8. Къ понятію объ опредѣленномъ интегралѣ и о доказательствѣ основной теоремы существованія интеграла обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій [1]).

Н. М. Крылова.

Пусть

$$A(a) \text{ и } A(b)$$

будутъ двѣ совокупности (ансамбли), заключающія, каждая, безконечное число чиселъ, соотвѣтственно соизмѣримыхъ или нѣтъ [2]).

Опредѣленіе: два ансамбля

$$A(a) \text{ и } A(b)$$

называются соприкасающимися, если имѣютъ мѣсто слѣдующія два условія:

1) всякое число перваго ансамбля меньше любого числа второго, т. е. имѣетъ мѣсто неравенство:

$$a < b$$

для двухъ любыхъ чиселъ a и b изъ ансамблей A (a) и A (b).

2) можно найти такія два числа a_n и b_k, соотвѣтственно въ первомъ и во второмъ ансамблѣ, что разность $b_n - a_k$ будетъ сколь угодно мала.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ невозможность существованія двухъ различныхъ чиселъ A и B заключенныхъ между числами a и b: въ самомъ дѣлѣ, въ противномъ случаѣ, разность A– B, равная нѣкоторому конечному количеству, могла бы быть сдѣлана сколь угодно малой, ибо

$$A - B < b_n - a_k < \varepsilon.$$

Итакъ, два соприкасающихся ансамбля опредѣляютъ одно число, положимъ A, ихъ раздѣляющее, и всякое соизмѣримое число (за исключеніемъ быть можетъ одного), будетъ или меньше какого-либо числа a (1-го класса), или больше какого либо числа b (2-го класса); отсюда, по первому условію соприкасающихся ансамблей,—всякое число 1-го класса менѣе всякаго числа 2-го класса. И въ результатѣ мы получаемъ сѣченіе („Coupure“, „Schnitt“) Dedekind'a въ области раціональныхъ чиселъ, которымъ и опредѣлится число A. Оно будетъ ирраціональное, если въ классификацію вошли всѣ раціональныя числа, и раціональное въ противномъ случаѣ. Число A, такимъ образомъ опредѣленное, будетъ общимъ предѣломъ чиселъ обоихъ ансамблей въ обыкновенномъ смыслѣ этого слова, ибо разности

$$b - A \text{ и } A - a$$

будутъ меньше $(b - a)$, и потому могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми.

Замѣтивъ это, разсмотримъ нѣкоторую вполнѣ опредѣленную функцію $f(x)$, ограниченную въ интервалѣ $(x_0 = c,\ x_n = d)$, и пусть:

$$x_0 = c,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots x_n = d$$

будетъ рядъ возрастающихъ значеній x, заключенныхъ между c и d, такъ что:

$$c = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = d.$$

Образуемъ два выраженія, которыя и будутъ

---

[1]) Изъ курса лекцій по интегральному исчисленію, имѣвшихъ быть читанными въ теченіе зимняго семестра 1912 г.

[2]) Ансамбли эти могутъ быть «перечисляемыми» (dénombrables) или нѣтъ; въ первомъ случаѣ числа ихъ можно будетъ перенумеровать и расположить въ извѣстномъ порядкѣ

$$A\ (a)\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots$$
$$A\ (b)\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_n,\ \ldots;$$

во второмъ же случаѣ невозможно перенумеровать числа a и b ансамблей A (a) и A (b) и расположить ихъ указаннымъ способомъ. Примѣромъ ансамблей перечисляемыхъ можетъ служить совокупность чиселъ

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots\ \frac{1}{n},\ \ldots\ (a_n = \frac{1}{n});$$

Примѣромъ ансамблей неперечисляемыхъ—совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ a, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$0 \leq a \leq 1.$$

играть роль элементовъ вышеупомянутыхъ ансамблей:

$$(1)\quad \begin{matrix} a = (x_1 - c)\ \underline{f_1} + (x_2 - x_1)\ \underline{f_2} + \ .\ .\ (d - x_{n-1})\ \underline{f_n} \\ b = (x_1 - c)\ \overline{f_1} + (x_2 - x_1)\ \overline{f_2} + \ .\ .\ (d - x_{n-1})\ \overline{f_n}, \end{matrix}$$

гдѣ $\underline{f_i}$ и $\overline{f_i}$ будутъ соотвѣтственно нижняя и верхняя точная граница функціи $f(x)$ въ i-омъ интервалѣ $(x_i,\ x_{i-1})$.

