Списокъ работъ профессора И. П. Долбни въ хронологическомъ порядкѣ ихъ появленія [1]).

1) Новое доказательство теоремъ Абеля, относящихся до интегрированія дифференціаловъ вида $\frac{pdx}{\sqrt{R}}$, гдѣ p и R цѣлыя функціи (сообщеніе, читанное въ 73 засѣданіи физ. мат. секціи ОбществаЕстествоисп. при Казанскомъ Унив.). Эта, первая по времени самостоятельная работа покойнаго ученаго посвящена доказательству знаменитаго критерія Абеля: „если интегралъ $\int\frac{pdx}{\sqrt{R}}$ выражается въ логарифмахъ въ видѣ $log\ \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$ гдѣ p и q цѣлыя функціи x, то $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь; и обратно, если $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь, то дифференціалъ $\frac{pdx}{\sqrt{R}}$ будетъ интегрироваться въ логариѳмахъ".

Въ своемъ изслѣдованіи авторъ, пользуясь свойствами непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$, устанавливаетъ такія двѣ леммы, вполнѣ достаточныя для доказательства теоремы Абеля:

α) если въ разложеніи $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь одно изъ полныхъ частныхъ y_i будетъ корнемъ уравненія: $ay_i^2+2by_i+c=0$, гдѣ $a=\pm(p_i^2-q_i^2R)$ [2]) $=$ Const, то непрерывная дробь будетъ непремѣнно періодическая.

β) Если $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь вида:

$$\sqrt{R}=d+\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\ \ldots+\frac{1}{d_i}+\frac{1}{y_i},$$

гдѣ $y_i=\frac{2a}{d}+\frac{1}{ad_1}+\ldots$, и $a=const$, то въ уравненіи: $Ay_i^2+By_i+C=0$, опредѣляющемъ y_i, коэффиціентъ A есть постоянная величина равная a.

Такая постановка вопроса позволяетъ избѣжать изученія неопредѣленнаго уравненія: $NP^2-Q^2R_1=const$, (гдѣ P и Q цѣлыя функціи), рѣшеніе котораго составляетъ главную трудность мемуара Абеля и мысль автора представляется тѣмъ болѣе естественной, что разъ критерій Абеля основывается на періодичности непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$, то и доказательство этого критерія должно быть основано на свойствахъ періодическ. дробей.

2) О критеріи Galois разрѣшимости алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ. (Казань, 1889).

Въ этомъ мемуарѣ авторъ устанавливаетъ связь между работами Абеля и Галуа по теоріи разрѣшенія алгебраическихъ уравненій первоначальной степени въ радикалахъ.

Исходя изъ формы радикальнаго рѣшенія, данной впервые Абелемъ (и доказанной лишь впослѣдствіи Malmsten'омъ):

$$1)\ x_i=\frac{1}{n}\left[\alpha^i R_1^{\frac{1}{n}}+\alpha^{i-1}R_2^{\frac{1}{n}}+\ldots\alpha^{n-i}R_{n-1}^{\frac{1}{n}}\right]$$

(гдѣ $\alpha^n=1$ и R_i корни урав. $(n-1)$ степени съ раціон. коэф.) авторъ доказываетъ знаменитый критерій Galois: „pour qu'une equation du dégré premier soit resoluble par les radicaux il faut et il suffit: „deux des racines étant données, les autres s'en deduisent rationellement". Для этой цѣли представляя помощью формулъ (1) $R_i^{\frac{1}{n}}$ въ видѣ цѣлой раціональной функціи корней x_i (гдѣ $i=0,1\ldots n-1$), авторъ изучаетъ вліяніе на $R_i^{\frac{1}{n}}$ подстановокъ $S=\binom{z+k}{z}$ и $T=\binom{kz}{z}$, что позволяетъ ему высказать такую теорему: подстановки, не измѣняю

[1]) Содержаніе работъ 1—16 изложено Н. М. Крыловымъ, а остальныхъ—М. И. Акимовымъ. Ср. также «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik».

[2]) гдѣ $\frac{pi}{qi}$ будетъ подходящая дробь.

щія функціи $R_l^{\frac{1}{n}}$ образуютъ группу порядка равнаго $(n-2)!$ и состоящую изъ всевозможныхъ подстановокъ, не измѣняющихъ 2 корней: x_0 и еще нѣкотораго корня x_k; отсюда ясно, что каждая изъ функцій вида $\alpha^k R_l^{\frac{1}{n}}$ можетъ быть выражена раціонально въ 2 корняхъ уравненія надлежащимъ образомъ выбранныхъ. Пользуясь затѣмъ извѣстнымъ разсужденіемъ Galois, авторъ доказываетъ, что каждый изъ корней даннаго уравненія выражается раціонально черезъ каждую изъ функцій $\alpha^k R_l^{\frac{1}{n}}$, (если только корни уравненія $\alpha^n = 1$ считать раціонально извѣстными) и отсюда, какъ слѣдствіе, получаетъ вышеупомянутый критерій Galois.

Попутно авторъ доказываетъ теорему Kronecker'a, что R_i суть корни уравненія $(n-1)$ степени съ раціональными коэффиціентами, принадлежащаго къ категоріи Абелевыхъ, т. е. такого уравненія, всѣ корни котораго выражаются раціонально при помощи одного изъ нихъ, выбраннаго по произволу. Хотя работа эта не заключаетъ новыхъ результатовъ, тѣмъ не менѣе уясненіе связи между изслѣдованіями Абеля и Галуа представляется особенно интереснымъ и имѣющимъ значеніе хотя бы для цѣлей педагогическихъ; по всѣмъ вѣроятіямъ авторъ былъ наведенъ на свои изслѣдованія соображеніями о томъ, что только алгебраическія уравненія первонач. степени обладающіе цѣлой линейной группой (изслѣдов. Галуа) будутъ разрѣшимы въ радикалахъ: представлялось поэтому естественнымъ изслѣдовать вліяніе подстановокъ S и T, такъ называемыхъ основныхъ подстановокъ цѣлой линейной группы, на тѣ функціи корней уравненія, которыя входятъ въ выраженіе радикальнаго рѣшенія на основаніи изслѣдованій Абеля.

3) Sur l'addition des intégrales elliptiques de premiere, deuxieme et troisième espèce. (Nouvelles annales de mathém., 1889). Разсужденіе представляетъ развитіе идеи Halphen'a, Traité I, p. 30, 58, 215.

