрѣшность абсциссы $\Delta X_s$ конечной точки, зависящая отъ измѣренія длинъ, будетъ изъ себя представлять геометрическую сумму погрѣшностей [1]) вдоль вытянутыхъ полигоновъ, идущихъ по паденію или возстанію пласта (однимъ словомъ вкрестъ простиранія), полигоны же идушіе по простиранію пласта на $\Delta X_s$ вліянія не окажутъ. Для погрѣшности $\Delta Y_s$ подобно предыдущему надо взять квадратичную сумму погрѣшностей вдоль полигоновъ идущихъ по простиранію и оставить безъ вниманія полигоны идущіе вкрестъ простиранія.

Такимъ образомъ получимъ

$$\Delta X_s^2 = na^2 + b^2 L_1 + c^2 \Sigma_1 s^2$$
$$\Delta Y_s^2 = ma^2 + b^2 L_2 + c^2 \Sigma_2 s^2$$

Здѣсь n общее число становъ во всѣхъ полигонахъ идущихъ вкрестъ простиранія пласта, $L_1$ общая ихъ длина, $\Sigma_1 s^2$ сумма квадратовъ длинъ всѣхъ становъ.

m, $L_2$ и $\Sigma_2 s^2$ аналогичныя значенія для полигоновъ по простиранію. Сложивъ эти два равенства получимъ погрѣшность положенія точки $Ms$.

$$M_s^2 = Na^2 + b^2 L + c^2 \Sigma s^2$$

N—общее число становъ во всемъ полигонѣ, L его полная длина, $\Sigma s^2$ сумма квадратовъ длинъ всѣхъ становъ.

Если $s$ длина стана примѣрно одинакова для всего полигона, то $Ms$ получитъ такой видъ.

$$M_s^2 = Na^2 + b^2 L + c^2 Ls$$

[1]) Для конечныхъ пунктовъ

Выраженіе $Ms$ не отличается отъ анаголичнаго выраженія для вытянутаго полигона.

Погрѣшность вдоль какого нибудь направленія составляющаго уголъ $\vartheta$ съ осью x выразится въ зависимости отъ погрѣшностей $\Delta X_s$ и $\Delta Y_s$.

$$M_{s\vartheta}^2 = \Delta x_s^2 \cdot \cos^2\vartheta + \Delta y_s^2 \sin^2\vartheta$$

Другими словами $Ms\vartheta$ будетъ полудіаметромъ эллипса, параллельнымъ заданному направленія, если главныя полуоси будутъ $\Delta X_s$ и $\Delta Y_s$ соотвѣтственно расположенныя.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію закона накопленія погрѣшностей отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ теодолитомъ.

Для простоты разсмотрѣнія сдѣлаемъ рядъ допущеній:

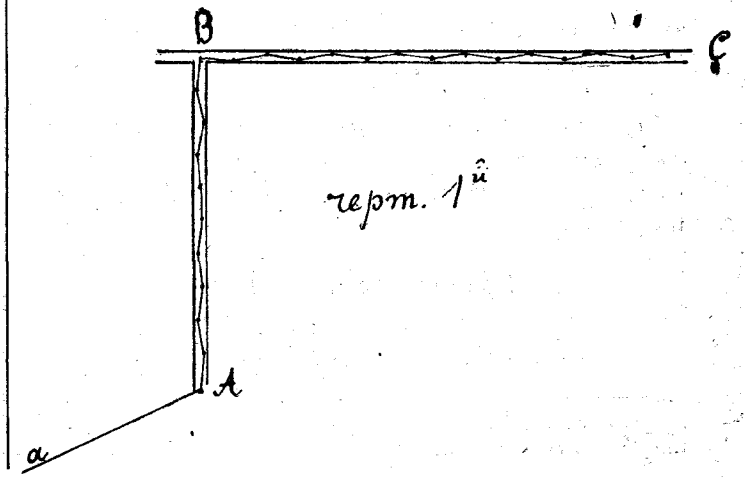
1) Sin угловъ простиранія въ полигонахъ, идущихъ вкрестъ простиранія пласта положимъ = 0, а cos = 1.

2) Sin угловъ простиранія въ полигонахъ, идущихъ по простиранію пласта положимъ = 1, а cos = 0.

3) Длины становъ предположимъ примѣрно равными между собой.

Первыя два допущенія при извѣстномъ выборѣ осей координатъ мы можемъ считать близкими къ дѣйствительности. Вліяніе же послѣдняго допущенія можно будетъ учесть послѣ того, какъ выводы при этомъ допущеніи будутъ сдѣланы. Принявъ допущеніе третье можно, такъ сказать, оставить открытымъ вопросъ о зависисимости точности измѣренія угловъ отъ длинъ становъ, такъ какъ при равной длинѣ становъ эта зависимость будетъ одинакова.

Предположимъ, что полигонъ имѣетъ форму ABC, т. е. состоитъ изъ двухъ прямолинейныхъ частей AB и BC пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.



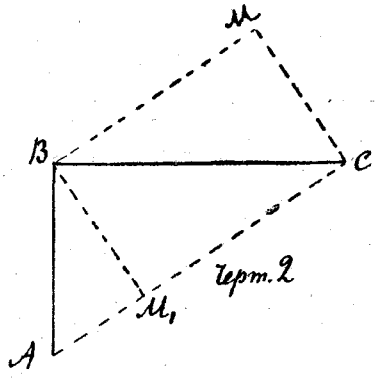
Въ части AB пусть $n_1$ становъ, въ части BC $n_2$ становъ, длина стана = S.

Съемка идетъ отъ точки A; предполагая координаты точки A свободными отъ погрѣшности, также какъ и направленіе линіи aA, найдемъ погрѣшность вдоль линіи AC (или все равно погрѣшность длины линіи AC) и погрѣшность $\perp$ направленію AC.

Для всякаго полигона погрѣшность вдоль какого-либо направленія будетъ равна аналогичной погрѣшности вытянутаго полигона, вершины котораго суть проэкціи вершинъ даннаго на направленіе, перпендикулярное данному и проходящее, напримѣръ, черезъ ту точку полигона, погрѣшность для которой ищется.

Примѣняя это правило, найдемъ всѣ искомыя погрѣшности, назвавъ ихъ соотвѣтственно $dR$ $dRl$, и $dR_\tau$ [1]).

Для нахожденія $dR$ надо найти сначала $M_x$ и $M_y$, ибо $dR^2 = M^2x + M^2y$.



Черт. 2

Назовемъ среднюю погрѣшность измѣренія угла теодолитомъ $d\alpha$.

Погрѣшность $M_x$ равна соотвѣтственной погрѣшности для точки B полигона AB, для котораго приложима формула Іордана, слѣдовательно $M_x^2 =$

$$= \frac{n_1^3 s^2}{3} d\alpha^2.$$

Ошибка $M_y$ получится изъ полигона BC, въ которомъ мы въ точку B должны вообразить спроэктированными $n_1$ вершинъ полигона AB, отсюда получимъ.

$$M_y^2 = \left(n_1 n_2^2 s^2 + \frac{n_2^3 s^2}{3}\right) d\alpha^2$$

$$\text{отсюда } dR^2 = s^2 d\alpha^2 \left(\frac{n_1^3}{3} + \frac{n_2^3}{3} + n_1 n^2\right)$$

[1]) Здѣсь $dR$ есть погрѣшность положенія точки, $dRl$ погрѣшность вдоль, $dR_\tau$ погрѣшность $\perp$ линіи AC.

Ошибка вдоль линіи AC равна геометрической суммѣ аналогичныхъ ошибокъ полигоновъ, представляющихъ проэкціи данныхъ на направленіи MC, перпендикулярное AC. Для обоихъ этихъ полигоновъ приложима формула Іордана, отсюда и получается выраженіе для $dRl$.

$$dR_l^2 = d\alpha^2 \left[\frac{n_1^3 s_1^2}{3} + \frac{n_2^3 s_2^2}{3}\right]$$

здѣсь $s_1 = \frac{n_2 s}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$ и $s_2 = \frac{n_1 s}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$

подставивъ, получимъ:

$$dR_l^2 = \frac{s^2 d\alpha^2}{3(n_1^2 + n_2^2)} \cdot (n_1^3 n_2^2 + n_2^3 n_1^2) =$$

$$= \frac{n_1^2 n_2^2 s^2}{3(n_1^2 + n_2^2)} d\alpha^2 (n_1 + n_2)$$

Ошибка $\perp$ направленію AC есть геометрическая сумма соотвѣтственныхъ ошибокъ полигоновъ $AM_1$ и $M_1C$ полученныхъ какъ проэкціи полигоновъ AB и AC.

Ошибка для полигона $M_1C$ находится просто и равна $= d\alpha \sqrt{\frac{n_2^3 s_1^2}{3}}$ гдѣ $s_1$ имѣетъ указанное выше значеніе.

Для нахожденія же ошибки полигона $AM_1$ (въ точкѣ C), мы замѣтимъ, что для любой прямолинейной части полигона, входящей въ комбинацію формы полигона произвольнаго вида, при условіи болѣе или менѣе значительнаго числа становъ въ этой части, справедливо слѣдующее выраженіе [1]).

$$dr^2 = d\alpha^2 \left[\frac{n^3 s^2}{3} + n^2 sd + n\,(p^2 + d^2)\right]$$

Здѣсь $dr$ есть та погрѣшность для конечной точки всего полигона, которая является какъ слѣдствіе неправильности измѣренія угловъ въ прямолинейной части полигона, $n$ число становъ, $s$ длина стана, $p$ длина перпендикуляра опущеннаго изъ конечной точки полигона на направленіе прямолинейной части, $d$ разстояніе отъ основанія вышеупомянутаго перпендикуляра до ближайшей вершины полигоннаго угла (прямолянейной части).

Для нашего случая $p = o$, $d = n_2 s_1$ $n = n_1$

[1]) Еще условіе справедливости этого выраженія заключается въ томъ, чтобы прямолинейная часть не лежала по обѣимъ сторонамъ перпендикуляра опущеннаго на нее изъ конечной точки полигона.

и $s = s_2$ гдѣ $s_1$ и $s_2$ имѣютъ указанныя выше значенія такимъ образомъ, мы можемъ написать, что

$$dR_\tau^2 = d\alpha^2\left[\frac{n_1^3 s_2^2}{3} + n_1 n_2^2 s_1^2 + n_1^2 n_2 s_1 s_2 + \frac{n_2^3 s_1^2}{3}\right]$$

Если замѣнить $s_1$ и $s_2$ ихъ значеніями, то получимъ:

$$dR_\tau^2 = \frac{s^2 d\alpha^2}{n_1^2 + n_2^2}\left(\frac{n_1^5}{3} + \frac{n_2^5}{3} + n_1 n_2^4 + n_2^2 \cdot n_1^3\right)$$

Полученныя выраженія для $dR$, $dR_e$ и $dR_\tau$ представимъ какъ функціи слѣдующихъ величинъ.

1) Общаго числа становъ всего полигона $n_1 + n_2 = N$.

2) Длины линіи $AC = L = \sqrt{n_1^2 + n^2} \cdot s$

3) Отношенія $Z = \frac{AB}{BC} = \frac{n_1}{n_2}$.

