7. Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ.

Н. М. Крылова.

(Доложено 17 сентября).

При разложеніи, „произвольныхъ“ функцій въ ряды по способу наименьшихъ квадратовъ коэффиціенты ряда, какъ извѣстно [1]) образуются по вполнѣ опредѣленному закону, а именно законъ образованія коэффиціентовъ есть тотъ, который имѣлъ бы мѣсто въ случаѣ равномѣрной сходимости ряда, т.-е. другими словами коэффиціенты пріобрѣтаютъ видъ такъ называемыхъ коэффиціентовъ Fourier и рядъ будетъ такъ наз. рядомъ Fourier разлагаемой функціи; въ частномъ случаѣ разложенія по тригонометрическимъ функціямъ вида:

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \cos kx + a'_k \sin kx).$$

коэффиціенты a_k, a'_k будутъ:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx;\quad a'_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Съ другой стороны на основаніи извѣстнаго предложенія Du-Bois-Reymond'a имѣемъ: „если за исключеніемъ такъ наз. приводимаго ансамбля точекъ, тригонометрическій рядъ сходится въ интервалѣ $(0,2\pi)$ и представляетъ нѣкоторую ограниченную функцію, то этотъ рядъ будетъ рядомъ Fourier разлагаемой функціи“. Отсюда выясняется важность понятія о т. н. эквивалентности между функціей и ея рядомъ Fourier въ случаѣ если даже послѣдній расходится, впервые, если не ошибаюсь, введенной Hurwitz'омъ [3]), предложившимъ замѣнить теорію тригонометрическихъ рядовъ болѣе общей теоріей коэффиціентовъ Fourier. Въ этой послѣдней теоріи особую важность имѣетъ теорема объ опредѣленіи значенія интеграла $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx$ помощью коэффиціентовъ Fourier функціи $f(x)$ по слѣдующей формулѣ:

$$(1)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\,a_0^2 + \sum_1^{\infty}(a_k^2 + a_k'^2),$$

извѣстной въ наукѣ подъ именемъ формулы Parseval-Стеклова. Изучая доказательства этой „основной теоремы“ [4]), предложенныя въ разное время различными учеными нельзя не отмѣтить того обстоятельства, что всѣ онѣ большей частью основываются на тѣхъ или иныхъ способахъ суммируемости тригонометрическихъ рядовъ, т.-е. сопоставленіи съ даннымъ тригон. рядомъ нѣкоторой опредѣленнымъ образомъ составленной функціи, которая по опредѣленію будетъ суммой ряда и дѣйствительно будетъ таковой, если данный рядъ сходится. Въ подтвержденіе сказаннаго замѣтимъ, что доказательство проф. В. А. Стеклова [5])

---

[1]) Gram.
[2]) Т. к. относительно функціи $f(x)$ дѣлаемъ только предположеніе о томъ, что она ограничена и интегрируема.
[3]) Hurwitz. Uber die Fourierschen Konstanten integrierbarer Functionen. Math. Annal. 1903.
[4]) Ibid. p. 429.
[5]) Stekloff. Sur la théorie des series trigonometriques. Cracovie 1903.

основывается на методѣ суммированія Riemann'a [1]); доказательство Hurwitz'a—на методѣ суммированія Fejér'a; доказательство Fatou [2]) — на методѣ суммированія Poisson'a. Естественно поэтому ожидать, что и другіе методы суммированія могли-бы привести къ тому же результату; въ послѣдующемъ позволимъ себѣ привести еще одно доказательство „уравненія замкнутости", какъ называетъ проф. Стекловъ формулуо (1). Доказательство это основано на слѣдующемъ методѣ суммированія тригонометрическихъ рядовъ, предложенномъ Weierstrass'омъ. Разсматривая рядъ:

$$(2)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{a_0}{2}+(a_1\cos\varphi+a_1'\sin\varphi)+\ldots(a_m\cos m\varphi+a'_m\sin m\varphi)+\ldots,$$

который можетъ и не быть сходящимся, Weierstrass [3]) множитъ общій членъ ряда на e^{-m^2t}, гдѣ t положительное постоянное и образуетъ такимъ образомъ рядъ:

$$(3)\quad \ldots\ldots F(\varphi,\ t)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos\varphi+a'_1\sin\varphi)e^{-t}+\ldots(a_m\cos m\varphi+a'_m\sin\varphi)e^{-m^2t}+\ldots$$

сходящійся при $t<0$.