4) Аналогія между эллиптическими и тригонометрическими функціями. (Сообщеніе, чит. 25-го мая 1889 на 89 засѣданіи Физ. Мат. Секціи Обществ. Естест. при Каз. Унив.). Среди различныхъ возможныхъ способовъ изслѣдованія той аналогіи, о которой идетъ рѣчь, авторъ свой разборъ „cas de dégenerescence“ элиптическихъ функцій основываетъ на изысканіяхъ такихъ трансцендентныхъ функцій $\varphi(u)$ и $\tau(u)$, которыя удовлетворяли бы функціональному уравненію: $\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(a) - \varphi(u)$, причемъ въ зависимости отъ того: имѣемъ ли дѣло съ эллиптическими или тригонометрическими функціями, различаетъ два случая: 1) $\varphi(u)$ обладаетъ двумя періодами: дѣйствительнымъ и мнимымъ 2) $\varphi(u)$ обладаетъ однимъ дѣйсгвительнымъ періодомъ.

Предполагая, что $\tau(u)$ голоморфная функція аргумента, авторъ находитъ прежде всего, что $\tau(u)$ есть нечетная функція аргумента и что $\tau(o) = 0$; затѣмъ соображеніями, основанными на разсмотрѣніи порядка главныхъ членовъ разложенія, встрѣчаемыхъ при изслѣдованіи функцій по возрастающимъ степенямъ аргумента, авторъ приходитъ къ заключенію, что въ 1-мъ случаѣ $\varphi(u)$ есть мероморфная двояко-періодическая функція 2-го порядка, причемъ она удовлетворяетъ дифференціальному уравненію: $\big(\varphi'(u)\big)^2 = A\Big[\big(\varphi(u)-\varphi(w)\big)\Big]\cdot\big(\varphi(u)-\varphi(w_1)\big)\Big[\big(\varphi(u) - \varphi(w+w^1)\big)\Big]$, ибо функціи, стоящія въ правой и лѣвой части этого соотношенія, обѣ будутъ мероморфными функціями 6-го порядка.

Изслѣдуя затѣмъ мероморфную двояко-періодическую функцію $\left(\frac{\varphi'(u)-\varphi'(r)}{\varphi(u)-\varphi(r)}\right)^2$ и дѣлая добавочное предположеніе: $\varphi(w)+\varphi(w_1)+\varphi(w+w') = 0$, обращающее $\varphi(u)$ въ функцію $p(u)$ Вейерштраса, (т. е. такую функцію, что $(p'u)^2 = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3$), авторъ устанавливаетъ для нея извѣстную теорему сложенія: $p(u+r)+pu+pr = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u-p'r}{pu-pr}\right)^2$, причемъ какъ слѣдствіе получаетъ извѣстную весьма важную теорему: сумма аргументовъ, удовлетворяющихъ уравненію $p'u = a$, всегда равна нулю.

Приступая затѣмъ къ изслѣдованію голоморфной функціи $\tau(u)$, опредѣляемой трансцендентнымъ уравненіемъ: $\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(u) - p(a)$ и пользуясь затѣмъ теоремой сложенія для функціи $\zeta(u)$, а также формулой опредѣленія Вейерштрасовой функціи $\sigma(u)$: $\frac{d}{du}\log\sigma(u) = \zeta(u)$, авторъ получаетъ, что $\tau(u) = c^{-\frac{u^2\zeta(\omega)}{2\omega}}\sigma(u)$, т. е., что функція $\tau(u)$ отличается отъ Якобіевой функціи $\vartheta_1(u)$ только постояннымъ множителемъ. Аналогичныя изслѣдованія для 2-го случая приводятъ автора къ заключенію,

что $\varphi(u)$ для этого случая равна $m+cotg^2u$, которая и соотвѣтствуетъ такимъ образомъ функціи pu и что $\tau(u)=sin\,u$, т. е. $\frac{d\log\tau(u)}{du}=cotg\,u$, которой соотвѣтствуетъ такимъ образомъ эллипт. функціи $\zeta(u)$.

5) „Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel". („Journal des Math. pures et appliquees". t. VI de la 4 serie. 1890).

Мемуаръ этотъ былъ анализированъ выше въ текстѣ очерка.

6) „Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dépendent d'une racine cubique d'un polynome du troisième degré". „Bulletin des sciences mathematiques". 2 serie t. XVII. 1893.

Предметомъ работы является изученіе свойствъ интеграла: $A=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$, который авторъ выражаетъ въ эллиптическихъ функціяхъ Вейерштраса, замѣчая, что функція и интегралъ дифференціальнаго уравненія $\left(\frac{du}{dz}\right)^3=(u-a')^2(u-b')^2$ (1), опредѣляемый условіемъ $\begin{matrix}u=\infty\\z=o\end{matrix}$, будетъ, какъ легко показать, двояко-періодической функціей такого вида: (2) $u=Mp'z+N$; гдѣ M, N, а также g_2, g_3 опредѣляются подстановкой выраженія (2) въ соотношеніе (1); примѣняя тогда къ интегралу A подстановку $x-a=\frac{1}{u}$ и полагая $\frac{1}{b-a}=a'$; $\frac{1}{c-a}=b'$, авторъ приводитъ интегралъ къ виду: $A=h\int\frac{pz\left(p'z-\frac{a'+b'}{27}\right)dz}{p'z-\frac{a'b'}{3^6}}$; разложеніемъ раціональной дроби $\frac{pz}{pz^3-h^3}$ на простѣйшія вопросъ приводится къ вычисленію интеграла $B=\frac{a'+b'}{2\cdot3^3}\int\left(\frac{1}{pz-h}+\frac{\alpha^2}{pz-\alpha h}+\frac{\alpha}{pz-\alpha^2h}\right)dz$, ибо $A-B=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{p'dz}{pz-h}+\frac{\alpha^2p'z}{pz-\alpha h}+\frac{\alpha p'z}{pz-\alpha^2h}\right)dz$ (гдѣ $\alpha^3=1$) непосредственно вычисляется въ логариѳмахъ.

