15. Гиперболическая система.

Е. С. Федорова.

(доложено 19 марта 1912 г.).

Выводъ этой системы напрашивается самъ собою при изложеніи построеній коллинеарныхъ въ перспективномъ положеніи.

Въ самомъ дѣлѣ, для такихъ построеній мы имѣемъ въ качествѣ центра коллинеаціи и перспективы нѣкоторую точку Z, въ качествѣ оси коллинеаціи и перспективы нѣкоторую прямую ab', а прямая параллельная послѣдней и находящаяся посерединѣ между Z и ab' есть ось инволюціи, точкамъ которой въ коллинеаціи гомологичны точки безконечно-удаленныя (фиг. на стр. 147).

На каждомъ лучѣ изъ Z, проходящемъ чрезъ любую точку системы, гомологична четвертая гармоническая, принимая за пару двойныхъ точекъ точку Z и точку пересѣченія луча съ осью коллинеаціи.

Преобразованіе точекъ, основанное на такихъ построеніяхъ, есть настоящее коллинеарное преобразованіе, и, въ частности, всякая прямая такимъ образомъ преобразуется также въ прямую. Но инволюція проявляется въ двухъ видахъ, и тотъ видъ инволюціи на лучахъ изъ Z, который приводитъ къ этимъ построеніямъ, есть видъ, опредѣляемый двумя вещественными двойными точками (гиперболическій по Штейнеру). Очевидно, мы также получимъ двѣ гомологическія системы точекъ, если при томъ же, во всемъ остальномъ, построеніи примемъ тѣ же двойныя точки не за вещественныя, а за мнимыя. Тогда инволюція на лучахъ будетъ 2-го вида (эллиптическая по Штейнеру), и гармоническія отношенія также станутъ 2-го вида, а для такого измѣненія нужно только полученную четвертую гармоническую замѣнить другою точкою на томъ же лучѣ, на томъ же разстояніи отъ центра инволюціи (точки пересѣченія луча съ осью инволюціи), но съ противоположной стороны.

Гомологичность точекъ двухъ такихъ системъ, при сохраненіи ихъ перспективнаго положенія и положенія инволюціи, очевидна, такъ какъ дѣйствительно каждой точкѣ одной системы будетъ перспективно соотвѣтствовать одна единственная точка на томъ же лучѣ.

Однако, всѣмъ точкамъ оси перспективы, то есть прямой ab, въ этой гомологичности соотвѣтствуетъ одна единственная точка Z, подобно тому, какъ при преобразованіи обратными радіусами всѣмъ безконечно-удаленнымъ точкамъ гомологична одна и таже точка—центръ круга преобразованія.

Именно на основаніи послѣдняго заключаемъ, что прямой, при этомъ новомъ построеніи, будетъ гомологична (хотя конечно и линейная прима точекъ новой системы) не прямая, а кривая 2-го порядка, потому что всякая прямая обязательно пересѣкаетъ всякую другую прямую на плоскости; слѣдовательно и ось перспективы ab, то есть гомологичная ей прима точекъ, кромѣ двухъ перемѣнныхъ точекъ, которыя мы можемъ взять произвольно для ея опредѣленія, содержитъ еще точку Z, а на каждомъ лучѣ черезъ Z кромѣ точки, гомологичной перемѣнной точкѣ данной прямой, будетъ находиться еще точка Z, принадлежащая кривой, полученной отъ преобразованія прямой; но достаточно, чтобы одинъ лучъ пересѣкалъ эту кривую въ двухъ точкахъ, чтобы вывести, что эта кривая не ниже второго порядка. Съ другой стороны, никакая прямая не можетъ пересѣчь этой кривой больше чѣмъ въ двухъ точкахъ, такъ какъ мы всегда можемъ произвести обыкновенное коллинеарное преобразованіе, принявъ центръ перспективы и коллинеаціи на послѣдней прямой, и тогда кривая преобразуется въ кривую того же порядка, а прямая въ прямую, и притомъ именно въ лучъ перспективнаго преобразованія, который такую кривую можетъ пересѣчь не болѣе чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Даже не трудно видѣть, что эта кривая вто-

рого порядка—линейная прима новой системы—есть именно гипербола, то есть содержитъ въ себѣ двѣ безконечно-удаленныя точки. Изъ этихъ точекъ одна есть i', гомологичная точкѣ i пересѣченія данной прямой съ осью инволюціи, а другая—b' есть точка, гомологичная точкѣ b пересѣченія той же прямой съ обратною осью перспективы (то есть прямою, параллельною оси ab, но проходящею чрезъ центръ Z).