Очевидно, каждому опредѣленному дѣленію интервала (c,d), т. е. каждой системѣ чиселъ:

$$x_0,\ x_1,\ x_2 \ldots\ x_n,$$

соотвѣтствуетъ одно опредѣленное значеніе для a и одно опредѣленное значеніе для b; покажемъ прежде всего, что ансамбли чиселъ a и b удовлетворяютъ 1-му условію для соприкасающихся ансамблей.

Имѣемъ очевидно:

$$b > a;$$

разсмотримъ затѣмъ два различныхъ способа дѣленія интервала $(c,\ d)$ и пусть $a,\ b'$ будутъ значенія a и b имъ соотвѣтствующія:

$$a = (x_1 - c)\ \underline{f_1} + (x_2 - x_1)\ \underline{f_2} + \ .\ .\ + (d - x_{n-1})\ \underline{f_n}$$
$$b' = (x'_1 - c)\ \overline{f'_1} + (x'_2 - x'_1)\ \overline{f'_2} + \ .\ + (d - x'_{n'-1})\ \overline{f'_{n'}};$$

обозначимъ теперь черезъ

$$z_1, z_2, z_3\ .\ .\ .\ z_{n+n'},$$

числа x_i и x'_j расположенныя въ возрастающемъ порядкѣ, такимъ образомъ, что

$$x_p\ -\ x_{p-1} = z_q\ -\ z_{q-1},$$

если между x_p и x_{p-1} не имѣется ни одного изъ чиселъ x', и

$$x_p - x_{p-1} = (z_q - z_{q-1}) + (z_{q-1} - z_{q-2}) + \ldots\ (z_r - z_{r-1}),$$

если между x_p и x_{p-1} имѣется $q - r - 1$ промежуточныхъ чиселъ x'.

Полагая:

$$a'' = (z_1 - c)\ \underline{f''_1} + (z_2 - z_1)\ \underline{f''_2} + \ldots\ (d - z_{n+n'})\ \underline{f''_{n+n'}};$$
$$b'' = (z_1 - c)\ \overline{f''_1} + (z_2 - z_1)\ \overline{f''_2} + \ldots (d - z_{n+n'})\ \overline{f''_{n+n'}},$$

имѣемъ очевидно:

$$a < a'',$$

ибо нижняя точная граница во всемъ интервалѣ менѣе, или во всякомъ случаѣ, не болѣе нижней точной границы въ части интервала, какъ это слѣдуетъ изъ извѣстной леммы: если верхній (нижній) предѣлъ функціи въ интервалѣ $(m,\ n)$ есть h (l) и если интервалъ раздѣляется на двѣ части $(m,\ p)$ и $(p,\ n)$, то верхній (нижній) предѣлъ въ одной изъ нихъ равенъ h (l), а въ другой $\leq h\ (\geq l)$ [1].

[1]) Пусть h_1 и h_2 верхніе предѣлы функціи въ интервалахъ (m,p) и $(p,\ n)$; если-бы было напр. $h_1 > h$, то, на основаніи опредѣленія верхняго предѣла, функція принимала-бы значенія, отличающіяся отъ h_1 меньше чѣмъ на $h_1 - h$, т. е. большія h, что невозможно; если-бы h_1 и h_2 были меньше h, и напр. $h_1 \geq h_2$ то функція въ одномъ изъ интервалов дѣленія, а слѣдовательно и во всемъ интервалѣ $(m,\ n)$, не принимала-бы значеній большихъ h_1, и h не было-бы верхнимъ предѣломъ; аналогичное доказательство для нижняго предѣла.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся, что

$$b' > b'';$$

но b'' очевидно больше a'', а потому имѣемъ слѣдующую систему неравенствъ:

$$b' > b'' > a'' > a,$$

откуда

$$b' > a,$$

что и т. д.

Подчиняя функцію f добавочнымъ ограниченія можемъ показать, что и 2-ое условіе соприкасаемости ансамблей чиселъ a и b будетъ выполнено, т. е. въ ансамбляхъ чиселъ a и b можно найти такія числа, разность между которыми можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой.

Изъ формулы (1) имѣемъ:

$$b - a = (x_1 - c)\ [\overline{f_1} - \underline{f_1}] + \ .\ .\ (d - x_{n-1})\ [\overline{f_n} - \underline{f_n}]$$

или сокращенно:

$$b - a = \sum_1^n \delta_s D_s,$$

гдѣ

$$\delta_s = x_s\ -\ x_{s-1} \text{ и } D_s\ = \overline{f_s}\ -\ \underline{f_s};$$

D_s, на основаніи опредѣленія, есть колебаніе функціи въ интервалѣ δ_s.