Примѣненіе извѣстныхъ формулъ однородности эллипт. функцій для случая $g_2=0$ позволяетъ автору представить функцію, стоящую подъ знакомъ интеграла B, въ видѣ: $\frac{1}{p'z_0}\{[\zeta(z-z_0)-\zeta(z+z_0)]+\alpha^2[\zeta(z-\alpha z_0)-\zeta(z+\alpha z_0)]+\alpha[\zeta(z-\alpha^2z_0)-\zeta(z+\alpha^2z_0)]$, а потому и весь интегралъ A такимъ образомъ: $-log\left\{\left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]\left[\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{\alpha^2}\left[\frac{\sigma(z+\alpha^2z_0)}{\sigma z}\right]^{\alpha}\right\}$ или что все равно:

$$A=-\frac{1}{m}log\left\{\left[e^{\frac{-2\eta z}{m}}\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]^m\left[e^{\frac{-2\alpha^2\eta z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha^2}\cdot\left[e^{\frac{-2\alpha\eta z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha^2z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha}\right\},$$

откуда принимая во вниманіе извѣстный результатъ Halphen'a, по которому три функціи, заключенныя выше въ прямыя скобки выражаются раціонально въ pz и $p'z$ если z_0 есть соизмѣримая часть періода, авторъ приходитъ къ теоремѣ: если $g_2=0$; $g_3=-\frac{1}{3^6}\frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2}$ и $pz_0=\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}}$, то интегралъ $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$ выражается въ логариѳмахъ при условіи, что z_0 равно $\frac{2\omega}{m}$, т. е. есть соизмѣримая часть періода.

Замѣтивъ далѣе, что въ извѣстныхъ примѣрахъ приводимыхъ интеграловъ вышеразсмотрѣннаго типа: (3) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-p^2x}}$ и (4) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$, z_0 равно соотвѣтственно половинѣ и третьей части періода и что слѣдовательно интегралы эти выражаются въ логариѳмахъ, авторъ ставитъ задачу объ ихъ вычисленіи, для каковой цѣли пользуясь извѣстными соотношеніями между функціями $\sigma(u)$ и $p(u)$ получаетъ—A равнымъ: $\frac{1}{m}[P_o-P_2-2P_3-\ldots-(m-2)P_{m-1}-(m-1)P_m+(m-1)P_o]$, гдѣ $P_k=log\{[p(z-kz_o)-pz_o][p(z-k\alpha z_o)-p\alpha z_o]^{\alpha^2}[p(z-k\alpha^2z_o)-p\alpha^2z_o]^{\alpha}\}$, т. е. $P_m=P_1$; отсюда искомая формула: $A=\frac{1}{m}log\prod_{i=o}^{j=m-1}\{[p(z-iz_o)-pz_o][p(z-i\alpha z_o)-p\alpha z_o]^{\alpha^2}[p(z-i\alpha^2z_o)-p\alpha^2z_o]^{\alpha}\}^{i-1}$, примѣняя которую авторъ получаетъ извѣстныя выраженія для (3) и (4) въ конечномъ видѣ.

Далѣе авторъ занимается рѣшеніемъ задачи Чебышева для интегралов типа

$$B=\int\frac{(x+H)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2\,(x-b)^2\,(x-c)^2}}$$

т. е. изысканіемъ условій, необходимыхъ и достаточныхъ, при которыхъ можно выбрать неопредѣленное число H такимъ образомъ, чтобы интегралъ B выражался только въ логариѳмахъ. Представляя интегралъ

В въ эллиптическихъ функціяхъ авторъ получаетъ формулу: $B=[3\zeta(z_0)-3\frac{2\eta}{m}-\sqrt[3]{a'^2b'^2}(a+H)]z-$ $-\frac{1}{m}log\left\{\left[e^{\frac{-2\eta z}{m}}\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]^m\left[e^{\frac{-2\alpha^2\eta z}{m}}\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha}\right.$ $\left.\left[e^{\frac{-2\alpha\eta z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha^2}\right\}$, откуда теорема: сохраняя для g_2, g_3, pz_0 тѣ же значенія, что и въ предидущей теоремѣ, имѣемъ: интегралъ B выражается въ логариѳмахъ, если z_0 есть соизмѣримая часть періода и число H выбрано подъ условіемъ: $3\zeta(z_0)-3\frac{2\eta}{m}-\sqrt[3]{a'^2b'^2}(a+H)=0$.

Примѣняя тѣ же разсужденія, авторъ получаетъ общую формулу для вычисленія интеграла B, которую и прилагаетъ затѣмъ къ вычисленію такъ называемаго псевдо-эллиптическаго интеграла Абеля т. е интеграла вида: $\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{R(x)}}$; результатомъ такого приложенія является соотношеніе:

$$\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{R}}=-\frac{1}{m}\ log\prod_{i=0}^{i=m-1}[p(u-iv)-pv]^{i-1},$$

позволяющее вычислить искомый интегралъ съ тѣмъ большимъ удобствомъ по отношенію къ методу предыдущаго мемуара, что здѣсь окончательные результаты зависятъ отъ одного только основного радикала

$$\sqrt{R}=\sqrt{x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4},$$

но не отъ цѣлаго ряда другихъ радикаловъ, полученныхъ послѣдовательными преобразованіями. Въ заключеніе авторъ прилагаетъ свой методъ къ вычисленію частнаго примѣра:

$$\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{x^4+2x^2+4x+1}}=log\frac{(x^2-1+R)(x^2+1+R)}{(x^2-1-R)(x^2+1-R)}.$$

7) Surlesintégrales pseudo-elliptiques dépendant des radicaux du quatriéme et sixième dègre". (Bulletin des sciences. Math. t. XVII. 1893. p. 1—9.).

Примѣняя методъ предъидущаго мемуара, авторъ ищетъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы при извѣстомъ значеніи H, интегралъ

$$j=\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)}}$$

выражался въ логарифмахъ и приходитъ къ теоремѣ: Полагая $g_2=\frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}$, $g_3=0$ и $pz_0=\frac{1}{\sqrt{6(c-b)}}$ можно выразить интегралъ j въ логариѳмахъ если $z_0=\frac{2\omega}{m}$ т. е. соизмѣримой части періода; въ частномъ случаѣ $c=2a-b$, вычисленія даютъ $z_0=\frac{2\omega}{4}$, т. е. если корни a, b, c подрадикальнаго полинома образуютъ ариѳметическую прогрессію радіуса равнаго $(a-b)$, то интегралъ j выражается въ логариѳмахъ.

Тѣ-же расужденія въ примѣненіи къ интегралу $j_1=\int\frac{(x+H)dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$ приводятъ автора къ теоремѣ: если

$$g_2=0;\ g_3=\frac{b-a}{30(a-c)(b-c)},\ pz_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{(c-b)^{15}}},$$

то интегралъ j_1 выражается въ логариѳмахъ при условіи, что $z_0=\frac{2\omega}{m}$, т. е. равно соизмѣримой части періода, а это условіе будетъ выполнено (какъ показ. авторъ), напримѣръ, при слѣдующемъ соотношеніи между корнями подрадикальнаго полинома: $c=4b-3a$.

8) „Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій" (Казань. 1891, стр. 1—28).