Отсюда заключаемъ, что въ гиперболѣ, полученной отъ преобразованія данной прямой ab, ассимптоты параллельны лучамъ Zi' и Zb', а слѣдовательно главныя оси гиперболы параллельны биссектрисамъ этихъ лучей.

Между этою гиперболою и прямою, изъ которой она преобразована, существуетъ рядъ весьма замѣчательныхъ соотношеній.

Прежде всего замѣчу, что прямая aZ есть касательная къ гиперболѣ. Въ самомъ дѣлѣ, гипербола пересѣкается всякимъ лучомъ изъ Z въ двухъ точкахъ, изъ которыхъ одна, то есть Z, постоянна, и всякой точкѣ гиперболы перемѣннаго положенія гомологична нѣкоторая точка прямой на томъ же лучѣ; эти двѣ точки совпадаютъ въ одну только тогда, когда мы перемѣнной точкѣ придадимъ положеніе, совпадающее съ точкою Z, которой можетъ быть гомологична только точка на оси перспективы ab'; но такъ какъ въ этомъ предѣльномъ случаѣ перемѣнной точкѣ должна быть гомологична и точка на данной прямой, то значитъ въ случаѣ касанья въ точкѣ Z гиперболы этимъ двумъ совпавшимъ точкамъ можетъ быть гомологична только точка a пересѣченія данной прямой съ осью перспективы.

Если-бы мы подвергли данную прямую обыкновенному коллинеарному преобразованію при томъ же центрѣ Z и при той же оси перспективы, то, какъ извѣстно [1]), мы получили бы прямую ac, гдѣ c есть точка, обратная точкѣ b (то есть равны отрѣзки bZ и Zc на обратной оси перспективы).

Но по самому существу обоихъ сдѣланныхъ преобразованій есть случай, когда они даютъ одинъ и тотъ же результатъ, а именно, когда преобразованію подвергаются двѣ гармонически-сопряженныя точки i и безконечно-удаленная на данной прямой; ясно, слѣдовательно, что въ результатѣ мы получимъ пару точекъ пересѣченія гиперболы съ прямою ac, а именно точки k и безконечно-удаленную точку i'; слѣдовательно, гипербола проходитъ и черезъ эти двѣ точки, причемъ точка k на оси инволюціи опредѣляется какъ четвертая вершина параллелограмма, имѣющаго остальными тремя вершинами точки i, b и Z.

Итакъ, мы имѣемъ, что по отношенію къ гиперболѣ точкѣ a сопряжены и точка Z, и точка c, а слѣдовательно Zc, а значитъ также bc есть поляра точки a. Но точкѣ c сопряжена также точка b, потомучто $bZ = Zc$, а точки Z и безконечно-удаленная на той же прямой принадлежатъ гиперболѣ.

Отсюда замѣчаемъ, что трехугольникъ abc есть трехугольникъ полярный по отношенію къ гиперболѣ, то есть всѣ его вершины есть полюсы противолежащихъ сторонъ. Если же bc есть поляра точки a, то значитъ ab', параллельная bc, есть одна изъ двухъ ассимптотъ гиперболы, потому что точка Z и безконечно-удаленная b' есть точки касанія къ прямымъ, проведенныя изъ a. Слѣдовательно, центръ гиперболы находится на прямой ab'.

На основаніи такихъ же соображеній найдемъ, что касательная къ гиперболѣ въ точкѣ k пройдетъ чрезъ точку b, а прямая bi' есть другая ассимптота гиперболы, а потому точка C пересѣченія ab' и bi' и есть центръ гиперболы; этотъ центръ, слѣдовательно, есть четвертая вершина параллелограмма, три остальныя вершины котораго есть точки a, c и b то есть вершины полярнаго трехугольника.

Мы такимъ образомъ пришли къ новой системѣ точекъ на плоскости, въ которой линейными примами являются гиперболы, почему систему цѣлесообразно назвать г и п е р б о л и ч е с к о ю.