Замѣняя a_m и a'_m, которыя выражаются формулами Fourier,—ихъ значеніями, Weierstrass представляетъ рядъ (3) въ слѣдующемъ видѣ:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Vf(\psi)d\psi,$$

гдѣ

$$V=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n(\varphi-\psi)e^{-n^2t}$$

и потому выражается помощью функціи

$$\Theta(\varphi)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos n\varphi e,^{-n^2t}$$

которая, какъ извѣстно, изъ теоріи эллиптическихъ функцій (см. Halphen. t. I, p. 264), можетъ быть представлена еще и такимъ образомъ:

$$\Theta\ (\varphi)=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{-\frac{(\varphi-2n\pi)^2}{4t}};$$

отсюда имѣемъ:

$$u=\mathrm{F}\,(\varphi,t)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}e^{-\frac{(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}f(\psi)d\psi\right].$$

Замѣчая, что при $f(\psi)=1$ [на основаніи извѣстныхъ свойствъ интеграловъ отъ тригон. функцій, взятыхъ въ предѣлахъ отъ 0 до 2π], $\mathrm{F}\,(\varphi,t)=1$, предложимъ себѣ доказать что:

$$(4)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lim_{t=0}\int_0^{2\pi}[\mathrm{F}(\varphi,t)-f(\varphi)]\,d\varphi=0;$$

---

[1]) Въ послѣднее время (C. R. 1910) проф. Стекловъ далъ еще одно доказательство этой важной теоремы, о чемъ скажемъ ниже. Въ рядѣ работъ проф. Стекловъ обобщилъ для многихъ фундаментальныхъ функцій, встрѣчаемыхъ въ матем. физикѣ „уравненіе замкнутости" доказанное для тригономет. функцій проф. Ляпуновымъ еще въ 1896 г. (см. Ibid стр. 713).

[2]) Fatou. Acta Mathematica. 1906, стр. 350.

[3]) Picard. Traité d'Analyse, t. I, стр. 283. (2 edition).

для этой цѣли на основаніи предыдущаго замѣчанія, представимъ разность $F(\varphi,t)-f(\varphi)$ такимъ образомъ:

$$(5)\quad \ldots\ldots\ F(\varphi,t)-f(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{-(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right][f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi,$$

и слѣдовательно:

$$J_t=\int_0^{2\pi}[F(\varphi,t)-f(\varphi)]\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{-(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right][f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi.$$

Такъ какъ $f(\varphi)$ принадлежитъ къ категоріи интегрируемыхъ, то обозначая черезъ ε и σ произвольнымъ образомъ выбранныя положительныя числа, можемъ установить такое дѣленіе Δ интервала $(0,2\pi)$, что сумма тѣхъ отрѣзковъ дѣленія, на которыхъ колебаніе $f(\varphi)$ больше σ, будетъ меньше ε. Обозначимъ для краткости дѣленія, на которыхъ колебанія $f(\varphi)$ будутъ больше σ и меньше или равно σ, соотвѣтственно черезъ δ_1 и δ_2; въ каждый изъ послѣднихъ включимъ отрѣзокъ δ'_2 такъ, чтобы $\delta_2=\delta'_2+\delta''_2$ и чтобы δ'_2 не имѣло общихъ точекъ съ δ_1, а сумма δ''_2 была бы меньше ε, что всегда можно сдѣлать. Тогда интегралъ J_t можетъ быть очевидно представленъ такъ:

$$J_t=\sum_{\delta'_2}\int_{\delta'_2}[F(\varphi,t)-f(\varphi)]\,d\varphi+\sum_{\delta''_2}\int_{\delta''_2}[F(\varphi,t)-f(\varphi)]\,d\varphi+\sum_{\delta'_1}\int_{\delta'_1}[F(\varphi,t)-f(\varphi)]d\varphi.$$

Изъ формулы (5) и соотношенія:

$$(5^1)\quad \ldots\ldots\ 1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{-(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right]d\varphi$$

убѣждаемся, что:

$$|F(\varphi,t)-f(\varphi)|\leq A,$$

гдѣ A означаетъ колебаніе $f(\varphi)$ интервалѣ $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

Съ другой стороны на основаніи вышесказаннаго:

$$\sum_{\delta''_2}\delta''_2<\varepsilon,\quad \sum_{\delta_1}\delta_1<\varepsilon,$$

а потому, если покажемъ, что въ интегралахъ 1-ой суммы:

$$(6)\quad \ldots\ldots\ |F(\varphi,t)-f(\varphi)|<\sigma+\varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1 произвольно выбранное положительное число, то:

$$|J_t|<(\sigma+\varepsilon_1)\sum_{\delta'_2}\delta'_2+A\sum_{\delta''_2}\delta''_2+A\sum_{\delta}\delta_1<2\pi(\sigma+\varepsilon_1)+2A\varepsilon,$$

и т. к. это неравенство имѣетъ мѣсто при сколь угодно маломъ t, а σ, ε, ε_1 могутъ быть выбраны произвольно малыми, то

$$(7)\quad \ldots\ldots\ \lim_{t=0} J_t=0,$$

что и т. д.