Въ этой статьѣ авторъ занимается вопросомъ о приведеніи общаго эллиптическаго интеграла:

$\int\frac{F(x)}{F_1(x)}\frac{xd}{\sqrt{R}}$ (гдѣ F и F_1 раціональныя функціи и R полиномъ 4-ой степени); соображеніями, основанными на разсмотрѣніи главныхъ членовъ разложенія эллиптическихъ функцій Вейерштраса, авторъ доказываетъ, что всякій эллиптическій интегралъ выражается алгебраической функціей и тремя неприводимыми эллиптическими интегралами:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}=\frac{u}{\sqrt{a_0}},\ \int\left(\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)du;$$

$$\int\left(\frac{1}{2}\frac{p'u-p'v}{pu-pv}\right)^2du,$$

причемъ попутно получаетъ теорему сложенія для функціи pu и новую форму обращенія (о которой выше уже шла рѣчь) эллипт. интеграла.

9) „Sur la forme plus precise des racines des équations algebriques résolubles par radicaux" (Bulletin des sc. Math. 2-me série t. XVIII. стр. 1—14).

По теоріи Galois разрѣшимы въ радикалахъ, какъ извѣстно, только тѣ уравненія первоначальной степени, для которыхъ всякая раціональная функція корней неизмѣняемая подстановками т. н. цѣлой

линейной группы $\binom{az+b}{z}$ будетъ раціонально извѣстна. Независимо отъ теоріи Galois, авторъ въ этомъ мемуарѣ ставитъ себѣ цѣлью доказать, что всякое неприводимое алгебраическое уравненіе простой степени, обладающее вышеупомянутымъ свойствомъ, будетъ разрѣшимо въ радикалахъ и, что кромѣ того, можно найти точную форму корней этого уравненія.

Для этой цѣли авторъ разсматриваетъ функцію: $Q = R_1 . R_{n-1} + R_p R_{n-p} + \ldots R_p \frac{n-3}{2} R_{n-p} \frac{n-3}{2}$, гдѣ $R_1 = x_0 + d^{n-1} x_1 + \ldots dx_{n-1}$; гдѣ x_i суть корни уравненія $x^n + px^{n-r} + \ldots + s = o$, d и w суть соотвѣтственно корни двухчленныхъ уравненій $d^n = 1$ и $w^{\frac{n-1}{2}} = 1$; эта функція Q равно какъ и $\frac{n-3}{2}$ функцій вида: $Q_i = (R_1 R_{n-1} + w R_p R_{n-p} + w^2 R_p R^2_{n-p} + \ldots w^{\frac{n-3}{2}} R_p \frac{n-3}{2} R_{n-p} \frac{n-3}{2})^{\frac{n-1}{2}}$ (гдѣ w есть одинъ изъ первообразныхъ корней уравненія $w^{\frac{n-1}{2}} = 1$) не измѣняются основными подстановками цѣлой линейной группы, а потому согласно условію будутъ раціонально извѣстны; для функціи Q авторъ даже непосредственно находитъ $Q = -np$, т. е. что Q раціонально извѣстна.

Отсюда, пользуясь свойствами корней двучленныхъ уравненій, авторъ получаетъ выраженія для R_p i R_{n-p} i, гдѣ i пробѣгаетъ значенія отъ 1 до $\frac{n-1}{2}$; тѣже разсужденія въ примѣненіи къ функціямъ корней: $\left[R^n_1 + R^n_{n-1}) + w (R^n_p + R^n_{n-p}) + \ldots w^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left(R^n_p \frac{n-3}{2} R^n_{n-p} \frac{n-3}{2}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}} = h_1$, позволятъ получить выраженія для $R^n_{pi} + R^n_{n-pi}$ откуда, какъ слѣдствіе, авторъ получаетъ R^n_{pi} и R^n_{n-pi} какъ корни квадратнаго уравненія, коэффиціенты котораго имѣютъ опредѣленную радикальную форму. Найдя теперь R^n_{pi}, а слѣдовательно и R_{pi}, авторъ, пользуясь свойствами двучленныхъ уравненій, находитъ выраженіе для корней x_i въ функціи R_i причемъ убѣждается, что корни разрѣшимаго уравненія простой степени имѣютъ форму, предусмотрѣнную Абелемъ; въ частности для уравненій 5-ой степени подтверждается результатъ Абеля: корни имѣютъ форму: $x = A + \sqrt[5]{R_1} + \sqrt[5]{R_2} + \sqrt[5]{R_3} + \sqrt[5]{R_4}$, гдѣ $\sum_{i=1}^{i=4} R_i$. суть корни уравненія 4-ой степени выразимыя помощью однихъ квадратныхъ радикаловъ.

10) „Sur la résolution algebrique des équations de dégré premier“. (Bulletin des Sciences math. 2-me série. 1895. p. 1—6).

Авторъ доказываетъ здѣсь теорему, помощью которой можно разрѣшить въ радикалахъ уравненія 5 и 7-ой степени конечнымъ числомъ операцій при условіи, что эти уравненія обладаютъ группой Galois. Изученія вліянія основныхъ подстановокъ S и T цѣлой линейной группы на функцію такого вида: $\varsigma_1(\alpha) = R_1 R_{p2} \ldots R_{p\,n-3} + R_p R_{p3} \ldots R_{p\,n-2}$ приводитъ автора къ заключенію, что $\varsigma_1(\alpha)$ будетъ метациклической (по терминологіи Kronecker'a) функціей корней, кромѣ того $\varsigma_1(\alpha)$ не зависитъ отъ α, отсюда ясно, что $\varsigma_1(\alpha)$ есть цѣлый корень резольвенты $(n-r)!$ степени, коэффиціенты которой суть извѣстныя цѣлыя числа. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $(R_1 R_{p2} \ldots R_{p\,n-3} - R_p R_{p3} \ldots R_{p\,n-2})^2 = \varsigma'_1$ есть извѣстное цѣлое число, а потому:

$$R_1 R_{p2} \ldots R_{p\,n-3} = \frac{1}{2}(\varsigma_1 + \sqrt{\varsigma'_1})$$

$$R_p R_{p3} R_{p5} \ldots R_{p\,n-2} = \frac{1}{2}(\varsigma_1 - \sqrt{\varsigma'_1})$$

Тѣ же разсужденія повторяются для функцій:

$$\begin{cases}(R^n_1 + R^n_{p2} + \ldots R^n_{p\,n-3}) + (R^n_p + \ldots R^n_{p\,n-2}) = \varsigma_2, \\ (R^n_1 + R^n_{p2} + \ldots R^n_{p\,n-3}) - (R^n_p + \ldots R^n_{p\,n-2}) = \varsigma'_2\end{cases}$$

$$A + B = (R^n_1 R^n_{p2} + R^n_1 R^n_{p4} + \ldots R^n_{p\,n-5} R^n_{p\,n-3}) + (R^n_p R^n_{p3} + \ldots R^n_{p\,n-4} R^n_{p\,n-2}) = \varsigma_3$$

$(A - B) = \varsigma'_3$ и т. д.