Но такъ какъ линейная прима опредѣляется двумя данными, а гипербола пятью, то значитъ въ этой системѣ должны имѣть мѣсто три постоянные параметра, которые являются необходимыми условіями для построенія всякой линейной примы.

Впрочемъ, эти условія были уже нами выяснены при ходѣ вышеизложеннаго изслѣдованія.

Первое изъ нихъ то, что линейная прима должна проходить чрезъ постоянную точку Z.

Второе есть то, что она же должна проходить чрезъ постоянную точку b', находящуюся на оси перспективы, и притомъ безконечно-удаленную.

Наконецъ, третья условіе есть то, что въ послѣдней точкѣ гипербола должна быть касательна прямой ab', то есть оси перспективы.

Вообще каждая прямая преобразуется въ гиперболу, и только прямыя, проходящія чрезъ центръ перспективы Z, преобразуются въ прямыя же, которыя есть спеціальныя гиперболы, удовлетворяющія всѣмъ поставленнымъ условіямъ. Но одна такая прямая, очевидно, всѣмъ этимъ условіямъ не удовлетворяетъ, а съ другой стороны точкѣ Z такой прямой должны быть гомологичны всѣ точки прямой ab'.

---

[1]) Новая геометрія какъ основа черченія, стр. 14.

Отсюда слѣдуетъ, что такая прямая преобра-ся въ двѣ прямыя, а именно одну, уже упомя-ую, а другая прямая есть ab'. Въ особомъ част-ъ случаѣ, когда данная прямая есть ось инво-ціи ib', гомологичная спеціальная гипербола со-итъ изъ безконечно удаленной прямой съ при-иненіемъ отдѣльной точки Z; послѣдней потому, въ составъ данной прямой входитъ и точка b', орая принадлежитъ также и прямой ab', а каж-точкѣ этой прямой гомологична точка Z.

Наконецъ, если данная прямая есть ab', то го-огичная ей спеціальная гипербола редуцируется пару точекъ Z и b'; первая изъ нихъ гомоло-на всѣмъ вообще точкамъ этой прямой, а по-дняя, какъ принадлежащая также оси инволюціи гомологична сама себѣ, такъ какъ каждой точкѣ й прямой гомологична точка безконечно-уда-нная. Всѣ остальныя параллельныя ей прямыя ообразуются въ параллельныя же имъ прямыя присоединеніемъ отдѣльной точки Z.

Если каждой прямой въ этой системѣ гомоло-на гипербола, то совокупности всѣхъ прямыхъ плоскости должна быть гомологична линейная сунда гиперболъ, но не общаго характера, а только спе-альная секунда, ограниченная извѣстными усло-ми; но совокупность гиперболъ, ограниченная емя (извѣстными уже намъ) условіями, и есть се-нда, потому что полная совокупность есть квинта.

Мы изъ гомологичности заключаемъ уже о томъ, о, ограниченная выясненными условіями, совокуп-сть гиперболъ есть именно линейная секунда. Но другой стороны всякая линейная секунда коно-имъ опредѣляется двумя кривыми: кривою третьяго рядка Якоби, состоящей изъ полной совокупности пряженныхъ паръ точекъ по отношенію ко всѣмъ ко-примамъ секунды и кривою третьяго класса Келлэ, стоящей изъ полной совокупности всѣхъ сопря-енныхъ паръ лучей по отношенію ко всѣмъ коно-римамъ лучей, составляющимъ линейную секунду, ррелятивную (полярную) линейной секундѣ коно-римъ точекъ. Такъ какъ въ данномъ случаѣ, мы зсматриваемъ только послѣднюю секунду, то намъ епосредственно нуженъ только выводъ кривой коби.

Раньше [1]) было отмѣчено, что въ случаѣ при-утствія хоть одной единственной плоскости сим-етріи линейной секунды, сами секунды, въ част-ости и характеризующія ихъ кривыя, становятся пеціальными. Въ этомъ случаѣ секунда, а вмѣстѣ ъ тѣмъ и кривая Якоби спеціальна еще въ боль-шей степени, хотя изъ элементовъ симметріи, какъ непосредственно ясно по заданію, имѣется только плоскость симметріи, проходящая чрезъ центръ Z и перпендикулярная къ оси ab'.

