IV. Его-же. Выводъ формулы для вычисленія граней исходнаго пояса по системѣ зональныхъ вычисленій.

Въ «Сокращенномъ курсѣ кристаллографіи» на стр. 250 и слѣд. излагаются основы системы зональныхъ вычисленій, по которой каждая грань f опредѣляется двумя координатами, представляющими углы между поясами—однимъ постояннымъ, заключающимъ въ себѣ двѣ основныя грани a и b, и другимъ, опредѣляемымъ гранями f съ a и f съ b.

Это система, по которой кристаллографическія вычисленія достигли высшей возможной простоты, такъ какъ всѣ вычисленія сводятся къ простымъ сложеніямъ и вычитаніямъ по основной формулѣ, приведенной на стр. 252, а на стр. 253 показано ея примѣненіе для вычисленій анортита.

Геометрическими константами, даже для триклиннаго кристалла, служатъ пять угловъ, величины которыхъ легко опредѣлить непосредственнымъ измѣреніемъ на универсальномъ гоніометрѣ, и тогда не нужно никакихъ предварительныхъ вычисленій; по этимъ же пяти угловымъ величинамъ съ помощью основной формулы опредѣленіе любой грани, нетолько измѣренной, но и всякой возможной, данной индексами символа, производится, какъ упомянуто, простыми сложеніями и вычитаніями, но за исключеніемъ граней, находящихся въ самомъ исходномъ поясѣ, то-есть поясѣ граней a и b. И въ учебникѣ не приведено формулы для вычисленія угловъ между гранями въ этомъ поясѣ.

Здѣсь я и приведу выводъ этой замѣчательной и въ высшей степени простой формулы.

Чтобы къ этому поясу можно было примѣнять основную формулу, достаточно опредѣлить углами хоть одну грань (которая будетъ третьей) этого пояса. Выберемъ промежуточную грань e, индексы которой представляютъ суммы индексовъ обѣихъ исходныхъ граней a и b. Въ случаѣ анортита это будетъ $(\bar{1}\bar{1}2) = (0\bar{1}1) + (\bar{1}0\bar{1})$.

Вообразимъ себѣ поясъ, заключающій въ себѣ эту грань и еще какую-нибудь, въ сущности совершенно произвольную, лишь бы она не принадлежала поясу исходныхъ граней.

Въ этомъ поясѣ мы можемъ вообразить безконечное множество различныхъ граней, въ томъ числѣ и такихъ, которыя по своему положенію въ какой-угодно степени приближаются къ промежуточной грани.

Для каждой такой грани мы можемъ по основной формулѣ вычислить координаты, а если возьмемъ такую, которая безконечно близка къ промежуточной, то ея координатами будутъ безконечно-малые углы (въ сущности безконечно-мало отличающіеся отъ значеній 0 и π), но все-таки и для нихъ основная формула остается примѣнимою, и потому для каждой грани будемъ имѣть опредѣленное отношеніе между координатами—углами и ихъ котангенсами, которыя въ данномъ случаѣ могутъ быть замѣнены обратными отношеніями синусовъ (такъ какъ косинусы этихъ угловъ безконечно приближаются къ 1-цѣ); отношеніе же синусовъ въ полученномъ сферическомъ трехугольникѣ, двѣ другія вершины котораго соотвѣтствуютъ исходнымъ гранямъ, равны отношенію синусовъ противоположныхъ сторонъ то-есть угловъ, образуемыхъ разсматриваемою гранью съ обѣими основными, а эти углы въ сущности и не отличаются отъ искомыхъ угловъ съ тѣми же гранями, грани промежуточной (то-есть $\bar{1}12$).

Въ предѣлѣ эти отношенія становятся математически точными, и значитъ наша задача сводится къ отысканію символовъ граней нѣкотораго, въ сущности произвольнаго пояса, вычисленію для этой грани угловъ по основной формулѣ и переходу къ предѣлу.

Выберемъ для пояса напр. грань (111). Тогда, какъ извѣстно изъ элементовъ кристаллографіи, символъ любой грани пояса получается выраженіемъ $x(\bar{1}12) + y(111)$, гдѣ x и y какія угодно цѣлыя числа; этотъ символъ есть, слѣдовательно $(-x+y;\ -x+y;\ 2x+y)$.

По отношенію къ исходной грани $[0\bar{1}1]$ эта грань образуетъ поясъ $\left|\begin{matrix} -x+y; & -x+y; & 2x+y \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right| =$

$$= [x+2y;\ x-y;\ x-y].$$

Чтобы составить его изъ символовъ исходныхъ поясовъ то-есть $[111]$ и $[0\bar{1}1]$, нужно написать $(x+2y)\ [111] + 3y\ [0\bar{1}\bar{1}] = [x+2y;\ x+2y;\ x+2y] - [0;\ 3y;\ 3y] = [x-y;\ x-y;\ x-y]$.

Итакъ поясовой символъ, соотвѣтствующій грани, есть $|x+2y;\ 3y|$.

Примѣняя основную формулу для этого пояса, на координату $3y$ $\operatorname{cotg}\ |m\,n| = (y-x)\ \operatorname{cotg}\ |01| + (x\ \operatorname{cotg}\ |11|$.

Для каждой грани, безконечно-близкой къ грани число y безконечно-мало сравнительно съ числом потому въ предѣлѣ имѣемъ $3y\ \operatorname{cotg}\ |m\,n| = -x\ \operatorname{cotg}\ + x\ \operatorname{cotg}\ |11| = x(\operatorname{cotg}\,|11| - \operatorname{cotg}\ |01|)$.

Такое же выраженіе мы имѣемъ и для другой ко нататы той же грани, какъ опредѣляющей поясъ съ для отличія отмѣтимъ соотвѣтственныя выраженія апо фами.

То-есть $3y\ \operatorname{cotg}'\ |m\,n| = x\ (\operatorname{cotg}'\ |11 - \operatorname{cotg}'\ |$ отсюда вытекаетъ соотношеніе:

$$\frac{\operatorname{cotg}\ |m\,n|}{\operatorname{cotg}'\,|m\,n|} = \frac{\operatorname{cotg}\ |11| - \operatorname{cotg}\,|01|}{\operatorname{cotg}'\,|11| - \operatorname{cotg}'|01|} = k \ldots\ldots$$

Если означимъ грань $(0\bar{1}1)$ чрезъ a, а $(\bar{1}01)$ чрезъ грань $(\bar{1}\bar{1}2)$ чрезъ e, то, согласно сказанному выше, получ

$$\frac{\operatorname{cotg}\ |m\,n|}{\operatorname{cotg}'\,|m\,n|} = \frac{\sin'\ |m\,n|}{\sin\ |m\,n|} = \frac{\sin(ae)}{\sin(be)} = k \text{ или } \sin(ae) = k\sin(be) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вотъ это и есть искомая формула, позволяющая числить уголъ ae.

Для производства самого вычисленія замѣтимъ, $\sin(ae) = \sin(ab - be) = \sin ab\ .\ \cos be - \cos ab\ \sin be = \sin(ab)\ \sqrt{1-\sin^2(be)} - \cos(ab)\ .\ \sin(be)$.

Возвышая обѣ части въ квадратъ и произведя со вѣтствующія сокращенія, окончательно получаемъ:

$$\sin^2(be) = \frac{\sin^2(ab)}{k^2 + 2k\cos(ab) + 1}, \ldots\ldots\ldots$$

а уголъ (ab) есть первый изъ данныхъ пяти основны угловъ.

11 декабря 1912 г.