При увеличеніи числа дѣленій сумма

$$\Sigma \delta_s\ D_s$$

можетъ только уменьшаться, какъ это будетъ выяснено ниже. Отсюда вытекаетъ существованіе предѣла

$$lim\ \Sigma \delta_s\ D_s,$$

а тогда 2-ое условіе соприкасаемости ансамблей покажетъ, что предѣлъ этотъ равенъ 0.

Условіе это очевидно необходимо и достаточно; въ самомъ дѣлѣ, если оно выполнено, ансамбли $A(a)$ и $A(b)$ опредѣляютъ нѣкоторое число (ихъ раздѣляющее) на основаніи предыдущаго; если-же оно не выполнено, то ансамбли не могутъ опредѣлять одного числа, ибо если-бы они опредѣлили одно число, то условіе было-бы выполнено.

Итакъ, остается убѣдиться, при какихъ условіяхъ:

$$(3)\quad lim\ \Sigma\ \delta_s\ D\ =\ 0,$$

причемъ нѣтъ надобности доказывать (въ чемъ и заключается преимущество этого метода), что равенство это имѣетъ мѣсто для всевозможныхъ за

коновъ дѣленія, разъ оно имѣетъ мѣсто для одного.

Для непрерывныхъ функцій условіе (3) выполнено, ибо всякая непрерывная функція въ закрытомъ интервалѣ будетъ, какъ извѣстно, равномѣрно непрерывна, а потому можемъ опредѣлить такое дѣленіе, что D_i, равное для настоящаго случая разности между *max.* и *min.* $f(x)$ въ интервалѣ δ_i, можетъ быть сдѣлано меньше $\frac{\varepsilon}{k}$, гдѣ ε сколь угодно малая величина и гдѣ

$$k = \Sigma\delta_s = d - c,$$

а потому

$$\Sigma\ \delta_s\ D < \frac{\varepsilon}{k}\ \Sigma\delta_s = \varepsilon,$$

т. е.

$$lim\ \Sigma\delta_s\ D_s = 0,$$

что и т. д. Такимъ образомъ непрерывныя функціи принадлежатъ къ категоріи интегрируемыхъ.

Къ числу интегрируемыхъ относятся также функціи, разрывы непрерывности которыхъ могутъ быть заключены въ интервалы, причемъ сумма протяженій послѣднихъ, есть произвольно малая величина; въ самомъ дѣлѣ, заключая точки разрыва въ интервалы, разность $(b - a)$ можемъ представить въ видѣ суммы двухъ частей изъ которыхъ первая относится къ интерваламъ, лежащимъ въ свою очередь внутри интерваловъ, заключающихъ точки разрыва, а потому эта первая часть суммы $b - a$ будетъ очевидно сколь угодно мала, ибо всѣ разности $[\overline{f_i} - \underline{f_i}]$ ограничены и меньше D (колебаніе функціи во всемъ интервалѣ); вторая-же часть суммы, выражающей $(b - a)$, относится къ тѣмъ интерваламъ, гдѣ разности $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми, ибо внутри этихъ интерваловъ функція непрерывна; и такъ какъ достаточно показать, что разность $(b - a)$ можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой лишь при одномъ, вполнѣ опредѣленномъ законѣ дѣленія, то можно взять такія точки дѣленія, которыя совпадутъ съ оконечностями интерваловъ, заключающихъ разрывы непрерывности функціи f и тогда разность $(b - a)$ дѣйствительно будетъ сколь угодно мала. Отсюда заключаемъ, что къ числу интегрируемыхъ относятся между прочимъ функціи, обладающія конечнымъ числомъ разрывовъ непрерывности, а также функціи, точки разрыва непрерывности которыхъ, будучи въ безконечномъ числѣ, обладаютъ конечнымъ числомъ такъ называемыхъ предѣльныхъ точекъ [т. е. такихъ точекъ, вблизи которыхъ лежитъ безчисленное множество точекъ разсматриваемой совокупности] [1]), ибо безконечная группа точекъ, обладающая этимъ свойствомъ (конечное число предѣльныхъ точекъ) можетъ быть, какъ это легко понять [2]), заключена въ интервалы, сумма протяженій которыхъ меньше всякой напередъ данной величины.