Въ самомъ дѣлѣ, на обратной оси перспективы мы имѣемъ инволюцію съ двумя вещественными двойными точками: Z и безконечно-удаленною b; слѣдовательно, во всякой гиперболѣ этой секунды каждая пара симметричныхъ точекъ (какъ b и c) есть пара точекъ сопряженныхъ относительно всѣхъ кривыхъ этой линейной секунды. Какъ полная совокупность такихъ паръ сопряженныхъ точекъ, кривая Якоби и сводится въ данномъ случаѣ къ этой прямой. Такимъ образомъ, и съ точки зрѣнія этого критерія мы имѣемъ линейную секунду, хотя и весьма спеціальнаго вида.

Наконецъ, для каждаго вида инволюціи двухъ системъ точекъ на плоскости характерно геометрическое мѣсто самогомологичныхъ точекъ, но такъ какъ въ данномъ случаѣ на всѣхъ лучахъ мы имѣемъ инволюцію съ мнимыми двойными точками, то ясно, что вещественныхъ самогомологичныхъ точекъ здѣсь не имѣется. Но какъ въ обыкновенной перспективной коллинеаціи мы имѣемъ въ качествѣ совокупности вещественныхъ самогомологичныхъ точекъ спеціальную кривую 2-го порядка въ видѣ оси перспективы и центра перспективы какъ отдѣльной точки, такъ въ данномъ случаѣ то же геометрическое мѣсто есть полная совокупность мнимыхъ двойныхъ точекъ.

Отъ приведенныхъ построеній на плоскости легко перейти къ соотвѣтственнымъ построеніямъ въ пространствѣ, то есть вывести преобразованіе любой плоскости при условіи принятія на лучахъ изъ центра перспективы, какъ этого центра, такъ и точки пересѣченія луча съ плоскостью перспективы за мнимыя двойныя точки инволюціи на данномъ лучѣ.

Въ самомъ дѣлѣ въ произвольной плоскости, проходящей чрезъ центръ Z, мы имѣли бы пересѣченіе данной плоскости въ видѣ прямой ab, которую пришлось бы уже подвергнуть преобразованію въ предѣлахъ взятой плоскости.

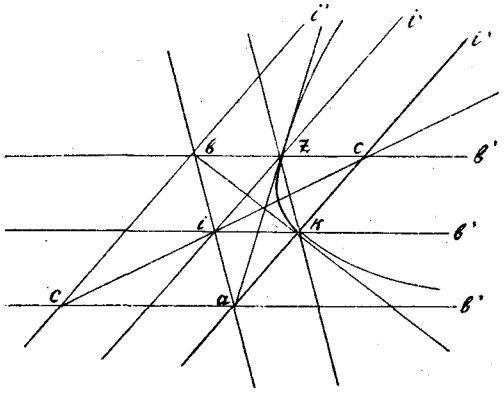
Пусть данная плоскость въ перпендикулярномъ разрѣзѣ есть прямая ab, а въ пересѣченіи съ плоскостью перспективы есть прямая aa_1. Тогда легко вывести результаты преобразованія, если послѣдовательно произведемъ такое преобразованіе въ плоскостяхъ, проходящихъ чрезъ общую прямую, опредѣляемую точкою Z и параллельностью съ aa_1.

Ясно, что изъ точки Z послѣ всѣхъ преобразованій получимъ плоскость перспективности, и на-

[1]) Эти Записки III 331.

оборотъ, каждая точка послѣдней плоскости послѣ преобразованія дастъ точку Z.

Плоскость инволюціи преобразуется такъ же, какъ при обыкновенной коллинеаціи, то есть въ совокупность безконечно-удаленныхъ точекъ, или иначе, въ безконечно-удаленную плоскость. Но, въ частности, безконечно-удаленныя ея точки, какъ одновременно принадлежащія и плоскости перспективности, преобразуются въ точку Z, и значитъ плоскость инволюціи преобразуется въ безконечно-удаленную плоскость и еще отдѣльную точку Z (спеціальный шаръ).



Наконецъ, обратная плоскость перспективы, то есть плоскость Z. $b.b_1$ преобразуется сама въ себя, какъ и всѣ плоскости, проходящія чрезъ центръ Z; а всѣ вообще плоскости, параллельныя плоскости перспективы, преобразуются въ плоскости, параллельныя ей же со включеніемъ отдѣльной точки Z.