Послѣ нужныхъ преобразованій получимъ:

$$(dR)^2 = d\alpha^2 \frac{L^2 N}{3} \varphi_1^2(Z)$$

$$(dRl)^2 = d\alpha^2 \cdot \frac{L^2 N}{3} \varphi_2^2(Z)$$

$$(dR_\tau)^2 = d\alpha^2 \frac{L^2 N}{3} \varphi_3^2(Z),$$

гдѣ функціи $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\varphi_1(Z) = \sqrt{\frac{1 + 3Z + Z^3}{(Z^2+1)(Z+1)}}$$

$$\varphi_2(Z) = \frac{Z}{Z^2 + 1}$$

$$\varphi_3(Z) = \sqrt{\frac{1 + 3Z(Z^2+1) + Z^5}{(Z^2+1)(Z+1)}}$$

Разсмотримъ отношеніе $\frac{dR}{dR_\tau}$, т. е. отношеніе ошибки положенія точки къ поперечной ошибкѣ, величина этого отношенія $= \frac{\varphi_1(Z)}{\varphi_3(Z)} = \sqrt{\frac{(1+3Z+Z^3)(Z^2+1)}{1+3Z(Z^2+1)+Z^5}}$

При положительномъ Z (а Z отрицательнымъ быть и не можетъ) отношеніе $\frac{\varphi_1(Z)}{\varphi_3(Z)}$ всегда больше 1 и его минимальное значеніе $= 1$ при $Z = 0$ и при $Z = \infty$.

Разысканіе maximum'а этого выраженія приводитъ къ рѣшенію уравненія $2Z^6 + 3Z^5 + 3Z^3 - 6Z^2 - 6Z - 2 = 0$.

Это уравненіе какъ то не трудно доказать имѣетъ всего одинъ положительный корень, ирраціональный, заключенный между $Z = 1{,}19$ и $Z = 1{,}18$.

Значеніе $\frac{dR}{dR_\tau}$ для $Z = 1{,}19$ получается слѣдующее

$$\max \frac{dR}{dR_\tau} = 1{,}13.$$

Слѣдующая таблица даетъ значенія для $\frac{dR}{dR_\tau}$ при различныхъ значеніяхъ Z. Значенія $\frac{dR}{dR_\tau}$ вычислены съ точностью до 0,01.

| Z | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | ∞ | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dR}{dR_T}$ | 1 | 1,00 | 1,01 | 1,03 | 1,05 | 1,06 | 1,08 | 1,09 | 1,10 | 1,11 | 1,12 | 1,12 | 1,09 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,005 | 1 | 1,01 |

Отсюда мы можемъ заключить, что поперечная ошибка всегда остается приблизительно равной ошибкѣ положенія и maximum отклоненія $dR$ отъ $dR_\tau$ достигаетъ всего 13% $dR_\tau$.

Замѣтимъ, что максимальное значеніе $\frac{dR}{dR_\tau}$ достигается не при $Z = 1$, когда форма полигона наиболѣе удаляется отъ вытянутой. Явленіе это можно себѣ объяснить тѣмъ, что вліянія погрѣшностей различныхъ угловъ полигона на конечныя ошибки не симметричны положенію вершины угла относительно точки B.

Разсмотримъ теперь значеніе выраженія $\varphi_1(Z)$.

Разысканіе maximum'а и minimum'а этого выраженія приводитъ къ рѣшенію уравненія $Z^4 - 4Z^3 - 3Z^2 - 2Z + 2 = 0$. Это уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня, изъ которыхъ одинъ равенъ 4,7, а второй заключается между 0,47 и 0,48.

Предѣльное значеніе $\varphi_1(Z)$ отсюда получается:

$$\varphi_1(Z = 4{,}7) = 0{,}95$$

$$\varphi_1(Z = 0{,}47) = 1{,}19: (1{,}186).$$

Значенія $\varphi_1(Z)$ при измѣненіи Z отъ 0 до ∞ даны въ слѣдующей таблицѣ:

| $Z=$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\infty$ | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_1(Z)=$ | 1 | 1,08 | 1,13 | 1,17 | 1,18 | 1,18 | 1,18 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,12 | 1 | 0,96 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | 0,96 | 0,96 | 0,96 | 0,96 | 1 | 1,05 |

Если слѣдовательно мы будемъ опредѣлять по-шность dR прямо по формулѣ

$$dR = d\alpha \cdot L\sqrt{\frac{N}{3}}$$

мы опредѣляли бы dR съ точностью во всякомъ чаѣ до 17% опредѣляемой величины.

Если же для вычисленія dR мы будемъ примѣ-ь выраженіе

$$dR = K \cdot d\alpha \; L\sqrt{\frac{N}{3}}$$

гдѣ k будемъ считать равнымъ 1,15 для всѣхъ значеній Z отъ 0,1 до $Z=1,3$ и $k=1$ для всѣхъ другихъ значеній Z, что dR опредѣляется во всѣхъ случаяхъ съ точностью не ниже 7% опредѣляемой величины.

Функція $\varphi_3(Z)$ обладаетъ также тѣмъ свойствомъ, что при всевозможныхъ значеніяхъ Z величина самой функціи мало отклоняется отъ 1.

Вотъ значенія въ $\varphi_3(Z)$ при измѣненіи Z отъ 0 до $\infty$

| $Z=$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_3(Z)=$ | 1 | 1,08 | 1,12 | 1,13 | 1,13 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,04 | 1,02 | 1 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,945 | 0,95 | 0,955 | 0,96 | 1 |

Изъ этой таблицы видно, что опредѣляя $dR\tau$ по мулѣ $dR\tau = d\alpha \cdot L\sqrt{\frac{N}{3}}$ мы дѣлаемъ ошибку не ѣе 12% опредѣляемой величины.

Если же опять введемъ коэффиціентъ $k$, полагая

$$dR\tau = k\, d\alpha \cdot L\sqrt{\frac{N}{3}}$$

чемъ $k$ положимъ равнымъ 1,1 для всѣхъ знай Z отъ 0,1 до 0,7, $k=0,95$ для всѣхъ Z отъ до 10 и $k=1$ для другихъ значеній, то для съ случаевъ мы опредѣлимъ $dR\tau$ съ точностью ниже 5% искомой величины, а въ большинствѣ аевъ съ точностью не ниже 2—3% искомой ичины.

Если же $dR\tau$ или $dR$ желательно знать съ больточностью, то можно прибѣгнуть къ помощи авленныхъ выше таблицъ.

Функція $\varphi_2(Z)$ получаетъ свое наибольшее зна-е $=0,5$ при $Z=1$.

Такимъ образомъ продольная ошибка, причиняепогрѣшностями измѣренія угловъ даже при мъ максимальномъ значеніи значительно меньше бки поперечной.

Собственно говоря, максимальное значеніе отношенія $\frac{dRl}{dR\tau}$ будетъ не при $Z=1$, а при дальнѣйшемъ возрастаніи Z, и при этомъ возрастаніи $\varphi_2(Z)$ уменьшается медленнѣе, чѣмъ $\varphi_3(Z)$. Разысканіе максимума выраженія $\frac{dRl}{dR\tau}$ приводитъ къ рѣшенію уравненію $2Z^6+3Z^5+3Z^3-6Z^2-6Z-2=0$, къ которому мы пришли ранѣе, разыскивая maximum выраженія $\frac{dR}{dR\tau}$; этотъ результатъ, т. е. что $\frac{dR}{dR\tau}$ и $\frac{dRl}{dR\tau}$ имѣютъ максимумъ одновременно, можно было предвидѣть и заранѣе. Maximum $\frac{dRl}{dR\tau}$ будетъ слѣдовательно при значеніи Z заключенномъ между 1,19 и 1,18.

$$maxim\,\frac{dRl}{dR\tau}(\text{при } Z=1,19) = 0,492$$

Слѣдовательно продольная ошибка никогда не достигаетъ половины $dR\tau$.

Слѣдующая таблица даетъ какъ отношеніе $\frac{dRl}{dR\tau}$ такъ и само значеніе $\varphi_2(Z)$ при различныхъ значеніяхъ Z.

| $Z =$ | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_2(Z) =$ | 0 | 0,10 | 0,19 | 0,27 | 0,345 | 0,4 | 0,44 | 0,47 | 0,49 | 0,5 | 0,5 | 0,46 | 0,40 | 0,30 | 0,24 | 0,19 | 0,16 | 0,14 | 0,12 | 0,11 | 0,10 | 0 |
| $\frac{dRe}{dR_\tau}$ | 0 | 0,09 | 0,17 | 0,24 | 0,31 | 0,36 | 0,40 | 0,44 | 0,47 | 0,49 | 0,5 | 0,48 | 0,44 | 0,33 | 0,255 | 0,21 | 0,17 | 0,15 | 0,13 | 0,115 | 0,10 | 0 |

Продольная погрѣшность, накопившаяся вслѣдствіе неправильнаго измѣренія угловъ, мала по отношенію къ $dR\tau$, разсмотримъ, въ какомъ отношеніи она стоитъ къ продольной погрѣшности, накопившейся отъ неправильности измѣренія длинъ становъ. Найдемъ условіе, при которомъ эти двѣ погрѣшности становятся равными другъ другу, при значеніи Z положимъ $= 1$. Продольная погрѣшность, накопившаяся отъ угловъ, будетъ въ этомъ случаѣ $= \frac{0,5}{\sqrt{3}} . d\alpha . L . \sqrt{N}$.

Продольная погрѣшность, накопившаяся отъ длинъ найдется по формулѣ:

$$M_s^2\vartheta = \Delta x_s^2 \cos^2\vartheta + \Delta y_s^2 \sin^2\vartheta$$

если положимъ $\cos^2\vartheta = 0,5$ и $\sin^2\vartheta = 0,5$.

Взявъ выраженія для $\Delta x_s$ и $\Delta y_s$ со стр. 2 и выразивъ входящія въ нихъ величины черезъ L и N, имѣющія тѣ же значенія, что и для $dRl$, получимъ:

$$M_s^2\vartheta = 0,5 \left| (Na^2 + b^2 L \sqrt{2} + \sqrt{2} c^2 \frac{L^2}{N} \right|$$

Возьмемъ значенія $a$, $b$, $c$ и $d\alpha$ по Anweisung IX, т. е. положимъ

$$a = 0 \quad b^2 = 0,0001 \quad c^2 = 1,25 . 10^{-7} \quad d\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4}$$

Искомое условіе равенства $Ms\vartheta$ и $dRl$ мы можемъ теперь написать въ такомъ видѣ.

$$\frac{0,25}{3} \cdot 225 \cdot 10^{-8} L^2 N = 0,5 L \sqrt{2} \left( 10^{-4} + \right.$$
$$\left. + 1,25 \cdot 10^{-7} \frac{L}{N} \right).$$

Или такъ:

$$0,0375\ LN = 1,424 \left( 10^3 + \frac{1,25L}{N} \right).$$

Обычно среднее значеніе $\frac{L}{N}$ не выше $50m$, поэтому пренебрегая членомъ $\frac{1,25L}{N}$ по сравненію съ $10^3$, можемъ написать наше равенство такъ:

$$LN = 38000.$$

Положимъ $\frac{L}{N} = 40$ metr., найдемъ $L^2 = 40.38000$ и $L = 1200$ metr. Полигоны такихъ размѣровъ очень часты въ рудничной практикѣ, но все-таки ихъ размѣры надо считать значительными для обычной рудничной съемки. Поэтому можно думать, что для средняго размѣра полигона (при длинѣ AC метр. въ 200) ошибка $dRl$ остается замѣтно менѣе ошибки $Ms\vartheta$, и оставаясь менѣе $Ms\vartheta$ можетъ весьма варьировать въ своей величинѣ въ зависимости отъ формы полигона.