Отсюда видно, что разрѣшеніе даннаго уравненія зависитъ отъ 2 слѣдующихъ:

$$\xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2}(\varsigma_2 + \sqrt{\varsigma^1_2})\,\xi^{\frac{n-3}{2}} + \ldots \pm \frac{1}{2^n}(\varsigma_1 + \sqrt{\varsigma'_1})n;\ \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2}(\varsigma_2 - \sqrt{\varsigma^1_2})\,\xi^{\frac{n-3}{2}} + \ldots \pm \frac{1}{2^n}(\varsigma_1 - \sqrt{\varsigma'_1})n,$$ т. е. имѣетъ мѣсто теорема:

Если неприводимое уравненіе простой степени n съ цѣлыми коэффиціентами разрѣшимо въ радикалахъ: то его рѣшеніе зависитъ отъ уравненія $\frac{n-1}{2}$ степени съ коэффиціентами вида $a + \sqrt{b}$; гдѣ a и b суть цѣлыя числа, опредѣляемыя конечнымъ числомъ операцій.

Въ приложеніи къ уравненію 5-ой степени: ς_1 раціонально извѣстно $= 5p$, ς_2, ς^1_1, ς^1_2, будутъ митациклическими функціями, причемъ ς^1_1 будетъ извѣстной митациклической функціей Якоби.

11) „Sur l'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$“.

(Bullet des Sciences Math. 2-me série. t. XIX. 1895. p. 1—9).

Въ этой статьѣ авторъ прилагаетъ свой методъ вычисленія въ логариѳмахъ къ интегралу;

$j = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$ приведенному въ курсѣ анализа Бертрана къ категоріи эллиптическихъ. Разсужденіями совершенно аналогичными съ тѣми, о которыхъ было уже упомянуто, авторъ устанавливаетъ, что интегралъ j выражается въ логариѳмахъ только въ томъ случаѣ, если аргументъ Z_0, опредѣляемый соотношеніемъ $PZ_0 = \frac{1}{6(a-b)}$, будутъ соизмѣримой частью періода, причемъ $x^4 + px^2 + q = (x^2 - a)(x^2 - b)$; $g_3 = 0$; $g_2 = \frac{2}{3}\frac{b}{a(a-b)}$, Въ качествѣ примѣровъ здѣсь приводятся интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - a^2}} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 + 3a \pm a\sqrt{3})}},$$

для которыхъ Zo соотвѣтственно равно половинѣ и третьей части періода. Затѣмъ сдѣлавъ указаніе на возможность примѣненія формулъ умноженія эллипт. аргумента на цѣлое число къ вопросу о выразимости интеграла въ логариѳмахъ, авторъ, пользуясь соотношеніемъ между функціями σ и p получаетъ тѣмъ же пріемомъ, что и раньше, формулу для вычисленія интеграла j въ функціи pu Вейерштраса.

12) „Sur la determination du genre d'une certaine categorie d'integrales abeliennes et quelques applications". (Bulletin des Sciences Mathem. 2^{Ser} XIX. 1895. p. 1—10).

Въ этой работѣ авторъ даетъ новое опредѣленіе ранга абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ двучленныхъ алгебраическихъ уравненій: рангъ I интеграла $j = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}}$ есть число независимыхъ интеграловъ вида: $I_n = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[m]{[(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}]^n}}$ (гдѣ $n \leqq m-1$) и сохраняющихъ притомъ конечныя значенія на всей поверхности Риманновой сферы; называя это число черезъ N авторъ находитъ для него формулу:

$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{i=i}\frac{(m-1)\,p_i - q_i + 1}{q_i}$, гдѣ

$$\alpha + \beta + \ldots\lambda = mk;\ \frac{\alpha}{m} = \frac{p_1}{q_1} \ldots \frac{\lambda}{m} = \frac{p_i}{q_i}.$$

Прилагая эту формулу къ нѣкоторымъ частнымъ интеграламъ, авторъ указываетъ на важность полученія всѣхъ наиболѣе простыхъ интеграловъ 1-го рода (что достигается также его способомъ) во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда въ силу условій задачи приходится совершать т. н. обращеніе интеграла. Затѣмъ для поясненія теоріи авторъ занимается изысканіями условій, при которыхъ интегралы:

$$A = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)\ (x-b)^2\ (x-c)^3}}.$$

$B = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)\ (x-b)\ (x-c)^2}}$ выражаются въ логариѳмахъ и приходитъ слѣдуя тому же процессу, о которомъ было неоднократно упомянуто выше къ условію, что аргументъ Z_0 (гдѣ $p\,Z_0 =$ нѣкоторой const, опредѣляемой разсматриваемой частной задачею) долженъ равняться соизмѣримой части періода.

Здѣсь же трактуется вопросъ о приведеніи интеграла Эйлера: $\int X\frac{dx}{x}$ (гдѣ X есть раціональная функція x^n и $\sqrt[n]{a + bx^n}$) къ логариѳмамъ и указываются въ качествѣ примѣровъ интегралы: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3 - a)\ (x^3 - b)}}$ и $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^4 - a)(x^4 - b)}}$, рангъ которыхъ можетъ быть опредѣленъ путемъ предварительной подстановки: $x^3 = y$ въ 1-мъ интегралѣ и $x^4 = t$ во второмъ.

13) „Sur la réduction des integrales abéliennes dependant d'une équation algebrique binome". (Bulletin des Sciences Math, 2^{Ser} t. XX. 1896 p. 1—29).

Обращая вниманіе на неудовлетворительную постановку, даже въ классическихъ руководствахъ (Serret), вопроса о приводимости абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ двучленныхъ уравненій, авторъ возвращается къ своему вышеупомянутому опредѣленію ранга интеграла и изслѣдуетъ множество частныхъ примѣровъ, трактуя для нѣкоторыхъ изъ нихъ, слѣдуя своему выше намѣченному методу, вопросъ о выразимости ихъ въ логариѳмахъ.

14) „Remarque sur le genre des intégrales abeliennes". Bull. des Sc. Math. t. XXI. p. 1—2.

Замѣтка эта имѣетъ цѣлью показать, что выше данное опредѣленіе ранга абелеваго интеграла, тождественно съ таковымъ-же получаемымъ, слѣдуя общей теоріи Riemman'a.