Монотонныя функціи [3]), т. е. функціи либо все возрастающія, либо все убывающія тоже относятся къ категоріи интегрируемыхъ, ибо и для нихъ разность $(b - a)$ можетъ быть сдѣлана меньше ε [4]), въ чемъ легко убѣдиться, принимая всѣ δ_s равными между собою и равными $\frac{x_n - x_0}{n}$: замѣчая, что тогда

$$b - a = \frac{x_n - x_0}{n}\ [f(x_n) - f(x_0)],$$

видимъ, что при

$$lim\ n = \infty,\ lim\ (b - a) = 0,$$

что и т. д.

Всѣ вышеперечисленныя категоріи функцій принадлежатъ къ числу интегрируемыхъ, ибо для каждой изъ нихъ два соприкасающіеся ансамбля чиселъ a и b опредѣляютъ нѣкоторое число I, которое называется опредѣленнымъ интеграломъ и которое сокращенно обозначаютъ символомъ

$$\int_c^d f(x)dx,$$

гдѣ знакъ $\int$ есть измѣненное S, начальная буква слова summa, ибо интегралъ, какъ мы видимъ, есть предѣлъ [5]) суммы безконечно большого числа безконечно малыхъ слагаемыхъ,

$$lim\ \Sigma\ \delta_s\ \overline{f_s}$$

или

$$lim\ \Sigma\ \delta_s\ \underline{f_s}$$

---

[1]) Примѣръ: функція f, равная 1 въ точкахъ

$$1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3,\ {}^1/_4\ \ldots$$

а въ остальныхъ точкахъ интервала (0,1) равная нулю,— интегрируема и обладаетъ интеграломъ равнымъ нулю, ибо совокупность

$$1,\ {}^1/_2,\ {}^1/_3\ \ldots$$

обладаетъ одной предѣльной точкой 0.

[2]) Доказательство для краткости опускаемъ, читатель самъ легко возстановитъ его.

[3]) Такимъ образомъ являются интегрируемыми и функціи ограниченной варіаціи (введенныя впервые Jordan'омъ) представляющія собою разность двухъ монотонныхъ функцій.

[4]) Для краткости въ дальнѣйшемъ будемъ черезъ ε обозначать сколь угодно малую величину.

[5]) Иногда интегралъ опредѣляютъ какъ сумму безконечно большаго числа безконечно малыхъ слагаемыхъ, но это не строго, ибо интегралъ есть только предѣлъ суммы.

или наконецъ (что очевидно все равно)

$$lim\ \Sigma\ \delta_s f_s,$$

если черезъ f_s обозначимъ какое либо изъ чиселъ, лежащихъ между верхней и нижней точной границей f въ интервалѣ δ_s.

Это число I (величина интеграла) есть предѣлъ, къ которому при послѣдовательномъ подраздѣленіи интерваловъ, т. е. при неограниченномъ уменьшеніи ихъ до нуля, стремятся числа b и a, такъ какъ каждая изъ разностей $(b - \mathrm{I})$ и $(\mathrm{I} - a)$ очевидно меньше $(b - a)$ и потому можетъ быть сдѣлана меньше сколь угодно малаго количества, ибо разность $(b - a)$, сдѣлавшись меньше ε, продолжаетъ оставаться меньше ε, т. к. при послѣдовательномъ дѣленіи числа b уменьшаются, а числа a увеличиваются и, слѣдовательно, разность $(b - a)$ можетъ только уменьшиться: отсюда слѣдуетъ, что вполнѣ строго I опредѣлится какъ предѣлъ суммы

$$lim\ \Sigma \delta_s\ f_s$$

при неограниченномъ увеличеніи числа интерваловъ и неопредѣленномъ приближеніи каждаго изъ нихъ до нуля.

Условіе интегрируемости функціи можетъ быть преобразовано также и въ другое, извѣстное подъ именемъ необходимаго и достаточнаго условія Riemann'a [1]).

Доказательство существованія интеграла обыкновеннаго дифференціальнаго уравненія.

Такъ называемое 1-ое доказательство Cauchy существованія интеграловъ системы дифференціальныхъ уравненій:

$$(1)\quad \ldots \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1\ (x, y_1, y_2 \ldots y_m), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2\ (x, y_1, y_2 \ldots y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_m}{dx} = f_m\ (x, y_1, y_2 \ldots y_m), \end{cases}$$

принимающихъ напередъ заданныя значенія

$$y_1^0, y_2^0, \ldots y^0{}_m \text{ при } x = x_0,$$

основывается на разсмотрѣніи дифф. уравненія какъ предѣла нѣкоторой послѣдовательности уравненій въ конечныхъ разностяхъ; оно стало впервые извѣстно по лекціямъ аббата Moigno (1844). Lipschitz упростилъ доказательство и оттѣнилъ основныя гипотезы, достаточныя для него. Ограничиваясь для простоты и краткости однимъ дифф. уравненіемъ 1-го порядка, изложимъ ниже методъ доказательства существованія интеграла этого уравненія, нѣсколько отличающійся отъ обычно излагаемаго въ курсахъ и представляющій естественное обобщеніе предыдущихъ разсмотрѣній.