Остается показать справедливость неравенства (6). Итакъ пусть колебаніе $f(\varphi)$ въ интервалѣ $\delta_2=(m,m_1$ будетъ σ, тогда:

$$(8).\left|\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_m^{m_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{-(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right][f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi\right|\leq\delta\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_m^{m_1}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{\frac{-(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right]d\psi$$

---

[1]) Изъ этой формулы можно также получить нижеслѣдующіе результаты, слѣдуя тому методу, помощью котораго проф. Ляпуновъ устанавливаетъ урав. замкнутости для сферическихъ функцій въ мемуарѣ: «Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'equilibre». 1907. Зап. Ак. Наукъ.

$$\leq \delta \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\frac{(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right]d\psi \leq \delta.$$

съ другой стороны, пусть $\delta'_2 = (m', m'_1)$ есть интервалъ, цѣликомъ заключенный въ интервалъ δ_2, такъ, что:

$$m < m' < m_1' < m_1,$$

и φ можетъ принимать значеніе только въ интервалѣ δ'_2, разложимъ интегралъ такимъ образомъ:

$$9)\ldots\ F(\varphi,t) - f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{m}\left[\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-\frac{(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}}\right][f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_m^{m_1} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{m_1}^{2\pi}$$

относительно интеграла, взятаго въ предѣлахъ m, m_1 имѣетъ мѣсто неравенство (8), два же другіе интеграла въ предѣлѣ при $t=0$ стремятся къ нулю; въ самомъ дѣлѣ на основаніи очевиднаго неравенства $e^{-\beta^2} < \frac{1}{\beta^2}$ (для достаточно большого β) имѣемъ право написать *) (если n не $=0$):

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(\varphi-\psi-2n\pi)^2}{4t}} < \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{(2\sqrt{t})^2}{(\varphi-\psi-2n\pi)^2} < \sqrt{t}\,\frac{B}{n^2},$$

гдѣ B есть нѣкоторое опредѣл. количество, а потому всѣ они стремятся къ нулю, равно какъ и ихъ сумма при $\lim t=0$, значитъ остается изучить только такіе интегралы:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{m} e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}}[f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi;\ \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_{m_1}^{2\pi} e^{-\frac{(\varphi-\psi)^2}{4t}}[f(\psi)-f(\varphi)]\,d\psi;$$

въ каждомъ изъ нихъ $\varphi-\psi$ не $=0$, слѣдовательно, онѣ могутъ быть сдѣланы сколь угодно малыми при достаточно маломъ t, такъ что (9) намъ даетъ:

$$|F(\varphi,t) - f(\varphi)| < \delta + \varepsilon_1,$$

что и т. д.

Изъ формулы (7):

$$\lim_{t=0}\int_0^{2\pi} |F(\varphi,\ t) - f(\varphi)|\,d\varphi = 0$$

обычнымъ путемъ выводимъ, что:

$$(10)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lim_{t=0}\int_0^{2\pi}[F(\varphi,t)^2 - f(\varphi)^2]d\varphi = 0$$

Въ самомъ дѣлѣ, т. к. $f(\varphi)$ ограничена, то $|f(\varphi)| < K$ и потому на основаніи (5'):

$$|F(\varphi,\ t)| < K,$$

а потому:

$$\left|\int_0^{2\pi}[F(\varphi,t)^2 - f(\varphi)^2]d\varphi\right| < 2K\int_0^{2\pi}\left|F(\varphi,t) - f(\varphi)\right|d\varphi.$$

откуда и слѣдуетъ формула (10).

Принимая это во вниманіе, замѣтимъ, что рядъ, выражающій $F(\varphi,t)$ есть равномѣрно-сходящійся, а потому умножая обѣ части формулы (3) на $F(\varphi,t)$ имѣемъ право интегрировать почленно, что намъ даетъ:

$$(11)\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi,t)^2 d\varphi = \frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi,t)d\varphi + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[a_n e^{-n^2t}\int_0^{2\pi} F(\varphi,t)\cos n\varphi\,d\varphi + a'_n e^{-n^2t}\int_0^{2\pi} F(\varphi,t)\sin n\varphi d\varphi\right];$$

*) См. Picard. Ibid. стр. 285.