15) „Изслѣдованія по теоріи абелевыхъ интеграловъ". Диссертація, представлен-

ная Совѣту Горнаго Института. С.-Петербургъ 1897.

Сочиненіе это въ общемъ представляетъ собою систематическое изложеніе работъ покойнаго профессора, печатавшихся въ иностранныхъ математическихъ журналахъ и рецензіи о которыхъ были даны выше.

16) „Etude directe des integrales abeliennes du genre un". Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 3 serie. t. XV. (p. 393—430). Рецензія этого мемуара помѣщена въ Bulletin des Sc. math. 1900. p. 67—69; ниже мы помѣщаемъ ее въ переводѣ:

Предметомъ работы является задача обращенія при помощи эллиптической функціи *pu* Вейерштраса, трехъ единственныхъ интеграловъ 1-го ранга вида: $\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-\rho)^{\lambda}}}$, а также эллиптическаго интеграла 1-го рода.

1°. Разсматривая сперва интегралъ: (1) $u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2\ (x-b)^2\ (x-c)^2}}$, авторъ прежде всего устанавливаетъ, что x есть монодромная функція u на всей поверхности Риманна.

Полагая затѣмъ $x - a = \frac{1}{\xi}$, что мѣняетъ предложенный интегралъ въ другой $z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi-a')^2\ (\xi-b')^2}}$ онъ находитъ: $\xi = \frac{27}{2}p'z + \frac{a'+b'}{2}$, причемъ инваріанты pz имѣютъ значенія: $g_2 = 0$; $g_3 = -\frac{(a'-b')}{27}$.

2) Трактуя затѣмъ соотношеніе: (2) $u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2\ (x-b)^3\ (x-c)^3}}$, можно убѣдиться, что x есть монодромная функція u на всей поверхности Риманна. Линейнымъ преобразованіемъ замѣщается исходное соотношеніе такимъ уравненіемъ: $z = \int_{\infty}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[4]{\xi^2\ (\xi-a)^3}}$, откуда получается: $\xi = 6p^2z + d$; $g_2 = -\frac{2d}{3}$, $g_3 = 0$.

Можно было-бы также привести предложенное уравненіе къ виду: $z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3\ (x-\alpha)^3}}$; авторъ показываетъ, что обращеніе аргумента Z можетъ быть получено прямо, не прибѣгая къ предварительной подстановкѣ $x = \frac{1}{y}$, имѣющей цѣлью привести всѣ безконечности x въ одну точку на Риманновой поверхности.

3. Третій разсматриваемый интегралъ: (3) $u = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3\ (x-b)^4\ (x-c)^5}}$ опредѣляетъ x, какъ монодромную функцію u на всей поверхности.

Подстановкой $x - c = \frac{1}{y}$, приводятъ предложенное уравненіе къ виду: $z = \int_{\infty}^{y} \frac{dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3\ (y+\beta)^4}}$, обращеніе котораго даетъ: $y = 2^4\ 3^6\left(4p^3z - \frac{\beta}{2^4\ 3^6}\right)$; $g_2 = 0$; $g_3 = \frac{\beta-\alpha}{2^4\ 3^6}$.

Можно было-бы также привести исходное уравненіе къ виду: $z = \int_{\beta}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^4\ (\xi-\beta)^6}}$, соотношеніе, обращеніе котораго можно совершить не примѣняя предварительной подстановки: $\xi - \beta = \frac{1}{y}$.

Тоже предложеніе вѣрно для соотношенія: $z = \int_{\beta}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^3\ (\xi-\beta)^5}}$, которое есть другая форма уравненія (3).

Эта возможность прямого обращенія, независимо отъ подстановки вида $x - a = \frac{1}{y}$ устанавливается затѣмъ авторомъ для каждаго изъ интеграловъ вида (1), (2), (3).

Конецъ мемуара заключаетъ детали вычисленій, которыя надо совершить, чтобы согласно указанію, данному Halphen'омъ (Traité des fonctions elliptiques t. 1. p. 131), совершить обращеніе интеграла $z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}}$ ($J(y) = y^4 + 6d_2y^2 + 4d_3y + d_4$) не рѣшая уравненія $J = 0$.

Такимъ образомъ находятъ: $z = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}$ гдѣ инваріанты имѣютъ значенія: $g_2 = d_4 + 3d_2^2$; $g_3 = d_2^3 + d_2\ d_4 - d_3^2$.

Сопоставляя этотъ результатъ съ преобразованіемъ указаннымъ авторомъ въ одной изъ предыдущихъ его работъ, приходятъ къ теоремѣ:

Если имѣя уравненіе: $z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}}$, откуда обращеніемъ получится $y - y_1 = \frac{p'Z_0}{pZ - pZ_0}$, выполнимъ подстановку:

$$\sqrt{J(y)} = y^2 + 3d_2 - \frac{2d_3}{\eta},$$

то для новой перемѣнной η получается выраженіе:

$$\eta = \frac{p'(2z_0)}{pz - p(2z_0)},$$

которое отличается отъ $y - y_1$ только удвоеніемъ аргумента z_0, причемъ инваріанты g_2 и g_3 въ обоихъ случаяхъ имѣютъ одни и тѣ же значенія.

17) Сравненіе поверхностей шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращенія, заданныхъ извѣстными условіями (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1897 г.). Вычисленія, составляющіе предметъ замѣтки, приложены къ работѣ П. Ф. Лесгафта „Теорія простыхъ суставовъ".

18) Обобщеніе задачи Бертрана. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1898). Авторъ доказываетъ теорему: Если точка, подъ дѣйствіемъ центральной силы, описываетъ алгебраическую кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ съ началомъ въ точкѣ пересѣченія силъ, то движущая сила выражается формулой

$F = \frac{-C^2 r\, H(u)}{(n-1)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^3}$ $(z = 1)$, гдѣ $H(u)$ есть Гессіанъ кривой; $\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1}$ есть лѣвая часть ур-ія первой полляры начала координатъ. Разсмотрѣнъ примѣръ: кривая $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Gz^2 = 0$.

19) Опредѣленіе предѣловъ въ кратныхъ интегралахъ. (Извѣстія СПБ. біологической лабораторіи, 1898).

20) О третьей кривизнѣ кривыхъ въ пространствѣ. (Извѣстія СПБ. біологической лабораторіи, 1898).

21) Etude directe des équations différentielles hypergéometriques aux quelles satisfont les periodes ω et η des intégrales elliptiques. (Извѣстія СПБ. біолог. лабор., 1899). Поводомъ къ работѣ послужила ошибка, допущенная Гальфеномъ при выводѣ относящагося сюда ур-ія (Halphen, I, p. 313). Анализъ автора возстановляетъ истинную форму этого ур-ія.