Основныя гипотезы:

1) въ смежности съ точкой x_0, y_0 существуетъ область

$$(2)\quad \ldots \begin{matrix} x - x_0 \leqq a; \\ |y - y_0| \leqq b, \end{matrix}$$

гдѣ x измѣняется отъ x_0 до $x_0 + a$, y отъ $y_0 - b$ до $y_0 + b$, и въ которой вещественная функція $f(x, y)$ двухъ вещественныхъ перемѣнныхъ x, y непрерывна, а потому, какъ извѣстно, и равномѣрно непрерывна; т.-е., какъ бы мало не было ε, можно всегда опредѣлить δ такъ, чтобы:

$$|f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

при условіи:

$$\Delta x < \delta,\ \Delta y < \delta,$$

причемъ точки:

$$x, y;\ x + \Delta x,\ y + \Delta y$$

лежатъ въ области (2).

2) Т. н. гипотеза Lipschitz'a: существуетъ такое; положительное число k, что

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < k\,|y_2 - y_1|,$$

гдѣ x, y_1, y_2 находятся въ области (2). Совершенно ясно, что въ случаѣ существованія конечной частной производной f по y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, гипотеза Lipschitz'a выполнена, какъ въ этомъ можно убѣдиться изъ теоремы конечныхъ приращеній.

Обозначая черезъ M верхній предѣлъ $|f(x, y)|$ въ области (2) и черезъ A наименьшее изъ чиселъ a и $\frac{b}{M}$, можемъ высказать слѣдующую теорему:

Существуетъ непрерывная функція y (независимой перемѣнной x), удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

опредѣленная для всякаго значенія x въ интервалѣ $(x_0, x_0 + \mathrm{A})$ и принимающая для $x = x_0$ напередъ заданное значеніе y_0.

При доказательствѣ этой теоремы постараемся провести возможно болѣе полную аналогію съ ранѣе изложеннымъ нами доказательствомъ существованія опредѣленнаго интеграла; для этой цѣли, налагая добавочныя ограниченія на $f(x, y)$ лишь по мѣрѣ того, какъ они будутъ необходимы, съ цѣлью выяснить ихъ роль при доказательствѣ, предположимъ сначала только, что функція $f(x, y)$ будетъ

[1]) См. классическіе курсы Dini, Goursat, Vivanti и др.

ограниченной въ области (2), а потому, на основаніи опредѣленія числа A,—и въ треугольникѣ trs, образованномъ прямыми:
$x = x_0 + A$; $y = y_0 + M(x - x_0)$; $y = y_0 - M(x - x_0)$, ибо треугольникъ этотъ лежитъ очевидно внутри области (2) (см. черт.).

Такъ какъ M есть верхній предѣлъ $f(x, y)$, то искомая функція $y = \varphi(x)$, если она существуетъ, графически изобразится кривой, лежащей цѣликомъ внутри вышеупомянутаго треугольника; естественнымъ поэтому является слѣдующій пріемъ: раздѣлимъ интервалъ $(x_0, x_0 + A)$ на n частей, обозначимъ черезъ $\overline{f_i}$, $\underline{f_i}$ соотвѣтственно верхній и нижній точный предѣлы f въ трапеціи, ограниченной прямыми:

$$x = x_{i-1};\ x = x_i;\ y = y_0 \mp M(x - x_0),$$

и разсмотримъ ансамбли $A(a)$, $A(b)$ чиселъ, соотвѣтствующихъ всевозможнымъ законамъ дѣленія:

$$\left.\begin{aligned} a &= (x_1 - x_0)\underline{f_1} + (x_2 - x_1)\underline{f_2} + \ldots (x_n - x_{n-1})\underline{f_n} \\ b &= (x_1 - x_0)\overline{f_1} + (x_2 - x_1)\overline{f_2} + \ldots (x_n - x_{n-1})\overline{f_n} \end{aligned}\right\}$$