---

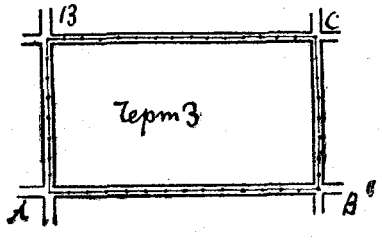
Если въ выраженіи для $\varphi_1^2(Z)$ замѣнить Z черезъ $\frac{1}{Z}$ и составить разность между прежнимъ выраженіемъ для Z и вновь полученнымъ, то числитель этой разности будетъ $= 3Z\ (1 - Z)$, а знаменателемъ будетъ служить выраженіе, не содержащее знака—и слѣдовательно положительное при всякомъ положительномъ значеніи Z.

Для всякаго $Z < 1$, слѣдовательно, разность будетъ положительна и для всякаго $Z > 1$ отрицательна.

Аналогичнымъ образомъ можно составить разность $\varphi_3^2(Z)$ и $\varphi_3^2\left(\frac{1}{Z}\right)$ и найти, что ея числитель будетъ $= 3Z^2(1 - Z)$, а знаменатель опять выраженіе положительное при всякомъ положительномъ Z.

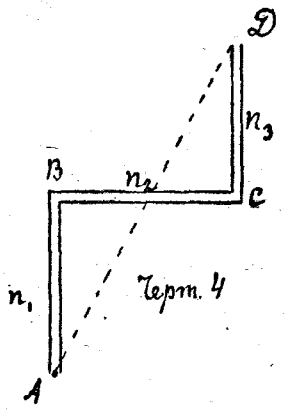
Слѣдовательно и новая разность будетъ положительна при всякомъ $Z < 1$.

А отсюда слѣдуетъ, что ошибка положенія точки и поперечная ошибка будутъ болѣе у того полигона, у котораго короткое крыло предшествуетъ длинному т. е. что ошибки будутъ болѣе у полигона вида ABC, чѣмъ у полигона вида AB′C (разумѣется при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ).



Форма $\begin{matrix} & B & \\ A & | & C \end{matrix}$ полигона представляетъ первую степень усложненія формы рудничныхъ полигоновъ, начиная отъ простого вытянутаго и идя къ тѣмъ формамъ, которыя даетъ намъ практика.

Какъ вторую степень усложненія мы можемъ разсмотрѣть полигоны вида $\begin{matrix} & & D \\ & B & | & C \\ A & | & & \end{matrix}$, т. е. состоящіе изъ трехъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямыми углами.



Черт. 4

Въ части AB — $n_1$ становъ, въ BC — $n_2$ и CD — $n_3$ становъ примѣрно одинаковой длины.

Такимъ же образомъ, какъ выше можно найти выраженія для ошибокъ $dR$, $dBl$ и $dR\tau$.

Выражая ихъ въ зависимости отъ AD = L — разстоянія между начальной и конечной точками полигона, $N = n_1 + n_2 + n_3$ общаго числа становъ, $= \frac{n_1 + n_3}{n_2}$ и $Z_1 = \frac{n_3}{n_2}$ получимъ:

$$dR = L d\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_1 (Z, Z_1)$$

$$dRe = L d\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_2 (Z, Z_1).$$

$$dR^\tau = L d\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_3 (Z, Z_1).$$

Здѣсь $\psi_1$; $\psi_2$ и $\psi_3$ имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\psi_1^2 = \frac{1 + 3Z + Z^3 + 3(Z_1^2 - Z_1)}{(Z^2+1)(Z+1)} = \varphi_1^2 (Z) + \frac{3(Z_1^2 - Z_1)}{(Z^2+1)(Z+1)}$$

$$\psi_2^2 = \frac{Z^2 + 3(Z_1^2 - ZZ_1)}{(1+Z^2)^2} = \varphi_2^2 (Z) + 3\frac{Z_1^2 - ZZ_1}{(1+Z^2)^2}$$

$$\psi_3^2 = \frac{1 + Z^2 + 3Z(1+Z^2) + 3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)}{(1+Z)(1+Z^2)^2} =$$

$$= \varphi_3^2 (Z) + 3\frac{(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)}{(1+Z)(1+Z^2)^2}$$

Здѣсь $\varphi_1$; $\varphi_2$ и $\varphi_3$ уже извѣстныя намъ изъ предыдущаго формулы.

Разсмотримъ сначала $\psi_1 (Z, Z_1)$.

При всякомъ заданномъ Z выраженіе $\psi_1$ получаетъ свой maximum и minimum въ зависимости отъ $Z_1$ и притомъ одновременно съ выраженіемъ

$$Z_1^2 - Z_1$$

Максимальное значеніе $Z_1$ равно Z, минимальное = 0

Если $Z < 1$, то $Z_1 < 1$.

Слѣдов., если $Z < 1$, то максимальное значеніе выраженія $Z_1^2 - Z_1$ будетъ при $Z_1 = 0$, а минимальное при $Z_1 = \frac{1}{2}$.

Отсюда при $Z < 1$, maximum выраженія $\psi_1^2 (Z, Z_1)$ будетъ равенъ $= \varphi_1^2 (Z) = \frac{1 + 3Z + Z^2}{(1+Z)(1+Z^2)}$

minimum $\psi_1^2 (Z, Z_1) = \frac{\frac{1}{4} + 3Z + Z^3}{(Z^2+1)(Z+1)}$ для Z между 1 и 0,5.

minimum $\psi_1^2 (Z, Z_1) = \frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(Z^2+1)(Z+1)}$ для Z между 0,5 и 0.

Для $Z > 1$ maximum $Z_1^2 - Z_1$ будетъ при maximum $Z_1$ — т. е. при $Z_1 = Z$.

Отсюда max. $\psi_1^2 (Z, Z_1) = \frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(Z^2+1)} \frac{}{(Z+1)}$.

Минимальное же значеніе будетъ при $Z_1 = \frac{1}{2}$,

Слѣдов. для $Z > 1$ minimum $\psi_1^2 (Z, Z_1) =$

$$= \frac{\frac{1}{4} + 3Z + Z^3}{(1+Z)(1+Z^2)}$$

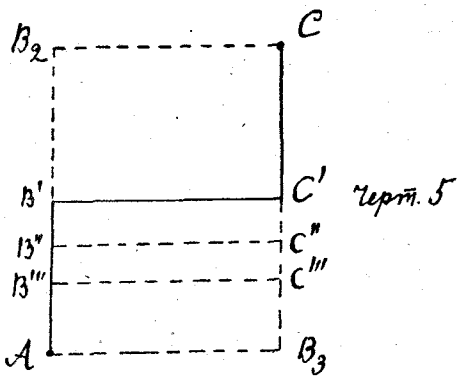
Замѣтимъ, что выраженіе $\frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(1+Z)(1+Z^2)} =$

$$= \varphi_1^2 \left(\frac{1}{Z}\right).$$

Все сказанное сейчасъ о maximum'ѣ $\psi (Z, Z_1)$ можно представить нагляднѣе такъ:

Maximum ошибки $dR$ для полигона состоящаго изъ трехъ прямолинейныхъ частей пересѣкающихся подъ прямыми углами будетъ для той его формы, когда онъ обращается въ полигонъ болѣе простого вида, т. е. состоящій всего изъ двухъ прямолинейныхъ частей и притомъ въ такой, въ которомъ съемка

по короткой части предшествуетъ съемкѣ по длинной.




Черт. 5.

Напримѣръ maximum ошибки $d$R для полигоновъ AB′C′C; AB″C″C, AB‴C‴C; будетъ ошибка $d$R полигона $AB_2C$ если $AB_2 < B_2C$ или полигона $AB_3C$, если $AB_3 < B_3C$.

Разсмотримъ теперь minimum той же ошибки $d$R при различныхъ значеніяхъ Z и при различныхъ измѣреніяхъ $Z_1$. Для Z между 0 и 0,5 minimum $\psi_1(ZZ_1)$ будетъ равенъ значенію функціи $\varphi_1(Z)$, если придавать Z значенія отъ $\frac{1}{0}$ до $\frac{1}{0,5}$. При всѣхъ значеніяхъ Z отъ 0,5 до $\infty$ minimum $\psi_1$ $(ZZ_1)$ равенъ, какъ это видно изъ предыдущаго

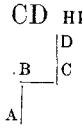
$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+3Z+Z^3}{(Z^2+1)(1+Z)}}$$

Слѣдующая таблица даетъ значенія minimum'а $\psi_1$ $(Z\,Z_1)$ для различныхъ значеній Z, причемъ значенія этого minimum'а для Z отъ 0 до 0,5 получены изъ табл. 1 стр. 5, а для другихъ значеній вычислены по только что приведенной выше формулѣ:

| Z = | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| minim. $\varphi_1(Z_1Z_1)$ | 1 | 0,96 | 0,95 | 0,96 | 0,97 | 1 | 1,02 | 1,03 | 1,035 | 1,035 | 1,03 | 1,03 | 1,02 | 1,01 | 1,01 | 1,0 | 0,98 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | 0,95 | 0,96 | 0,96 | 0,96 | 0,96 | 1 |
| max. $\varphi_1(Z_1Z_1)$ | 1 | 1,08 | 1,13 | 1,17 | 1,18 | 1,18 | 1,18 | 1,17 | 1,15 | 1,13 | 1,12 | 1,13 | 1,15 | 1,16 | 1,16 | 1,17 | 1,18 | 1,17 | 1,15 | 1,135 | 1,12 | 1,11 | 1,10 | 1,09 | 1,08 | 1 |

Значенія maximum $\psi_1(Z, Z_1)$, вычислены по формулѣ $\varphi_1(Z)$, т. е. взяты изъ таблицы со стр. 5 отъ 0 . . . до 1, а отъ 1 до $\infty$ изъ второй половины той же таблицы.

Эта таблица даетъ намъ возможность зная Z, т. е. отношеніе длины галлерей идущихъ вкрестъ простиранія пласта къ длинѣ галлерей идущихъ по простиранію пласта назначить для $d$R предѣлы, между которыми она заключается каково бы соотношеніе между длинами AB и CD ни было.

Какой бы полигонъ вида  намъ ни былъ данъ, можемъ вычислить $d$R по формулѣ:



$$dR = k \cdot d\alpha\, L\sqrt{\frac{N}{3}}$$

причемъ придавъ $k$ среднее изъ минимальнаго и максимальнаго данныхъ выше для каждаго Z въ таблицѣ значеній, мы найдемъ $d$R съ точностью не меньшей чѣмъ до 10% опредѣляемой величины.

Если же вычислимъ $d$R просто по формулѣ Іордана

$$dR = d\alpha\, L\sqrt{\frac{N}{3}}$$

то можемъ сдѣлать погрѣшность въ опредѣленіи $d$R или — 19% или + 5% отъ найденнаго значенія.

Обратимся теперь къ ошибкѣ $d$R$_\tau$ и разсмотримъ значенія функціи $\psi_3(Z, Z_1)$.