Если мы преобразованіе каждой данной плоскости сведемъ къ преобразованію прямыхъ, параллельныхъ плоскости перспективы, то въ результатѣ для каждой такой прямой получимъ параллельную же прямую; но такъ какъ каждой такой прямой принадлежитъ и одна точка (безконечно удаленная) плоскости перспективы, то въ результатѣ преобразованія кромѣ прямой въ проектирующей плоскости (значитъ въ сѣченіи его поверхности преобразованія изъ плоскости) будетъ находиться еще отдѣльная точка Z.

Безконечно-удаленною плоскостью искомая поверхность пересѣчется въ двухъ прямыхъ, изъ которыхъ одна находится въ проектирующей плоскости чрезъ ii_1, а другая въ проектирующей плоскости чрезъ bb_1 (то есть обратной плоскости перспективы); а такъ какъ эта поверхность есть поверхность 2-го порядка, то ясно, что она есть параболическій гиперболоидъ и значитъ при данномъ преобразованіи всякая плоскость вообще преобразуется въ параболическій гиперболоидъ, непремѣнно проходящій чрезъ центръ Z, а также чрезъ безконечно-удаленную прямую плоскости перспективности.

Каждый параболическій гиперболоидъ, удовлетворяющій этимъ условіямъ, есть линейная секунда гиперболической системы, такъ какъ безконечно-удаленная (какъ и всякая прямая) опредѣляется двумя точками; слѣдовательно линейныя секунды ея имѣютъ три параметра (безконечно-удаленную прямую и точку Z), а кривая поверхность вообще опредѣляется шестью параметрами (напр. точками) и значитъ если будутъ даны еще только три точки этой поверхности, то она опредѣлена вполнѣ и однозначно.

Какъ извѣстно, чрезъ каждую точку этой поверхности проходятъ двѣ сопряженныя прямыя поверхности, которыя опредѣляютъ касательную плоскость въ этой точкѣ (касательныя плоскости линейчатыхъ поверхностей 2-го порядка имѣютъ съ поверхностью не одну точку, а двѣ прямыя). Въ частности, безконечно-удаленной плоскости, которая также есть одна изъ касательныхъ къ этой поверхности, коррелятивна безконечно-удаленная точка прямой пересѣченія преобразуемой плоскости съ плоскостью перспективности (а слѣдовательно и всѣхъ параллельныхъ ей плоскостей).

Отсюда видимъ, что если сѣченія этой поверхности плоскостями произвольнаго положенія есть гиперболы, если, въ частности, сѣченіе плоскостями, касательными къ поверхности, есть двѣ пересѣкающіяся прямыя, то пересѣченія ея плоскостями, параллельными прямой aa_1 есть параболы, и таковыхъ, слѣдовательно, имѣется одна линейная прима.

Если на поверхности даны двѣ точки произвольнаго положенія, то ими вполнѣ и однозначно опредѣляется линейная прима этой системы; для этого проведемъ плоскость чрезъ эти двѣ точки и точку Z; гипербола (въ общемъ случаѣ) пересѣченія этой поверхности съ плоскостью и есть искомая линейная прима, такъ какъ всякая таковая должна проходить чрезъ эту точку.

Отсюда слѣдуетъ, что рѣшеніе задачъ на этой поверхности сводится къ рѣшенію задачъ на плоскости.

Если бы удалось найти на поверхности точку Z, то операція преобразованія ея въ плоскость, свелась бы къ слѣдующему:

Беремъ на поверхности произвольную точку и

принимаемъ ее за центръ Z перспективности; въ этой точкѣ проводимъ къ поверхности касательную плоскость, въ которой должна находиться прямая aa_1, принадлежащая искомой плоскости; затѣмъ чрезъ Z проводимъ произвольную сѣкущую плоскость, которая пересѣчетъ и обѣ безконечно удаленныя прямыя поверхности, а всю поверхность въ нѣкоторой гиперболѣ; чрезъ одну изъ безконечно-удаленныхъ точекъ (все равно какую) проводимъ ассимптоту, и тогда точка пересѣченія этой ассимптоты съ касательною плоскостью есть точка a, а плоскость, проходящая чрезъ эту точку и соотвѣтственную безконечно-удаленную прямую, есть плоскость перспективности и значитъ пересѣченіе этой плоскости съ касательною плоскостью есть прямая aa_1. Имѣя плоскость перспективности, легко получаемъ и плоскость инволюціи, а слѣдовательно и точку k, а по послѣдней (проведя касательную) и точку b; искомая плоскость и есть плоскость baa_1.