гдѣ

$$x_n = x_0 + A.$$

Разсужденіемъ аналогичнымъ таковому-же при установленіи понятія объ опредѣленномъ интегралѣ, убѣдимся, что первое условіе соприкасаемости ансамблей $A(a)$ и $A(b)$, а именно

$$b' > a,$$

выполнено; для этой цѣли достаточно, какъ мы раньше видѣли, установить неравенства:

$$b' > b'' > a'' > a,$$

гдѣ a'', b'' соотвѣтствуютъ дѣленію интервала $(x_0, x_0 + A)$ на части

$$z_0 z_1, z_1 z_2 \ldots z_{n+n'-1}, z_{n+n'},$$

причемъ черезъ

$$z_0, z_1, z_2 \ldots$$

обозначимъ числа x_i (соотвѣтствующія a) и x'_j (соотвѣтствующія b') въ возрастающемъ порядкѣ ихъ величины.

Налагая теперь на $f(x, y)$ добавочныя условія: функція $f(x, y)$ непрерывна и относительно y удовлетворяетъ условію Lipschitz'a, напишемъ очевидное неравенство:

$$|\overline{f_m} - \underline{f_m}| = |f(x_m, y_m) - f(x^m, y^m)| <$$
$$|f(x_m, y_m) - f(x_m, y^m)| + |f(x_m, y^m) - f(x^m, y^m)|,$$

гдѣ точки (x_m, y_m) и (x^m, y^m) соотвѣтствуютъ $max.$ и $min.$ $f(x, y)$ въ разсматриваемой m-ой трапеціи.

Отсюда, принимая во вниманіе условіе непрерывности и условіе Lipschitz'a, видимъ:

$$b - a = \sum_{m=1}^{n} (x_m - x_{m-1})(\overline{f_m} - \underline{f_m}) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \delta x_m D_m < \sum_{m=1}^{n} k(y_m - y^m)\delta x_m + \varepsilon \sum_{m=1}^{n} \delta x_m. \tag{3}$$

но разность $(y_m - y^m)$ очевидно не можетъ превзойти бо́льшую вертикальную сторону трапеціи, а потому $b - a$ очевидно меньше произведенія k на удвоенную площадь треугольника trs; такимъ образомъ становится яснымъ, что для выполненія 2-го условія соприкасаемости ансамблей $A(a)$ и $A(b)$, надо попытаться сдѣлать сколь угодно малой площадь фигуры, заключающей приближенное графическое представленіе искомаго интеграла дифф. уравненія а потому въ формулѣ (3) подъ $\overline{f_m}$ и $\underline{f_m}$ подразумѣвать $max.$ и $min.$ f не во всей соотвѣтственной трапеціи, а лишь въ части ея. Для этой цѣли, означая черезъ M_1 и m_1, соотвѣтственно $max.$ и $min.$ $f(x, y)$ въ треугольникѣ $tt't''$, проводимъ изъ точки t (x_0, y_0) [1]), двѣ прямыя tp_1, tp_2 (съ угловыми коэффиціентами M_1 и m_1) до встрѣчи съ $t't''$ въ точкахъ p_1 и p_2; такъ какъ угловой коэффиціентъ касательной къ искомой кривой всегда заключается въ предѣлахъ $(-M, +M)$, то, проведя прямыя p_1, p_3 и p_2, p_4 соотвѣтственно параллельныя сторонамъ tr и ts до встрѣчи съ прямой $x = x_2$ въ точкахъ p_3 и p_4, можно ограничиться [1]) разсмотрѣніемъ $max.$ и $min.$ значеній f въ трапеціи p_1, p_2, p_3, p_4, составляющей уже часть ранѣе разсмотрѣнной трапеціи $t' t'' t^{iv} t''$; покажемъ, что сумма площадей этихъ новыхъ трапецій, при неопредѣленномъ возрастаніи числа дѣленій интервала $x_0 x_n = x_0 x$ и при неограниченномъ уменьшеніи каждаго изъ нихъ до нуля—можетъ быть сдѣлана менѣе всякой напередъ данной величины, чѣмъ и выполнится 2-ое условіе соприкасаемости ансамблей