При данномъ Z эта функція достигаетъ maximum'а и minimum'а одновременно съ выраженіемъ $3(Z-1).(Z_1{}^2Z + Z_1)$.

Тутъ опять могутъ быть случаи $Z > 1$ и $Z < 1$.

При $Z > 1$ данное выраженіе $> 0$ и maximum его будетъ при $Z_1$ maximum, т. е. $Z_1 = Z$.

Тогда $3(Z-1)(Z_1{}^2Z + Z_1) = 3Z(Z-1)(Z^2+1)$ $\psi_3$ принимаетъ видъ:

$$\psi_3^2 = \frac{Z^5 + Z^2(1+Z^2)+1}{(Z^2+1)^2(Z+1)}$$

Не трудно видѣть, что полученное $\psi_3 = \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ см. стр. 4, т. е. при измѣненіи Z отъ 1 до $\infty$ maximum $\psi_3(Z, Z_1)$ равенъ значенію $\varphi_3(Z)$ при измѣненіи Z отъ 1 до 0.

При $Z<1$ выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)$ будетъ отрицательно и его maximum $= 0$ при $Z_1 = 0$.

Тогда $\psi_3(Z, Z_1) = \varphi_3(Z)$.

Такимъ образомъ maximum ошибки $dR_\tau$ при измѣненіи отношенія $Z_1$ и при заданномъ Z равенъ ошибкѣ $dR_\tau$ такого полигона состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, въ который данный, состоящій изъ трехъ частей въ предѣлѣ обращается, причемъ изъ двухъ полигоновъ, служащихъ предѣломъ для даннаго, надо выбрать такой, для котораго короткая часть предшествуетъ длинной.

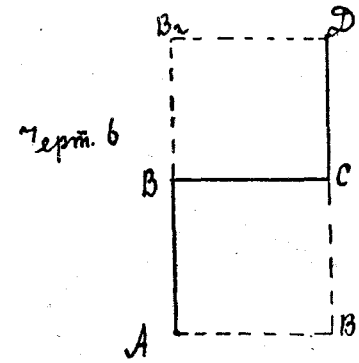
Найдемъ теперь minimum $\psi_3^2(Z, Z_1)$ при заданномъ значеніи Z.

Если $Z>1$, выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)$ будетъ положительно, слѣдовательно, его minimum $= 0$, что будетъ при $Z_1 = 0$, а тогда функція $\psi_3(Z, Z_1)$ будетъ равна ранѣе разсмотрѣнной функціи $\varphi_3(Z)$.

Если $Z<1$, выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1) < 0$, его minimum будетъ при maxim'альномъ значеніи $Z_1$, т. е. при $Z_1 = Z$, а тогда $\psi_3(Z, Z_1) = \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$.

Сказанное объ ошибкѣ $dR_\tau$ можно нагляднѣе свести къ слѣдующему:

Какое бы ни было дано видоизмѣненіе полигона ABCD, ошибка $dR_\tau$ для него заключается между ошибками $dR_\tau$ полигоновъ $AB_2D$ и $AB_1D$.




Если намъ дано значеніе Z, то ошибка $dR_\tau$ любого полигона ABCD заключается между

$$Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}\cdot\psi_3(Z) \text{ и } Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}\psi_3\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Значенія $\varphi_3(Z)$ для всевозможныхъ значеній Z вычислены уже на стр. 5.

Разность $\varphi_3(Z) - \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ даетъ намъ для каждаго Z предѣлъ измѣненія (въ доляхъ ошибки $dR_\tau$ вычисляемой по формулѣ Іордана) искомой $dR_\tau$ при измѣненіяхъ $Z_1$ отъ 0 до своего maximum Z.

Ниже мы помѣщаемъ таблицу, которая представляетъ изъ себя въ сущности приведенную уже на стр. 5, верхняя строка даетъ $\varphi_3(Z)$ при измѣненіи Z отъ 0 до $\infty$, а расположенная подъ ней тоже $\varphi_3(Z)$, но при измѣненіи отъ $\infty$ до 0, нижняя строка ихъ разность.

| | Z = | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\varphi_3(Z)$ | 1 | 1,08 | 1,12 | 1,13 | 1,13 | 1,11 | 1,09 | 1,07 | 1,04 | 1,02 | 1 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,945 | 0,95 | 0,955 | 0,16 | 1 |
| 2 | $\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ | 1 | 0,96 | 0,93 | 0,92 | 0,91 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1 | 1,07 | 1,11 | 1,13 | 1,13 | 1,12 | 1,11 | 1,10 | 1,09 | 1,08 | 1,08 | 1 |
| 3 | $\varphi_3(Z) - \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ | 0 | 0,12 | 0,19 | 0,21 | 0,22 | 0,19 | 0,16 | 0,13 | 0,08 | 0,04 | 0 | 0,13 | 0,19 | 0,22 | 0,21 | 0,19 | 0,17 | 0,15 | 0,14 | 0,12 | 0,12 | 0 |

Изъ этой таблицы видно, что если мы вычислимъ $dR_\tau$ по формулѣ:

$$dR_\tau = k\cdot Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}$$

гдѣ $k$ будемъ придавать среднее для каждаго Z изъ помѣщенныхъ въ 1-й и во 2-й стр. таблицы чиселъ то сдѣлаемъ при опредѣленіи $dR_\tau$ наибольшую погрѣшность $\pm 11\%$ отъ $dR_\tau = Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}$

и если вычислимъ $dR_\tau$ просто по формулѣ Іордана, то сдѣлаемъ погрѣшность самое большее — 13% или + 9% отъ найденной величины.

Разсмотримъ теперь ошибку $dRl$ или значеніе выраженія $\psi_2$.

Будемъ считать Z заданнымъ, найдемъ maximum и minimum $\psi_2$ при измѣненіи $Z_1$.

Выраженіе $Z_1^2 - ZZ_1$, одновременно съ которымъ $\psi_3$ достигаетъ своего maximum и minimum всегда отрицательно, ибо $Z_1 < Z$, слѣдовательно его maximum = 0, что будетъ при $Z_1 = Z$ и при $Z_1 = 0$.

Отсюда слѣдуетъ:

1) $dRl$ для полигона, состоящаго изъ трехъ прямолинейныхъ частей, всегда менѣе $dRl$ полигона, состоящаго изъ двухъ и имѣющаго такое же значеніе Z (при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ).

2) Maximum $dRl$ будетъ равенъ $dRl$ полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей и представляющаго изъ себя предѣлъ измѣненія даннаго полигона.

Предшествуетъ ли въ этомъ случаѣ съемка по короткой части съемкѣ по длинной, не играетъ здѣсь роли, ибо

$$\varphi_2(Z) = \varphi_2\left(\frac{1}{Z}\right).$$

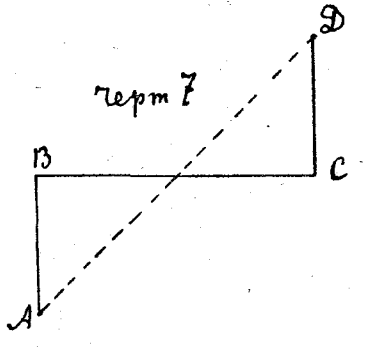
Минимальное значеніе $\psi_2$ $(Z, Z_1)$ при заданномъ Z совпадаетъ съ максимальнымъ численнымъ значеніемъ выраженія $Z_1^2 - Z Z_1$, которое поступаетъ при $Z_1 = \frac{Z}{2}$.

$$(Z_1^2 - ZZ_1) \text{ при } Z_1 = \frac{Z}{2} \text{ равно } -\frac{Z^2}{4}.$$

Выраженіе $\psi_2$ приметъ при этомъ такой видъ:

$$\psi_2 (ZZ_1)_{Z_1 = \frac{Z}{2}} = \frac{1}{2} \frac{Z}{1+Z^2} = \frac{1}{2}\varphi_2(z).$$

Минимальное значеніе $\psi_2$ будетъ при такой формѣ полигона ABCD, при которой онъ наиболѣе



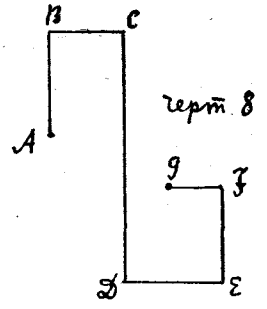

приближается къ вытянутому между точками A и D полигону. Линія AD дѣлитъ пополамъ BC, и точки B и C равно удалены отъ линіи AD.

Итакъ minimum $dRl$ равенъ половинѣ maximum'а той же ошибки $dRl$ при заданномъ Z и при всевозможныхъ измѣненіяхъ $Z_1$.

По таблицѣ стр. 6, мы можемъ получить значеніе maximum $dRl$, а слѣдовательно отдать себѣ отчетъ о предѣлахъ, въ которыхъ колеблется $dRl$.

То, что сказано объ ошибкахъ $dR$, $dRl$ и $dR_\tau$ можно обобщить и распространить на полигоны какого угодно вида, т. е. состоящіе изъ любого числа прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами.

При этомъ необходимо замѣтить, что мы будемъ разсматривать только такіе полигоны, въ которыхъ съемка идетъ все время удаляясь отъ начальнаго пункта.




Возможны конечно и такіе полигоны, какъ напримѣръ полигонъ вида ABCDFE$g$, также состоящій изъ прямолинейныхъ участковъ пересѣкающихся подъ прямыми углами.

Оставляя вопросъ о возможности какихъ-либо обобщеній для полигоновъ такого вида открытымъ, мы будемъ имѣть въ виду дальше только полигоны, въ которыхъ съемка все время идетъ, удаляясь отъ начальнаго пункта.

Мы имѣемъ въ виду показать, что какой бы ни былъ заданъ полигонъ, состоящій изъ произвольнаго числа участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами, легко дать себѣ понятіе о величинѣ погрѣшностей конечной его точки, т. е. имѣть эту величину съ достаточной точностью, чтобы отвѣтить на всѣ вопросы, которые могутъ быть предложены практикой на разрѣшеніе теоріи случайныхъ ошибокъ.

Для того, чтобы подойти къ рѣшенію вопроса объ ошибкахъ полигона съ любымъ ($n$) числомъ

прямолинейныхъ частей, необходимо разсмотрѣть еще одинъ вопросъ относительно полигона вида ABCD, состоящаго изъ 3-хъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.

Зададимся цѣлью найти выраженіе ошибки $\perp$ нѣкоторому направленію, составляющему уголъ $\varepsilon$ съ направленіемъ AB (считая $\varepsilon$ по часовой стрѣлкѣ, начиная отъ AB).

Выраженіе это легко найти по указанному выше правилу, стоитъ лишь полигонъ ABCD спроэктировать на направленіе AM (данное—составляющее уголъ $\varepsilon$ съ AB) и вычислить ошибку для этого полигона.

Можно поступать и иначе. Замѣтимъ, что легко находятся ошибки $\perp$ линіи AB и линіи BC, назовемъ первую изъ нихъ черезъ $Rx$, вторую $Ry$. Разъ найдены эти ошибки легко найти искомую $\perp$ AM.