22) Объ алгебраическихъ уравненіяхъ, обладающихъ дробной линейной группой. (Извѣстія СПБ. біологической лабораторіи, 1901).

23) Вычисленіе площадей кривыхъ поверхностей и объемовъ посредствомъ введенія произвольныхъ параметровъ. (Извѣстія СПБ. біологической лабораторіи, 1901 г.).

Для вычисленія площадей авторъ вводитъ перемѣнное t, полагая $y = tx$. Для вычисленія объемовъ: $x = x$, $y = tx$, $z = vx$.

Методъ поясненъ многими примѣрами.

24) Sur un cas de réductibilité des intégrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXV 1901). Въ этой замѣткѣ авторъ приводитъ къ эллиптическимъ два интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c)(x^2 + 2ax - 4b - 3a^2)}}$$

и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2}}$.

При $a = 0$ первый интегралъ указанъ Эрмитомъ, а второй обращается въ интегралъ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27b^2}}$, приводимый при помощи подстановки $x^4 + 4bx = y$.

25) Объ одномъ случаѣ приведенія абелевыхъ интеграловъ ранга $p > 2$. (Труды отдѣленія физическихъ наукъ Импер. Моск. Общества Любителей Естествознанія... т. X, 1901).

Въ этой работѣ авторъ доказываетъ теорему, высказанную ранѣе безъ доказательства (въ мемуарѣ Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome. Bul. des Sc. mat., 2 serie, t. XX, 1896): Дается алгебраическое уравненіе $F(x, y) = 0$ (*) ранга p. Если между линейно независимыми интегралами перваго вида $u_1, u_2 \ldots u_{p-1}$, W, относящимися до кривой (*) найдется по крайней мѣрѣ одинъ эллиптическій W, то рангъ остальныхъ интеграловъ $u_1, u_2 \ldots u_{p-1}$ можетъ быть пониженъ, по крайней мѣрѣ, на единицу.

Авторъ поясняетъ теорему двумя примѣрами

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^3-1)^2 \cdot x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^{10} (x-c)^9}}.$$

26) О нѣкоторыхъ особыхъ свойствахъ абелевыхъ интеграловъ перваго ранга. (Извѣстія С.-П.Б. біологической лабораторіи, 1901).

Предметомъ этой работы служитъ нахожденіе опредѣленныхъ интеграловъ

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}, \quad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}},$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}, \quad \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

въ томъ случаѣ, когда предѣлы α и β интеграловъ

совпадаютъ съ критическими точками a, b, c, d. Авторъ доказываетъ, что всѣ эти интегралы суть опредѣленныя соизмѣримыя части періодовъ. Далѣе авторъ разсматриваетъ интегралы

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}},$$

и доказываетъ, что, если одинъ изъ нихъ равенъ соизмѣримой части періода, то соотвѣтствующій ему интегралъ третьяго вида $\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$,

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} \int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}},$$

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

при надлежащемъ выборѣ постояннаго H приводится къ логариѳмамъ.

27) Объ одномъ геометрическомъ приложеніи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. (Труды отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Моск. Общества любителей естествознанія, 1902).

Вычисленіе объема: 1) тѣла, ограниченнаго коническою поверхностью $xy - x^2 = z^2$, шаромъ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостью XOY и какою-либо плоскостью чрезъ OZ; 2) тѣла ограниченнаго коническою поверхностью $x^2 - y^2 = xz$, поверхностью втораго порядка $\alpha(x^2 - y^2) + \beta z^2 = 1$ и плоскостями XOY, XOZ и $y = tx$. Объемъ выражается псевдо-эллиптическимъ интеграломъ. Авторъ указываетъ въ концѣ геометрическую интерпретацію эллиптическаго интеграла перваго рода.

28) Опредѣленіе главныхъ направленій въ твердомъ тѣлѣ. (Извѣстія С.-ПБ. біологической лабораторіи, 1902).

29) Элементарный способъ вычисленія псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. (Извѣстія біологической лабораторіи, 1903). Элементарный методъ выясненъ на классическихъ примѣрахъ Halphen'a и Abel'я. Для интеграла: $u = \int \frac{(\alpha x + h)\,dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}}$ (*) гдѣ α и h неопредѣленны, авторъ полагаетъ $x^3 + ax^2 + bx + c = \lambda \operatorname{Sin}(u\sqrt{-1})$ и посредствомъ дифференцированія съ помощью (*) устанавливаетъ тождество $(3x^2 + 2ax + b)^2 x(x-1)(x-4)(x-9) = (\alpha x + h)^2 [(x^3 + ax^2 + bx + c)^2 - \lambda^2]$.

30) Sur l'inversion des integrales elliptiques). (Nouv. annales de math., 3 série t. XIX).

31) Двѣ задачи въ томъ-же журналѣ, 1903 г.

32) Recherche analytique sur la réduction des integrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 serie, t. XXVII, 1903).

Въ этой работѣ авторъ изучаетъ условія приведенія къ эллиптическимъ интеграловъ

$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ при помощи подстановки $\varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3)$,

$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}}$ при помощи подстановки $\varphi(x) = \lambda p^1(u, 0, g_3)$,

$u = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{R(x)}}$ при помощи подстановки $\varphi(x) = \lambda p^2(u, g_2 0)$,

$u = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{R(x)}}$ при помощи подстановки $\varphi(x) = \lambda p^3(u, 0, g_3)$;

здѣсь $R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $\varphi(x)$ полиномъ, а λ числовой множитель. Въ концѣ мемуара изучено приведеніе къ эллиптическому интеграла $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5 + x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}}$ при помощи подстановки $\varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3)$, гдѣ $\varphi(x)$ раціональная дробная функція. Теорія пояснена многими примѣрами.

33) De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXVII, 1903).

Въ этой работѣ авторъ примѣняетъ для преобразованія эллиптическихъ функцій методъ, развитый имъ въ предыдущемъ мемуарѣ для приведенія абелевыхъ интеграловъ. Какъ замѣчаетъ самъ авторъ, результаты получены отчасти уже Гальфеномъ.

Теорія пояснена многими примѣрами.

34) Recherche analytique sur la réduction des integrales abéliennes de seconde espéce. (Bulletin des Sciences mathem., 2 serie, t. XXVIII, 1904). Въ этомъ мемуарѣ авторъ изслѣдуетъ условія приведенія абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ второго рода при помощи метода, указаннаго въ одномъ изъ предыдущихъ мемуаровъ для приведенія абелевыхъ интеграловъ перваго рода. (Bulletin des Sc. mathem., 2 serie. t. XXVII, 1903).

35) Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions ellip-

tiques et la théorie analytique de la reduction des integrales abéliennes. (Bulletin des Sciencss mathématiques, 2 serie, t. XXVIII, 1904).

Въ первой части мемуара авторъ изслѣдуетъ условія приводимости абелевыхъ интеграловъ $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$, $\int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, гдѣ $R=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$, къ эллиптическимъ при помощи раціональной подстановки вообще. Затѣмъ онъ останавливается въ частности на подстановкахъ второй и третьей степени; попутно разсматривается преобразованіе третьей степени эллиптическихъ функцій.

36) Sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair. (Bulletin des Sciences mathem., 2 serie, t. XXIX, 1905).

Авторъ замѣчаетъ, что алгебраическая теорія преобразованія третьей степени, изложенная въ предыдущемъ мемуарѣ, не приложима къ преобразованіямъ высшихъ степеней. Пользуясь теоремой сложенія аргументовъ, авторъ трактуетъ задачу о преобразованіи нечетной степени $2n+1$, въ частности девятой степени.

37) Remarques sur la thèorie de la transformation des fonctions elliptiques et sur la rèduction des integrales abéliennes. (Bulletin des. Sciences mathem., 2 serie, t. XXX, 1906).

Въ первой части мемуара изучаются преобразованія функціи pu Вейерштрасса; результатъ полученъ отчасти Кипертомъ. Во второй части тѣмъ же методомъ трактуется приведеніе интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2n+1}+A_1x^{2n}+\ldots+A_{2n+1}}}$ при помощи подстановки $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lambda p(u,g_2,g_3)$. Въ третьей части также подстановка примѣнена для приведенія интеграла $\int \frac{(x-t)\,dx}{\sqrt{x^{2n+1}+p_1x^{2n}+\ldots p_{2n+1}}}$ при надлежаще выбранной постоянной t.

38) Quelques nouvelles remarques sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des integrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXXI, 1907).

Дается интегралъ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$.

Полагая $\sqrt{x4+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=x^2+\lambda+\frac{\mu}{y}$, гдѣ λ и μ произвольные коэффиціенты, получимъ алгебраическое ур-іе $f(x,y)=0$; $\Delta_x=x^4+6a_2x^2+4a_3x+a_4$ будетъ дискриминантомъ этого ур-ія, если разсматривать его, какъ ур-іе въ y. Пусть Δ_y дискриминантъ его, какъ уравненія въ x, тогда: $\int \frac{dx}{\sqrt{\Delta_x}}=A\int \frac{dy}{\sqrt{\Delta_y}}$, гдѣ A постоянно. Авторъ замѣчаетъ, что при помощи этого преобразованія весьма легко получить извѣстную формулу обращенія эллиптическихъ интеграловъ; затѣмъ примѣняетъ указанное свойство дискриминанта къ разысканію условій приводимости гиперэллиптическаго интеграла перваго вида $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, гдѣ $R(x)$ полиномъ степени выше четвертой, а $F(x)$ цѣлая функція съ надлежаще выбранными коэффиціентами.

39) Замѣтка объ остаточномъ членѣ ряда Тэйлора (Записки Горнаго Института, т. I, 1908).

40) Объ одномъ преобразованіи эллиптическихъ интеграловъ. (Записки Горнаго Института, т. I, 1908).

Преобразуется интегралъ $\int_\infty^z \frac{dx}{\sqrt{x^4+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}$ въ интегралъ $\int_\infty^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$ при помощи подстановки $\sqrt{x^4+6a_2x^2+4a_3x+a_4}=-x^2-\alpha+\lambda z$.

41) Новое доказательство основной теоремы алгебры. Доказательство существованія корня ур-я $F(x)=0$ основано на изученіи конформнаго изображенія разности $F(x_0+h)-F(x_0)$ въ окрестности точки x_0.

42) Объ одномъ классѣ приводимыхъ гиперэллиптическихъ интеграловъ (тамъ же).

Ищутся условія приводимости интеграловъ:

$$\int \sqrt{\frac{x\,dx}{x(x^2+a_1x+a_2)(x^2+b_1x+b_2)}} \quad \text{и}$$

$$\int \sqrt{\frac{x\,dx}{(x^3+ax^2+2abx+2bca)(x+d)x}}.$$

Къ эллиптическимъ при помощи раціональной подстановки $\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lambda p(u,g_2.g_3)$ наинизшей степени.

43) Объ одномъ приложеніи теоріи исключенія къ теоріи абелевыхъ интеграловъ. (Записки Горнаго Института, т. II, 1909 г.).

Въ началѣ мемуара авторъ трактуетъ о раціональныхъ преобразованіяхъ (*) $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$ алгебраическаго уравненія $F(x,y)=0$. Очевидно, что ξ есть корень алгебраическаго уравненія (1) $y^k+B_1(\xi)y^{k-1}+B_2(\xi)y^{k-2}+\ldots=0$, а η есть корень уравненія (2) $y^{k'}+D_1(\eta)y^{k'-1}+D_2(\eta)y^{k'-2}+\ldots=0$.

Если общій наибольшій дѣлитель полиномовъ въ

(1) и (2) первой степени относительно y, то приравнивая его нулю, найдемъ $y = Y(\xi, \eta)$. Подобнымъ же образомъ $x = X(\xi, \eta)$; X и Y раціональныя функціи. Въ такомъ случаѣ преобразованіе (*) будетъ бираціональнымъ. Авторъ останавливается въ дальнѣйшемъ на такихъ преобразованіяхъ, которые не будутъ бираціональными; тогда общій наибольшій дѣлитель полиномовъ въ (1) и (2) будетъ выше первой степени относительно y и рангъ преобразованнаго уравненія $R(\xi,\eta) = 0$ будетъ ниже ранга даннаго уравненія.

Авторъ примѣняетъ эти соображенія для приведенія къ эллиптическимъ интеграловъ:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}}, \; u =$$

$$= \int \frac{(x - t_1)(x - t_2)\ldots(x - t_p)\,dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}};$$ въ частности

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4a)(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + d)}}$$ и

$$\int \frac{2(x + p)\,dx}{\sqrt{(x^4 + 4p^3x + c)(x4 + 2px^3 + p^2x^2 + 6p^3x + 9p^4)}}.$$

Въ концѣ мемуара тѣмъ же методомъ авторъ трактуетъ задачу о преобразованіи второй степени эллиптическихъ функцій.

44) Теоремы, относящіяся до уравненія Монжа и Ампера. (Записки Горнаго Института, т. III, 1911 г.). Воспроизведеніе лекціи, читанной о методѣ Монжа.