$$A(a) \text{ и } A(b);$$

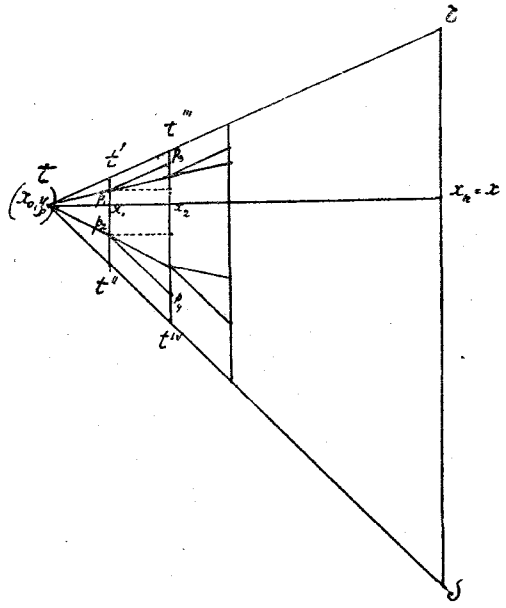
для доказательства основной теоремы о существованіи интеграла намъ останется только показать, что рядъ образованныхъ такимъ образомъ чиселъ

---

[1]) Черезъ которую, согласно заданію, долженъ пройти искомый интегралъ.

[1]) Ибо есть увѣренность, что искомая кривая въ интервалѣ (x_1, x_2) будетъ лежать въ разсматриваемой трапеціи.

образуетъ функцію, на самомъ дѣлѣ удовлетворяющую дифференціальному уравненію.



Для нахожденія площади фигуры, заключающей сумму площадей этихъ вновь образованныхъ трапецій, примемъ всѣ дѣленія интервала x_0x равными

$$\delta x = \frac{x_n - x_0}{n} = \delta x_1 = \delta x_2 = \ldots$$

и обозначимъ бо́льшую сторону i-ой трапеціи, т. е. отрѣзокъ $p_3^i\, p_4^i$ черезъ δ_i; тогда, очевидно, площадь прямоугольника (со сторонами $p_3^i p_4^i$ и ей $\|$, находящейся отъ нея слѣва (см. чертежъ) на разстояніи δx) будетъ

$$\delta_i \,.\, \delta x = \delta x\ (\Delta_{i-1} + 2\mathrm{M}\delta x), \tag{4}$$

если черезъ Δ_i обозначимъ разстояніе (считаемое по линіи $p_3^i\, p_4^i$) между точками встрѣчи прямой $p_3^i\, p_4^i$ съ линіями, выходящими изъ концовъ отрѣзка Δ_{i-1} соотвѣтственно съ угловыми коэффиціентами M_i и m_i.

Изъ формулы (4) убѣждаемся, что искомая сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \,.\, \delta x,$$

отличаются отъ суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_{i-1}\ \delta x_i$$

на величину

$$\delta x \sum_{i=1}^{n} 2\mathrm{M}\delta x = \delta x \,.\, 2\mathrm{M} \sum \frac{x - x_0}{n} = \frac{(x - x_0)^2 2\mathrm{M}}{n},$$

которая при достаточно большомъ значеніи n можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой; отсюда ясно, что можно ограничиться разсмотрѣніемъ суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \delta x.$$

Но

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + (\mathrm{M}_i - m_i\ )\ \delta x,$$

и притомъ разность

$$\mathrm{M}_i - m_i$$

очевидно меньше (на основаніи условія непрерывности и условія Lipschitz'a) слѣдующей величины:

$$k\,(y^i_{max.} - y^i_{min.}) + \varepsilon,$$

что въ свою очередь будетъ меньше:

$$k\ .\ (p_3^i\ p_4^i) + \varepsilon,$$

причемъ

$$p_3^i\, p_4^i = \Delta_{i-1} + 2\mathrm{M}\delta x.$$

Отсюда ясно, что:

$$\Delta_i < \Delta_{i-1}\,(1 + k\delta x) + \varepsilon\delta x + 2k\mathrm{M}\delta x\ .\ \delta x; \tag{5}$$

помножая на δx обѣ части предыдущаго неравенства, суммируемъ по i; тогда обозначая $\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \delta x$ черезъ S_n, имѣемъ очевидно:

$$\mathrm{S}_n < \mathrm{S}_{n-1}(1 + k\delta x) + \varepsilon\,(x - x_0)\,\delta x + 2k\mathrm{M}(x - x_0)\delta x\delta x. \tag{6}$$

Но δx всегда можно взять столь малымъ, чтобы

$$2k\mathrm{M}\ (x - x_0)\ \delta x < \varepsilon\ (x - x_0) = \varepsilon_1;$$

тогда изъ формулы (6) получаемъ:

$$\mathrm{S}_n < \mathrm{S}_{n-1}\ (1 + k\delta x) + 2\varepsilon_1\ \delta x;$$

это послѣднее неравенство, пользуясь пріемомъ Cauchy, перепишемъ такъ:

$$\mathrm{S}_n + \frac{2\varepsilon_1}{k} < \left(\mathrm{S}_{n-1} + \frac{2\varepsilon_1}{k}\right)\ (1 + k\delta x);$$

полагая здѣсь n послѣдовательно равнымъ 1, 2...., перемножая почленно полученныя неравенства и сокращая, получаемъ:

$$\mathrm{S}_n < \frac{2\varepsilon_1}{k}\ [e^{k(x - x_0)} - 1];$$

отсюда, въ виду произвольной малости ε_1, имѣемъ:

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{S}_n = 0,$$

что и т. д.