Элементарными разсужденіями не трудно показать, что искомая ошибка, назовемъ ее $R\varepsilon$, будетъ равна:

$$R^2\varepsilon = |Rx|^2 + |Ry|^2 - d\alpha^2 \cdot \operatorname{Sin} 2\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \eta_1 \xi_1$$

$\eta$ и $\xi$ суть проэкціи на оси $y$ и $x$ разстояній отъ точки D до любого полигоннаго пункта при условіи, что ось $0x \parallel$ AB и $0y \parallel$ BC.

Для полигоновъ разсматриваемаго вида $\Sigma\eta_1\xi_1$ находится очень легко, ибо для всѣхъ точекъ на AB всѣ $\eta_1$ равны между собой и $=$ BC, для всѣхъ точекъ на BC всѣ $\xi_1$ равны между собой и $=$ CD, для всѣхъ точекъ на CD всѣ произведенія $\eta_1\xi_1 = 0$.

$|Rx|$ и $|Ry|$ суть проэкціи $Rx$ и $Ry$ на направленіе

$\perp$ AM . т. е.

$$|Rx| = Rx\cos\varepsilon \text{ и } |Ry| = Ry \cdot \sin\varepsilon.$$

Опуская промежуточныя выкладки, дадимъ выраженіе $R\varepsilon^2$ въ зависимости отъ L, N, Z, $Z_1$ и $\varepsilon$ (всѣ обозначенія прежнія).

$$R_\varepsilon^2 = \frac{NL^2}{3} \cdot d\alpha^2 \cdot f(Z, Z_1, \varepsilon).$$

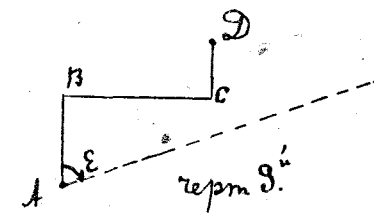
Назовемъ для краткости $\operatorname{cotg}\varepsilon$ черезъ $t$. Функція $f(Z, Z_1, \varepsilon)$ имѣетъ видъ:

$$f(Z, Z_1, \varepsilon) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1 + 3Z + 3Z^2t + 3(t-1)(Z_1^2t + Z_1)}{(1+Z^2)(1+Z)}$$

При измѣненіи $Z_1$ функція $f$ имѣетъ при заданномъ Z свой maximum и minimum одновременно съ выраженіемъ $3(t-1) \cdot (Z_1^2t + Z_1)$.

Если $t > 1$, то maximum этого выраженія при $Z_1$ maximum, т. е. $= Z$, и minimum при $Z_1$ minimum $= 0$.

Если $t < 1$, то maximum этого выраженія при $Z_1$ minimum, т. е. $= 0$, и minimum при $Z_1$ maximum $= Z$.

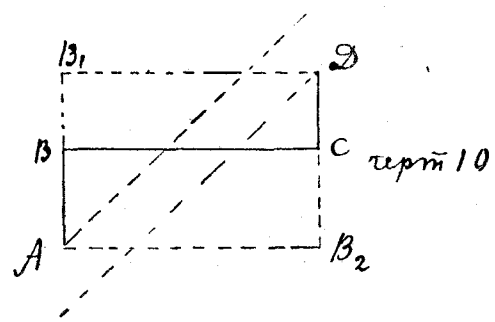



Это значитъ, что для всѣхъ направленій [1]) отъ 0 до 45 maximum $R\varepsilon$ будетъ равенъ аналогичной ошибкѣ полигона $AB_2D$, а minimum аналогичной ошибкѣ полигона $AB_1D$.

Для всѣхъ направленій отъ 45° до 90°, наоборотъ, minimum будетъ равенъ ошибкѣ полигона $AB_2D$ и maximum ошибкѣ полигона $AB_1D$.

Иначе это можно такъ сказать:

Если данъ полигонъ, состоящій изъ трехъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, и ищется погрѣшность $R\varepsilon$, $\perp$ направленію, составляющему уголъ $\varepsilon$ съ направленіемъ первой его прямолинейной части, то искомая ошибка $R\varepsilon l$ такого полигона будетъ менѣе аналогичной ошибки одного и болѣе ошибки другого полигоновъ, состоящихъ изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, и идущаго между тѣми же двумя точками (при одинаковой во всѣхъ случаяхъ длинѣ становъ). Изъ двухъ послѣднихъ полигоновъ $R\varepsilon$ будетъ у того больше, у котораго разстояніе точки перелома отъ линіи, проходящей черезъ начальную точку полигона $\parallel$ заданному направленію, будетъ больше].




[1]) Для насъ интересно разсмотрѣть только $\varepsilon$ между 0 и 90°.

Пусть теперь данъ полигонъ AB, требуется найти ошибку $\perp$ AB. (см. ч. стр. 13).

Согласно теоріи случайныхъ ошибокъ, для того, чтобы найти среднюю погрѣшность отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ, достаточно розыскать среднюю погрѣшность, производимую неправильностью измѣренія каждаго отдѣльнаго угла и взять геометрическую сумму найденныхъ среднихъ погрѣшностей.

Поставимъ себѣ задачей найти не саму среднюю погрѣшность $\perp$ AB, но лишь предѣлы, между которыми она заключается.

Разсматривая часть MNPB, видимъ согласно тому, что только сейчасъ разсмотрѣли, что отъ замѣны MNPB полигономъ MN′B и MM′B искомая погрѣшность въ одномъ случаѣ уменьшится, а въ другомъ увеличится.

Слѣдовательно отъ полигона съ $n$ частями мы перешли къ полигону, имѣющему $n-1$ прямолинейную часть. Отъ этого такъ же перейдемъ къ имѣющему $n-2$ части и т. д. пока не дойдемъ до имѣющаго всего двѣ части, который мы уже подробно разсмотрѣли.

Отсюда вытекаетъ такое правило:

Какой бы ни былъ заданъ полигонъ вида AB, пусть Z будетъ отношеніе суммы числа становъ во всѣхъ частяхъ ∥ одному господствующему направленію къ суммѣ числа становъ ∥ другому господствующему направленію, средняя погрѣшность $\perp$ линіи AB будетъ заключаться между величинами:

$$d\alpha \cdot \mathrm{L} \cdot \sqrt{\frac{N}{3}} \cdot \varphi_3(Z) \text{ и } d\alpha \mathrm{L} \sqrt{\frac{N}{3}} \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$$

гдѣ N общее число становъ во всемъ полигонѣ, L = AB, а функція $\varphi_3$ есть вышеразсмотрѣнная функція, обладающая тѣмъ свойствомъ, что при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ она $= \infty 1$.

Слѣдовательно, полагая искомую ошибку $= d\alpha \mathrm{L} \sqrt{\frac{N}{3}}$ мы опредѣляемъ ее съ точностью въ громадномъ большинствѣ случаевъ большек, чѣмъ до 10%.

Разсмотримъ теперь среднюю погрѣшность положенія точки B полигона AB.

Эту погрѣшность разобьемъ на 2 части.

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2$$

$R_1$ есть средняя погрѣшность положенія точки B зависящая отъ неправильности измѣренія угловъ отъ A до точки M, $R_2$ есть средняя погрѣшность зависящая отъ съемки въ части MNPB.

Возьмемъ полигонъ A...MM′B, котораго съемка до точки M тождественна со съемкой предыдущаго полигона, но часть MNPB замѣнена частью MM′B.

Для этого полигона также напишемъ:

$$R'^2 = R_1'^2 + R_2'^2$$

Здѣсь $R_1'$ погрѣшность точки B производимая ошибками угловъ съемки A...M, т. е. $R_1^1 = R_1$, а $R_2'$ погрѣшность точки B, накопившаяся за съемку MM′B.

Раньше было доказано, что $R_2' > R_2$, отсюда $R' > R$.

Отсюда вытекаетъ, что каково бы ни было число прямолинейныхъ частей полигона вида AB и каково ни было соотношеніе между числами сторонъ въ различныхъ прямолинейныхъ частяхъ, ошибка положенія точки будетъ меньше, чѣмъ

$$d\alpha \cdot \mathrm{L} \sqrt{\frac{N}{3}} \varphi_1(z)$$

гдѣ всѣ обозначенія прежнія, $Z < 1$.

Значенія $\varphi_1(Z)$ даны на стр. 5; при измѣненіи Z отъ 0 до 1, $\varphi_1(Z)$ измѣняется отъ 1 до 1,18 и до 1,12.

Что касается наименьшаго значенія R при любомъ заданномъ Z отношеніи числа становъ въ частяхъ, идущихъ ∥ одному, къ числу становъ въ частяхъ полигона идущихъ ∥ другому изъ двухъ господствующихъ въ полигонѣ направленій, то величина его приблизительно можетъ быть получена изъ того соображенія, что R всегда больше $R_\tau$, а минимальную величину $R_\tau$ можно легко получить согласно предыдущему.

Обратимся теперь къ величинѣ погрѣшности $dRl$.

Сначала разсмотримъ для полигона вида $\sqsubset$ ABCD ошибку $dR_\varepsilon$ для $\varepsilon > 90°$.

Величина погрѣшности $dR_\varepsilon$ для $\varepsilon$ отъ 90° до 180° имѣетъ такой же видъ, какъ и на стр. 11.

$$dR_\varepsilon^2 = |R_x|^2 + |R_x| - \sin 2\varepsilon \sum_{i=1}^{i=N} \eta i \, \xi i$$

Всѣ обозначенія совершенно тождественны предыдущимъ, sin 2ε — величина здѣсь отрицательная.

Выраженіе для $R_\varepsilon$ имѣетъ такой же, какъ и прежде видъ, а именно:

$$dR_\varepsilon^2 = \frac{NL^2}{3} d\alpha^2 \left[\frac{f(Z,t) + f_1(t, Z_1)}{(1+t^2)(1+Z)(1+Z^2)}\right]$$

Здѣсь $t = \operatorname{cotg} \varepsilon$

$$f_1(t, Z_1) = 3(t-1)\ (Z_1^2 t + Z_1)$$

$lR\varepsilon$ имѣетъ maximum и minimum при заданныхъ и Z въ зависимости отъ измѣненія $Z_1$ одновременно съ maximum и minimum выраженія $3(t-1)$ $Z_1^2 t + Z_1$).

Множитель $t-1$ отрицателенъ. При $Z > |tg\ \varepsilon|$ се выраженіе отрицательно и его maximum будетъ ри $Z_1 = 0$.

Если $Z > |tg\ \varepsilon|$, все выраженіе будетъ положительно, его maximum при $Z_1 = Z$.

И въ томъ и другомъ случаѣ мы приходимъ къ олигону, состоящему изъ двухъ прямолинейныхъ астей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.

Отсюда слѣдуетъ:

Если данъ полигонъ, состоящій изъ трехъ рямолинейныхъ частей, пересѣкающихся одъ прямыми углами, и ищется погрѣшность $\varepsilon$ $\perp$ направленію, составляющему уголъ $\varepsilon$ ъ направленіемъ первой его прямолинейной асти, то искомая ошибка $R\varepsilon$ будетъ менѣе налогичной ошибки полигона, состоящаго зъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣающихся подъ прямымъ угломъ, и именно ого изъ двухъ его видовъ, у котораго точка ерелома дальше отстоитъ отъ линіи, проодящей черезъ послѣднюю точку полигона заданному направленію.

Отсюда нетрудно видѣть слѣдующее:

Данъ полигонъ вида AMNPB (см. стр. 13). Найти ивысшій предѣлъ ошибки $dRl$ при заданномъ щемъ числѣ становъ N, разстояніи AB и отноэніи Z.