Но, зная положеніе обѣихъ ассимптотныхъ плоскостей (въ разрѣзѣ Cb' и Cb'') и ихъ равнодѣлящей (Cc), мы найдемъ и разрѣзъ искомой плоскости (ab), если найдемъ такую точку c, чтобы она составила четвертую вершину параллелограма $Cacb$, діагональ котораго ab была бы полярою точки c относительно кривой разница. Въ болѣе подробный разборъ рѣшенія этой задачи входить не будемъ.

Такъ какъ всякій параболическій гиперболоидъ имѣетъ двойную ось симметріи (и двѣ пересѣкающіяся въ ней подъ прямымъ угломъ плоскости симметріи [1]), то казалось бы, проще всего за точку Z принять точку пересѣченія поверхности съ двойною осью симметріи. Тогда эта ось симметріи и есть именно та ось, которая пересѣкаетъ поверхность еще въ общей точкѣ безконечно-удаленныхъ прямыхъ поверхности, а, слѣдовательно, всѣ проходящія чрезъ нее плоскости, пересѣкаютъ поверхность въ параболахъ; послѣднія же, въ свою очередь есть такія спеціальныя гиперболы, въ которыхъ двѣ безконечно-удаленныя точки сливаются въ одну, а единственная ассимптота есть прямая безконечно-удаленная. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ плоскость преобразованія поверхности была бы плоскостью безконечно-удаленною.

Такимъ образомъ мы видимъ, что именно въ этомъ случаѣ замѣнить построенія на поверхности построеніями на плоскости невозможно.

Полная совокупность преобразуемыхъ плоскостей есть линейная терція, а значитъ и полная совокупность параболическихъ гиперболоидовъ, удовлетворяющихъ выясненнымъ условіямъ, составляетъ также линейную терцію. Въ составъ этихъ линейныхъ терцій входитъ общая линейная секунда плоскостей, проходящихъ чрезъ центръ Z, который представляетъ постоянный параметръ этой системы. Какъ въ каждой линейной примѣ преобразуемыхъ плоскостей имѣется одна, и только одна такая плоскость, которая проходитъ чрезъ эту точку, такъ въ каждой линейной примѣ параболическихъ гиперболоидовъ этой системѣ имѣется одна, и только одна, спеціальная поверхность, выродившаяся въ плоскость, проходящую чрезъ ту же точку. Поэтому, эти плоскости для обѣихъ гомологичныхъ системъ мы можемъ принять за экстраэлементы системы, а сами системы, поэтому, считать за родственныя, то есть установить между ними такое соотвѣтствіе, чтобы сферопримамъ одной системы были гомологичны сферопримы другой, и сферосекундамъ одной системы были гомологичны сферосекунды другой; и тогда [1]) всѣ рѣшительно построенія и теоремы, выведенныя для одной изъ нихъ, непосредственно переносятся и на другую.

Но эти соображенія относятся уже къ системѣ, у которой элементами являются параболическіе гиперболоиды, то есть къ системѣ параболическихъ гиперболоидовъ.

Если въ разсмотрѣніе примемъ только съ одной стороны плоскость, а съ другой—гомологическій гиперболоидъ, то и тогда можемъ признать родственность этихъ линейныхъ секундъ точекъ, потому что безконечно-удаленнымъ точкамъ первой системы, а слѣдовательно и полной ихъ линейной примѣ, гомологичны точки прямой пересѣченія гиперболоида съ плоскостью инволюціи, а слѣдовательно и всю эту прямую какъ линейную приму экстраэлементовъ.

Отсюда, въ частности, слѣдуетъ, что если во второй системѣ даны три произвольныя точки, то опредѣляемая ими сфероприма легко получится такимъ образомъ; проектируемъ эти три точки черезъ центръ Z на плоскость, строимъ по нимъ кругъ, и точки послѣдняго обратнымъ проектированіемъ переносимъ на параболическій гиперболоидъ. Такъ же проектируется и центръ этой сферопримы. Ясно, что этотъ центръ на гиперболоидѣ по отношенію къ сферопримѣ есть полюсъ упомянутой прямой на гиперболоидѣ.

[1]) Ср. Новая геометрія... стр. 67.

[1]) Эти Записки, III, стр. 297.