Если же функція $f(x,y)$ была-бы не только непрерывной, но и дифференцируемой по отношенію къ x, то въ неравенствѣ (5) можно было-бы положить:

$$\delta x = \frac{\varepsilon}{2k\mathrm{M}}$$

и тогда, введя обозначеніе:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i,$$

получимъ:

$$s_n < s_{n-1}\ (1 + k\delta x) + 2\varepsilon\ (x - x_0);$$

разсужденіемъ, аналогичнымъ предыдущему, установимъ, что $\lim_{n=\infty} s_n$ есть нѣкоторая конечная величина, а потому, при достаточно маломъ δx, интересующая насъ сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \delta x$$

будетъ тоже сколь угодно малая величина, что и т. д.

Замѣчаніе это, очевидно, распространяется и на тотъ случай, когда $f(x,y)$ удовлетворяетъ условію Lipschitz'a относительно перемѣнной x.

Равенство нулю въ предѣлѣ суммы

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \delta x$$

можно доказать еще, замѣчая, что Δ_i при безграничномъ увеличеніи числа промежуточныхъ дѣленій и при неопредѣленномъ уменьшеніи каждаго изъ нихъ, равномѣрно [1]) стремится къ нулю, а потому и

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\ \delta x$$

стремится въ свою очередь къ нулю, ибо сумма $\Sigma\delta x = x - x_0$ всегда конечна.

Остается показать теперь, что ансамбли $A(a)$ и $A(b)$ опредѣляютъ рядъ чиселъ, образующихъ своей совокупностью функцію, которая дѣйствительно удовлетворя тъ дифференціальному уравненію.

[1]) См. курсы Goursat и Picard'a.

Разсмотримъ двѣ точки интервала (x_0x_n), положимъ точки x и x'; пусть y, y' будутъ соотвѣтственно два числа, опредѣленныя предыдущимъ разсужденіемъ для интерваловъ (x_0, x) и (x_0, x'). Для нахожденія y' можно исходить изъ предположенія, что начальной точкой является (x, y); въ самомъ дѣлѣ, примѣняя построеніе съ точки (x, y), замѣчаемъ, прежде всего, что она, очевидно, лежитъ внутри трапецій, соотвѣтствующихъ начальной точкѣ (x_0, y_0), а потому, при достаточной степени малости дѣленія интерваловъ [1]), мы образуемъ такую систему трапецій, которая цѣликомъ лежитъ внутри прежней, а потому въ предѣлѣ и подавно общая площадь ихъ стремится къ нулю; слѣдовательно мы имѣемъ право говорить объ интегралѣ, графически представляемомъ кривой линіи, лежащей внутри системы трапецій, и въ предѣлѣ мы получимъ ту же кривую, что и раньше, а потому и тоже значеніе для y'. Но если это такъ, то угловой коэффиціентъ прямой, соединяющей точки (x, y) и (x', y') заключенъ, очевидно, между *max.* и *min.* значеніями $f(x,y)$ внутри треугольника (соотвѣтствующаго тому случаю, когда интервалъ xx' представитъ собой одно дѣленіе), а потому эти экстремальныя значенія, при достаточно маломъ значеніи xx' сколь угодно мало разнятся другъ отъ друга; слѣдовательно, съ приближеніемъ точки (x, y) къ (x', y') угловой коэффиціентъ вышеупомянутой прямой имѣетъ предѣломъ $f(xy)$, т. е. данное дифференціальное уравненіе удовлетворяется образованной функціей, что и т. д. [2]).

[1]) Собственно перваго интервала, ибо очевидно тогда послѣдующія трапеціи второго построенія [соотвѣтствующія начальной точкѣ (x, y)] будутъ лежать внутри трапецій перваго построенія [соотвѣтствующихъ начальной точкѣ (x_0, y_0)].

[2]) Относительно вопроса объ единственности рѣшенія отсылаемъ къ классическимъ курсамъ Goursat и Picard'a.