Замѣнивъ часть MNPB частью MM'B, мы полумъ полигонъ, у котораго ошибка вдоль AB больше мъ у прежняго, но видъ полученнаго полигона детъ болѣе простой. Полученный полигонъ можно мѣнить такимъ же точно образомъ полигономъ е болѣе простого вида и т. д., пока не дойдемъ полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ стей, ошибку коего мы знаемъ.

Такимъ образомъ искомый предѣлъ будетъ равенъ:

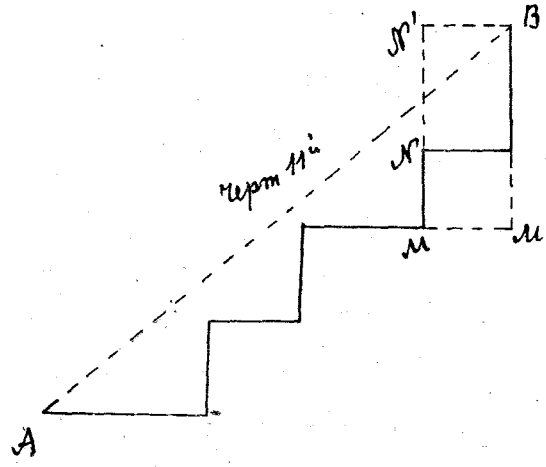
$$\max dR^{l^2} = \frac{L^2 N}{3} d\alpha^2 \cdot \varphi_2(Z)$$

Значенія $\varphi_2(Z)$ для Z отъ 0 до 1 даны на стр. 6.

Итакъ, каковъ бы ни былъ видъ разсматриваехъ полигоновъ, ошибка вдоль линіи полигона гда остается значительно меньше ошибки $\perp$ навленію полигона.

Кромѣ того можно еще указать и предѣльную минимальную величину ошибки $dRl$ для любого полигона, разсматриваемаго вида.

Для полигона, состоящагоизъ трехъ прямолинейныхъ частей, этотъ minimum равенъ ошибкѣ $dRl$ полигона ABCD, дѣлящаго пополамъ линію BC. см. черт. 12.




Этотъ полигонъ наиболѣе приближается по своему виду къ вытянутому. Его точки перелома B и C находятся на равномъ разстояніи отъ линіи AD.

Можно доказать, что для полигона, состоящаго изъ $n$ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямыми углами, minimum $dRl$ будетъ для такой его формы, которая наиболѣе походитъ на вытянутый полигонъ, т. е. всѣ точки переломовъ лежатъ на равномъ разстояніи отъ линіи, проходящей черезъ начальную и конечную точку.

Не трудно убѣдиться элементарными разсужденіями въ справедливости такого положенія.

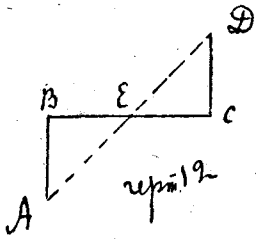



На прямой AB дана произвольная точка C. Раздѣлимъ CB на $n$ равныхъ частей, пусть $DB = \frac{1}{n}$ CB; раздѣлимъ AD на $n$ равныхъ частей, найдемъ точку $C_1$, гдѣ $AC_1 = \frac{1}{n}$ AD; раздѣлимъ $C_1B$ на $n$ равныхъ частей и т. д. Въ предѣлѣ вся прямая AB раздѣлится на $n+1$ равныхъ частей.

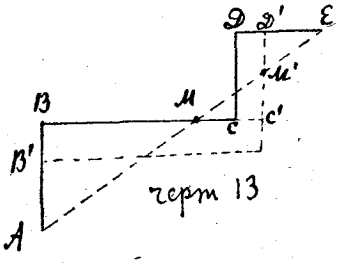
Докажемъ далѣе, что если высказанное выше утвержденіе о minimum'ѣ $dRl$ справедливо для полигона состоящаго изъ $n$ и меньшаго числа частей

то оно будетъ справедливо и для полигона, состоящаго изъ $n+1$ частей.

Мы не будемъ однако приводить этого доказательства полностью въ виду элементарности, замѣтимъ только, что оно приводитъ къ положенію о дѣленіи линіи AB въ предѣлѣ на $n$ равныхъ частей.




Напримѣръ для полигона вида ABCDE, состоящаго изъ четырехъ прямолинейныхъ частей, отъ замѣны части MCDE частью MC′D′E ошибка $dRl$ уменьшится. Отъ замѣны части M′C′BA частью M′C″B′A (M′ середина ME) ошибка еще уменьшится (M″ середина M′ A).




Продолжая постепенно замѣнять такимъ же образомъ, мы раздѣлимъ линію AE на 3 равныя части, т. е. придемъ къ полигону, наиболѣе приближающемуся къ вытянутому.

Если N будетъ общее число становъ, если полигонъ, приближающійся наиболѣе къ вытянутому, дѣлитъ прямую, соединяющую начало и конецъ съемки на $n$ равныхъ частей, то выраженіе для $dRl$ будетъ таково

$$dRl = \frac{1}{n} dR'l$$

Здѣсь $dR'l$ есть погрѣшность вдоль направленія полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, имѣющаго то же N и то же Z и идущаго между тѣми же двумя точками.

Выраженіе $dRl = \frac{1}{n} dR'l$ справедливо, какъ и всѣ предыдущія лишь при значительномъ числѣ N.

При значительномъ числѣ $n$ число становъ въ каждой изъ отдѣльныхъ частей можетъ сдѣлаться небольшимъ и формула будетъ неточна. Произойдетъ это потому, что мы положили сумму $1+2^2+3^2+\ldots+N^2$ равной $\frac{N^3}{3}$, а на самомъ дѣлѣ она $=\frac{N^2}{3}+\frac{N^3}{2}+\frac{N}{6}$.

Если принять во вниманіе еще членъ $\frac{N^2}{2}$, то и для сравнительно небольшаго числа становъ формула получается достаточно точной.

Напримѣръ для $N=3$ точное значеніе суммы квадратовъ отъ 1 до $N^2=1^2+2^2+3^2=14$, а вычисленное по формулѣ $\frac{N^2}{3}+\frac{N^3}{2}=13{,}5$, т. е. приближенная формула даетъ значеніе суммы до 4% опредѣляемой величины.

Если принять во вниманіе членъ порядка $\frac{N^2}{2}$, то выраженіе для $dRl$ для полигона, имѣющаго minimum $dRl$ получить такой видъ:

$$dRl = d\alpha^2 \varphi_2^2(Z) \frac{L^2N}{3n^2}\left(1+3\frac{n}{N}\right)$$

или:

$$dRl = \frac{1}{n} dRl' \cdot \sqrt{1+\frac{3n}{N}}$$

Все что ранѣе было сказано о накопленіи погрѣшностей въ рудничныхъ полигонахъ можетъ быть сведено къ слѣдующему.

Какой бы ни былъ данъ полигонъ, состоящій изъ болѣе или менѣе значительныхъ прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами, можно получить понятіе о величинѣ погрѣшностей $dR$, $dRl$ и $dR\tau$ накопившейся въ любомъ его пунктѣ, зная N, $d\alpha$, L и Z, т. е. число становъ, среднюю погрѣшность измѣренія одного угла теодолитомъ, длину линіи, соединяющей начальную точку съемки съ разсматриваемой и отношеніе длины проэкціи полигона на ось X къ длинѣ проэкціи на ось Y, причемъ: (назовемъ для краткости $F = Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}$ величину погрѣшности, опредѣляемой по формулѣ Іордана).

1) Ошибка $dR$ положенія.

Она заключаетъ между $\varphi_1(Z)\cdot F$ и $\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)\cdot F$

для $Z<1$, а для $Z>1$ между $\varphi_1\left(\frac{1}{Z}\right)F$ и $\varphi_3(Z)F$,

гдѣ всѣ значенія функцій $\varphi_1$ и $\varphi_3$ можемъ взять по таблицамъ. Взявъ $k=\frac{\varphi_1(Z)+\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)}{2}$ или $K=\frac{\varphi_1\left(\frac{1}{Z}\right)+\varphi_3(Z)}{2}$ и поло-

ивъ $dR = kF$, опредѣлимъ $dR$ съ точностью $^1/_2{}^0/_0$ отъ F.

Положивъ $dR = F$, сдѣлаемъ погрѣшность въ опредѣленіи $dR$ или $-19^0/_0$ или $+9^0/_0$ отъ F.

2) Ошибка $dR\tau$ поперечная.

Она заключается между $\varphi_3(Z)F$ и $\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ гдѣ значенія $\varphi_3$ можно взять изъ таблицъ.

Взявъ $k = \frac{\varphi_3(Z) + \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)}{2}$ и положивъ $dR\tau = kF$ ы опредѣлимъ $dR\tau$ съ точностью въ аименѣе благопріятномъ случаѣ до % отъ F.

Положивъ $dR\tau = F$, мы сдѣлаемъ погрѣшность въ опредѣленіи $dR\tau$ самое ольшее $+9\%$ или $--13^0/_0$ отъ F.

3) Ошибка $dRl$ вдоль господствующаго протяженія полигона.

Для этой ошибки можно дать предѣльную большую величину: $dRl$ max. $= \varphi_2(Z)$. гдѣ $\varphi_2(Z)$ найдемъ изъ таблицъ или ычислимъ по формулѣ $\varphi_2(Z) = \frac{Z}{Z_2 + 1}$.

Ошибка $dRl$ вообще говоря мала по равненію съ продольной ошибкой, на пившейся отъ погрѣшности измѣреія длинъ.

Такимъ образомъ для любого полиона для $dR$ и $dR\tau$ легко найти высшій и изшій и притомъ довольно тѣсные предѣлы. Для $dRl$ можно легко получить ысшій предѣлъ.

## Добавленія.

1) Къ стр. 2.

Погрѣшность $dRl$ точки $\parallel$ заданному направленію ть погрѣшность длины проэкціи полигона на занное направленіе. Такъ какъ длины становъ суть посредственно измѣренныя величины, то для нажденія $dRl$ надо составить сумму квадратовъ грѣшностей причиняемыхъ длинѣ проэкціи полина неправильностью измѣренія длины каждаго дѣльнаго стана и изъ полученной суммы извлечь адратный корень.

Очевидно далѣе, что погрѣшность, причиняемая инѣ проэкціи полигона на направленіе $\parallel$ заданму неправильностью измѣренія одного стана есть погрѣшность проэкціи на заданное направленіе длины самого стана, или, что все равно,—проэкція погрѣшности длины стана на заданнсе направленіе—отсюда уже съ очевидностью вытекаетъ справедливость положенія.

2) Къ стр. 3.

Возьмемъ полигонъ какого угодно вида и назовемъ $S_i$ длину какого нибудь стана, $\beta_i$ его азимутъ и $\alpha_i$ предшествующій стану полигонный уголъ.

Координаты $(Xn\ Yn)$ послѣдней точки полигона будутъ таковы:

$$x_n = x_0 + \sum_{i=h}^{i=1} Si \sin \alpha_i$$

$$y_n = y_0 + \sum_{i=n}^{i=1} Si \operatorname{Sin} \alpha_i$$

Здѣсь $x_0$ и $y_0$ координаты начальнаго пункта полигона.

Какъ извѣстно $\beta i = \beta i_{-1} + \alpha_i \pm 180° = \sum_{i=1}^{i=1} \alpha i \pm i\,180°$.

Пусть $\Delta Xn$ будетъ погрѣшность абсциссы $Xn$ и $\Delta Yn$ погрѣшность ординаты $Yn$ (и та и другая погрѣшности—зависящія только отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ).

Назовемъ $d\alpha i$ погрѣшность измѣренія угла $\alpha$ теодолитомъ, тогда будемъ имѣть:

$$(\Delta x_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \left[ \frac{d}{d\alpha i} \left( \sum_{i=n}^{i=1} Si \operatorname{Cos} \beta_i \right) . d\alpha_i \right]^2 \qquad (1)$$

$$(\Delta y_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \left( \frac{d}{d\alpha i} \left( \sum_{i-n}^{i-1} Si \operatorname{Sin} \beta_i \right) d\alpha_i \right)^2 \qquad (2)$$

Разсмотримъ сначала равенство (1). Его можно изобразить въ такомъ видѣ:

$$(\Delta x_n)^2 = \left[ \frac{d}{d\alpha_1} \left( \sum_{i=n}^{i=1} Si \operatorname{Cos} \beta i \right) \right]^2 d\alpha_1^2 +$$

$$+ \left[ \frac{d}{d\alpha_2} \left( \sum_{i=n}^{i=1} Si \cos \beta i \right) \right]^2 d\alpha_1^2 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \left[ \frac{d}{d\alpha_n} \left( \sum_{i=n}^{i=1} Si \cos \beta i \right) \right]^2 d\alpha_n^2 \qquad (3)$$

Разсмотримъ первый членъ равенства (1)

$$\frac{d}{d\alpha_1}\left(\sum_{i=n}^{i=1} Si\cos\beta i\right) = -\left(S_1 \operatorname{Sin}\beta_1 \cdot \frac{d\beta_1}{d\alpha_1} + S_2 \cdot \operatorname{Sin}\beta_2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} + S_3 \cdot \operatorname{Sin}\beta_3 \cdot \frac{d\beta_3}{d\alpha_1} + \cdot\cdot\cdot\cdot + S_n \operatorname{Sin}\beta_n \frac{d\beta_n}{d\alpha_1}\right) =$$

$$= -(S_1 \cdot \operatorname{Sin}\beta_1 + S_2 \operatorname{Sin}\beta_2 + S_3 \cdot \operatorname{Sin}\beta_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + S_n \operatorname{Sin}\beta) = -\sum_{i=n}^{i=1} S_i \operatorname{Sin}\beta i,$$

такъ какъ всѣ производныя $\frac{d\beta}{d\alpha_1}$ будутъ равны $= 1$.

Выраженіе $\sum_{i=n}^{i=1} Si \operatorname{Sin}\beta i$ есть разность ординатъ начальной и разсматриваемой точекъ полигона, обозначимъ эту разность черезъ $\eta_1$.

Если мы напишемъ въ развернутомъ видѣ $\frac{d}{d\alpha_2}\sum_{i=n}^{i=1} Si\cos\beta i$, то увидимъ, что $\frac{d\beta_1}{d\alpha_2} = 0$, а всѣ остальныя производныя $\frac{d\beta}{d\alpha_2}$ равны $= 1$, слѣдовательно выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ во второмъ членѣ равенства (3) преобразуется въ такое:

$$-\sum_{i=n}^{i=2} Si \operatorname{Sin}\alpha i$$

что есть равность ординатъ второй точки полигона и послѣдній, назовемъ эту разность $\eta_2$.

Для третьяго, четвертаго и т. д. членовъ нетрудно получить аналогичныя значенія.

Въ результатѣ получимъ:

$$(\Delta x_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \eta_i^2 d\alpha_i^2$$

Здѣсь $\eta i$ есть разность ординатъ точки $i$ и послѣдней точки полигона (вѣрнѣе разсматриваемой точки полигона).

Аналогично этому получится:

$$(\Delta y_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \xi_i^2 d\alpha_i^2$$

Здѣсь $\xi i$ есть разность абсциссъ $i$-й точки и послѣдней точекъ полигона.

Если мы вообразимъ себѣ полигонъ, у котораго вершины суть проэкціи вершинъ даннаго на ось абсциссъ, то очевидно величины $\xi$ будутъ соотвѣтственно одинаковы для того и другого полигоновъ.

Если мы вообразимъ себѣ полигонъ, у котораго вершины суть проэкціи вершинъ даннаго на ось ординатъ, то величины $\eta$ для этихъ двухъ полигоновъ будутъ соотвѣтственно равны.

Отсюда слѣдуетъ, что величина погрѣшности $\Delta X$ для даннаго полигона будетъ равна соотвѣтственной величинѣ для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть проэкціи вершинъ даннаго на ось ординатъ; величина погрѣшности $\Delta y$ для даннаго полигона будетъ равна соотвѣтственной величинѣ для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть проэкціи вершинъ даннаго на ось абсциссъ.

При этомъ предполагается, что погрѣшности $d\alpha$ для даннаго и спроэктированнаго полигона будутъ соотвѣтственно одинаковы.

Предположимъ теперь, что намъ надо найти погрѣшность точки полигона $\parallel$ какому нибудь заданному направленію.

Повернемъ координатныя оси такимъ образомъ, чтобы направленіе одной изъ нихъ (скажемъ $OX$) совпало съ заданнымъ направленіемъ; тогда можемъ формулированныя только что слѣдствія распространить и на данный случай, замѣтивъ, что $\Delta y$ и будетъ искомой погрѣшностью.

Отсюда и слѣдуетъ, что величина погрѣшности точки въ какомъ нибудь направленіи для любого полигона равна соотвѣтственной величинѣ погрѣшности для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть проэкціи вершинъ даннаго полигона на направленіе, перпендикулярное данному (предполагая $d\alpha$ соотвѣтственно одинаковы для обоихъ полигоновъ).

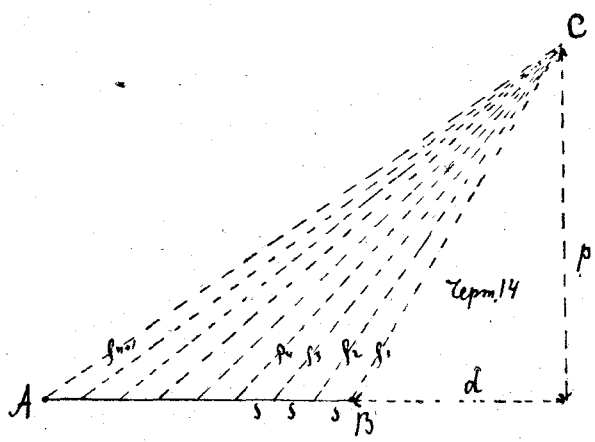
Къ стр. 3.

Для доказательства этого положенія замѣтимъ, что

$$dr^2 = \Sigma\rho^2 d\alpha^2$$

гдѣ $\rho$ есть разстояніе любой точки полигона до той точки, погрѣшность которой ищется.

На чертежѣ линія AB представляетъ данную прямолинейную часть полигона, значеніе остальныхъ обозначеній объяснено выше.




Если длины становъ въ части AB примѣрно динаковы, то $d\alpha$ можно вынести за знакъ $\Sigma$, остается найти $\Sigma\rho^2$.

Имѣемъ:

$$\rho_1^2 = p^2 + d^2$$

$$\rho_2^2 = p^2 + (d+s)^2 = p^2 + d^2 + s^2 + 2ds$$

$$\rho_3^2 = p^2 + (d+2s)^2 = p^2 + d^2 + 2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot d \cdot 2s$$

$$\rho_4 = p^2 + (d+3s)^2 = p^2 + d^2 + 3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot d \cdot 3s$$

. . . . . .

$$\rho_{n+1}^2 = p^2 + (d+ns)^2 = p^2 + d^2 + n^2 s^2 + 2 \cdot d \cdot ns$$

$$\Sigma\rho^2 = (1+n) \cdot (p^2 + d^2) + s^2 \Sigma 1^2, 2^2, 3^2, \ldots \ldots n^2 + 2ds \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Принимая $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$, и $\frac{(n+1)\,n}{2} = \infty \frac{n^2}{2}$ и опуская 1 въ $1+n$, получимъ

$$\Sigma\rho^2 = n\,(p^2 + d^2) + \frac{n^3}{3} s^2 + dsn^2$$

Къ стр. 4.

Повѣркой должно служить равенство:

$$dR^2 = dR_\tau^2 + dR_l^2$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$dR_\tau^2 = \frac{s d\alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \left( \frac{n_1^5}{3} + \frac{n_2^5}{3} + n_1\, n_2^4 + n_2^2\, n_1^3 \right)$$

$$dR_l^2 = \frac{s^2 d\alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \left( \frac{n_1^3\, n_2^2}{3} + \frac{n_2^3\, n_1^2}{3} \right)$$

$$dR_\tau^2 + dR_l^2 = \frac{s^2 d\alpha^2}{3\left(n_1^2 + n_2^2\right)} \left( n_1^5 + 4\, n_1^3\, n_2^2 + n_1^2 n_2^3 + 3 n_1\, n_2^4 + n_2^5 \right) = \frac{s^2}{3} \cdot \frac{d\alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot (n_1^2 + n_2^2)\ (n_1^3 + n_3^2 + 3\, n_1\, n_2^2) = \frac{s^2 d\alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot \left( \frac{n_1^3}{3} + \frac{n_3^2}{3} + n_1\, n_2^2 \right)$$

что и требовалось показать

Къ стр. 13.

Въ самомъ дѣлѣ, по способу построенія.

$$DB = \frac{AB - AC}{n}$$

Раздѣляя теперь линію AD, которая очевидно $= AB - DB$, на $n$ равныхъ частей, получимъ:

$$AC_1 = \frac{1}{n} AD = \frac{AB}{n} - \frac{AB - AC}{n^2}$$

Раздѣляя теперь линію $C_1 B$, которыя $= AB - AC_1$, на $n$ равныхъ частей, найдемъ $D_1 B$.

$$D_1 B = \frac{1}{n} C_1 B = \frac{AB - AC_1}{n} = \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB - AC}{n^3}$$

Такимъ же образомъ найдемъ при слѣдующемъ дѣленіи:

$$AC_2 = \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB}{n^3} - \frac{AB - AC}{n^4}$$

Въ предѣлѣ:

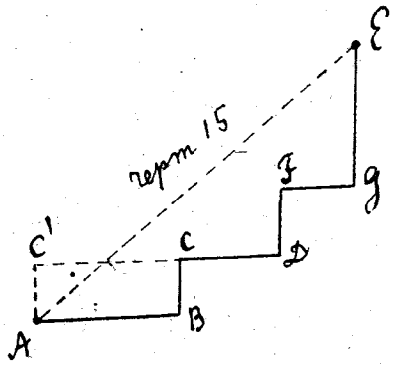
$$\left( \frac{AC_k}{k=\infty} \right) = \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB}{n^3} - \frac{AB}{n^4} \ldots\ldots = AB \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} \cdots \right) = \frac{AB}{n+1}$$

Къ стр. 14.

Въ общемъ видѣ это предложеніе доказывается такъ же.

Пусть данъ полигонъ заключенный между точками A и E (стр. 18). Пусть точка M лежитъ на линіи AE. По допущенію теорема справедлива для полигоновъ заключенныхъ между точками A и M, а также между точками M и B.

Пусть теперь M′ первая отъ A точка дѣленія линіи AE. По допущенію теорема справедлива для




полигона заключеннаго между точками M′ и E и мы получаемъ то первое раздѣленіе линіи, которое аналогично раздѣленію CB на $n$ равныхъ частей въ предыдущей выноскѣ.

Пусть $M_2$ теперь ближайшая къ AE точка дѣленія. По допущенію теорема справедлива для полигона между точками $M_2$ и A; получимъ второе раздѣленіе линіи, аналогичное дѣленію AD на $n$ равныхъ частей въ предыдущей выноскѣ такъ же получимъ третье, четвертое и т. д. раздѣленія, пока вся линія AE не раздѣлится на $n+1$ равную часть.

Замѣчаніе 1-ое. Приведенное доказательство имѣетъ строгій смыслъ только для безконечно большаго числа становъ въ полигонѣ. Практически же нѣтъ смысла продолжать дѣленіе до безконечности, ибо рядъ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \cdot \cdot \cdot$ есть весьма быстро сходящійся.

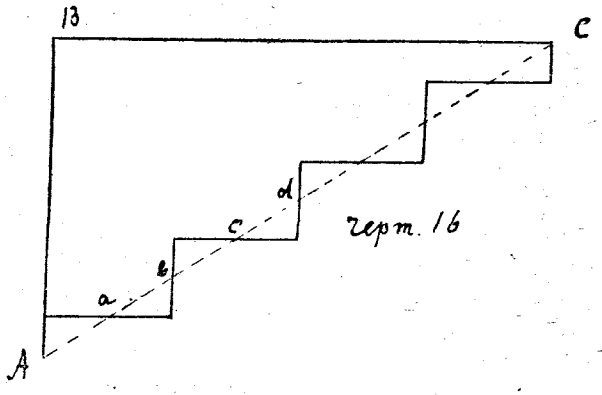
Замѣчаніе 2-ое. Возможны такіе полигоны, которые не пересѣкутъ линію AE. Напримѣръ полигонъ вида (см. черт. 18).

AB CDFGE

Но согласно положенію, доказанному на стр. 11. погрѣшность $dRl$ отъ замѣны части ABC полигономъ AC′C уменьшается, а такъ какъ мы разыскиваемъ minimum $dRl$ для нашего полигона, почему и можемъ произвести такую замѣну, то тогда необходимая намъ точка пересѣченія съ линіей AE получается.

Къ стр. 14.

Для доказательства этого равенства возьмемъ полигонъ ABC и предположимъ, что полигонъ, идущій отъ A къ C дѣлитъ AC на $n$ равныхъ частей. Длины становъ во всѣхъ полигонахъ одинаковы.




Тогда будемъ имѣть:

$$(dR'l)^2 \text{ для ABC} = \frac{L^2 d\alpha^2}{3} \cdot N\varphi_2^2 \text{ (Z) см. стр. 4.}$$

Здѣсь $L = AC$, N общее число становъ въ полигонѣ A . . . E остальныя обозначенія см. стр. 4.

Для полигона A$a$ получимъ, замѣнивъ L черезъ

$$\frac{L}{n} \text{ и N черезъ } \frac{N}{n}$$

$$(dRl_n)^2 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{d\alpha^2}{n} \cdot \frac{N}{n} \cdot \varphi^2(Z) = \frac{1}{n^3}(dR^1 l)^2$$

Для полигона $ab$ выраженіе для продольной погрѣшности будетъ также равно $dRl_n$, для $bc$, $cd$ и т. д. тому же $dRl_n$, для всего полигона A$bcd$ . . . $\varepsilon$ получимъ:

$$dR_\varepsilon^2 = n(dRl_n)^2 = \frac{1}{n}(dR^1 l)^2.$$

Къ стр. 15.

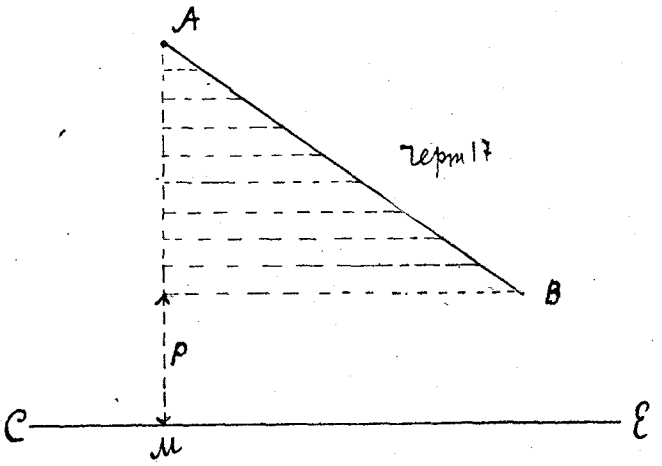
Предѣлами погрѣшности $dRl$ для любого полигона служатъ съ одной стороны $\varphi_2(Z) \cdot F$, а съ другой стороны $\frac{1}{n}\varphi_2(Z) \cdot F$.

Эти предѣлы могутъ оказаться весьма широкими ибо со стороны minimum'а мы величину $dRl$ имѣемъ не достаточно ограниченной.

Слѣдующее разсужденіе можетъ помочь установить болѣе тѣсные предѣлы для $dRl$ въ различныхъ случаяхъ практики.

Для этого разсмотримъ первоначально такой вопросъ: полигонъ AB, имѣющій N примѣрно одина-

ковыхъ становъ составляетъ часть полигона опредѣляющаго точку Е. Найти погрѣшность точки Е ∥ линіи СЕ, зависящую отъ неправильности измѣ-




ренія угловъ въ части АВ. Спроэктировавъ часть АВ на АМ ⊥ СЕ и назвавъ черезъ $s$ проэкцію длины стана на направленіе АМ, черезъ $\rho$ разстояніе точки В до линіи СЕ и предполагая $d\alpha$ одинаковыми между собою, найдемъ искомое $d\mathrm{R}l$

$$d\mathrm{R}_1^2 = d\alpha^2\left[p^2+(p+s)^2+(p^2+2s)^2+\cdots+(p+\right.$$
$$\left.+\mathrm{N}s)^2\right] = d\alpha^2\left[\mathrm{N}p^2+\frac{\mathrm{N}^3}{3}\ \mathrm{S}^2+\mathrm{N}^2ps\right]$$

Если АВ пересѣкаетъ СЕ, располагаясь такъ, что по одной сторонѣ имѣемъ $n_1$, а по другой $n_2$ становъ, то выраженіе для $d\mathrm{R}l$ будетъ таково

$$d\mathrm{R}_1^2 = d\alpha^2 s^2\left[\frac{n_1^3}{3}+\frac{n_1^2}{2}+\frac{n_1}{6}+\frac{n_2^2}{3}+\frac{n_2^2}{2}+\frac{n_2}{6}\right]$$

Здѣсь вмѣсто приближенной формулы:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{3}{3}$$

введено точное значеніе формулы:

Такъ какъ общее число становъ въ полигонѣ равно N, то $n_2 = \mathrm{N} - n_1$

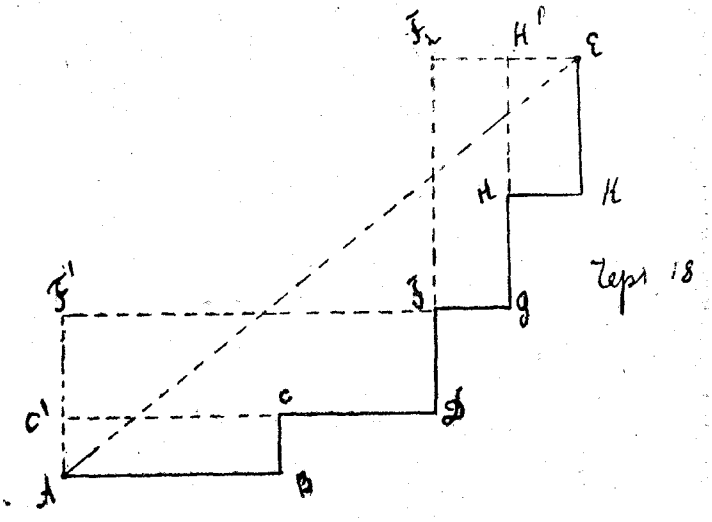
Замѣнивъ этимъ выраженіемъ $n_2$, получимъ:

$$d\mathrm{R}_1^2 = d\alpha^2 s^2\left[\frac{n_1^3}{3}+\frac{n_1^2}{2}+\frac{n_1}{6}+\frac{\mathrm{N}^3-3\mathrm{N}^2n_1+3\mathrm{N}n_1^2-n_1^3}{3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{N}^2-2\mathrm{N}n_1+n_1^2}{2}+\frac{\mathrm{N}-n_1}{6}\right] = d\alpha^2\cdot s^2\left[\frac{\mathrm{N}^3}{3}+\frac{\mathrm{N}^2}{2}+\frac{\mathrm{N}}{6}-\right.$$
$$\left.-\mathrm{N}^2n_1+\mathrm{N}n_1^2-\mathrm{N}n_1+n_1^2\right] = d\alpha^2 s^2\left[\frac{\mathrm{N}^3}{3}+\frac{\mathrm{N}^2}{2}+\frac{\mathrm{N}}{6}+\right.$$
$$\left.+(\mathrm{N}+1)\ (n_1^2-\mathrm{N}n_1)\right].$$

Выраженіе $d\mathrm{R}l$ при измѣненіи $n_1$ принимаетъ minimum одновременно съ выраженіемъ $n_1^2-\mathrm{N}n_1$, т. е. при $n_1 = \frac{\mathrm{N}}{2}$.

Отсюда слѣдуетъ:

При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ полигона АВ ∥ самому себѣ наименьшее значеніе $d\mathrm{R}l$ будетъ тогда, когда СЕ раздѣлитъ АВ пополамъ. Или:




При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ АВ ∥ самому себѣ $d\mathrm{R}l$ уменьшается, если разстоя-

ніе средины AB отъ CE уменьшается и на оборотъ.

Пользуясь этимъ можно въ каждомъ данномъ случаѣ преобразовать данный полигонъ съ цѣлью получить болѣе тѣсныя границы значенія $dRl$ со стороны minimum'а, напримѣръ:

Данъ полигонъ, состоящій изъ 8 частей. По стр. 14, minimum его $dRl$ равенъ $= \frac{1}{7}\ \varphi_2(Z)\ .\ F.$

Но пользуясь только что сейчасъ доказаннымъ положеніемъ, можно часть ABC замѣнить черезъ AC′C; ибо при этомъ середины AB и BC приближаются къ AE.

На томъ же основаніи часть C′DF замѣнимъ частью C′F″F, часть HKE частью HH′ε и часть $Fg\varepsilon$, частью $FF_2E$.

Вмѣсто даннаго получился полигонъ $AF'FF_2E$, у котораго $dRl$ менѣе даннаго. Слѣдовательно minimum $dRl$ для даннаго будетъ не $\frac{1}{7}\ \varphi_2(Z)F$, а $\frac{1}{3}\ \varphi_2(Z)F$.