но очевидно имѣемъ:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi, t)\cos n\varphi d\varphi = a_n e^{-n^2 t};$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi, t)\cos n\varphi d\varphi = a'_n e^{-n^2 t};$$

а потому формула (11) принимаетъ видъ:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi, t)^2 d\varphi = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n^2 + a'^2_n] e^{-n^2 t},$$

каковое равенство, очевидно, можетъ быть представлено въ видѣ *):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi, t)^2 d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)^2 d\varphi - \underbrace{\left[a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n^2 + a'^2_n)\right]}_{W} +$$

$$+ \underbrace{\left[a_0^2 + \sum_{n=1}^{n=u} (a_n^2 + a'^2_n)(1 - e^{-n^2 t})\right]}_{W'}$$

$$= W + W'$$

гдѣ очевидно W и W′ будутъ положительными, переходя къ предѣлу при $t = 0$ и замѣчая, что предѣлъ лѣвой части равенъ нулю на основаніи формулы (10), имѣемъ $lim\ W = 0$, т.-е:

$$(12) \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)^2 d\varphi = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n^2 + a'^2_n),$$

что и представляетъ искомую формулу Parseval—Стеклова.

Эта теорема названа проф. В. А. Стекловымъ „уравненіемъ замкнутости“, ибо она позволяетъ утверждать равенство нулю всякой непрерывной функціи (для прерывной, но интегрируемой функціи очевидно вводится добавочное условіе: за исключеніемъ быть можетъ точекъ ансамбля нулевого измѣренія), коэффиціенты Fourier которой равны нулю. Формула (12) доказываетъ это утвержденіе.

Отсюда вытекаетъ, что равномѣрно сходящійся рядъ Fourier дѣйствительно представляетъ функцію, данную для разложенія,—въ этомъ убѣждаемся обычнымъ пріемомъ интегрированія почленно, которое въ данномъ случаѣ допустимо [1]). Теорема Стеклова—Parseval'я имѣетъ связь, какъ извѣстно, со слѣдующей теоремой Weierstrass'a о приближенномъ представленіи функцій **): „можно всегда найти такой конечный рядъ Fourier $F(\varphi)$, который представлялъ бы данную непрерывную функцію $f(\varphi)$ для всякаго значенія аргумента φ съ напередъ заданнымъ приближеніемъ 3ε“. Теорема эта также **) позволяетъ установить формулу Parseval—Стеклова и среди различныхъ методовъ доказательства ея наиболѣе простыя даны проф. Стекловымъ и проф. Volterra ***); доказательство послѣдняго весьма кратко и основывается на предвари-

---

*) Имѣемъ право разсуждать такимъ образомъ, ибо какъ извѣстно, $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}(a_n^2 + a'^2_n)$ есть рядъ сходящійся сумма его меньше или равна $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$.

**) Picard. Traité d'Analyse, p. 277.

**) Picard. Лекціи весенняго семестра. 1909. (Sorbonne).

***) Picard. Traité d'Analyse, p. 286.

[1]) Stekloff et Tamarkine. Problème des vibrations transversales d'une verge élastique homogène. Rendiconti del Circolo Palermo. 1911 г.

тельномъ знакомствѣ съ теоріей рядовъ Fourier; естественно поэтому ожидать, что и теорема Стеклова—Parseval'я можетъ быть весьма просто доказана (и при томъ независимо, что весьма важно, отъ теоремы Weierstrass'a) основываясь на предварительномъ знаніи теоріи рядовъ Fourier. Это и было сдѣлано проф. Стекловымъ, установившемъ такую теорему *): „если уравненіе замкнутости имѣетъ мѣсто для функціи, обладающей послѣдовательными непрерывными производными до p-го порядка (гдѣ p есть нѣкоторое цѣлое число), то оно имѣетъ мѣсто и для всякой интегрируемой функціи".

§ 2. Замѣтивъ это, обратимъ наше вниманіе на то, что всякій тригонометрическій рядъ Fourier, можетъ быть, какъ извѣстно (см. напр. Lebesgue. Leçons sur les séries trigonometriques, p. 103) интегрируемъ почленно; по данному ряду Fourier функціи $f(x)$, который можетъ быть и расходящимся, путемъ этого процесса,—интегрированія почленно, образуемъ такимъ образомъ нѣкоторую вполнѣ опредѣленную функцію:

$$(13) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \int_a^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x)$$

что и представитъ собою вполнѣ опредѣленный процессъ для суммируемости ряда, ибо, очевидно, по $\mathrm{F}(x)$ изъ (13) можно получить и функцію $f(x)$ (послужившую для образованія ряда Fourier) во всѣхъ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ $f(x)$ есть производная своего неопредѣленнаго интеграла. Принимая все это во вниманіе, дадимъ методъ доказательства „уравненія замкнутости", который по нашему мнѣнію, является наиболѣе простымъ и наиболѣе прямымъ изъ всѣхъ существующихъ. Такъ какъ рядъ:

$$\Sigma a_n \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos nx\,dx$$

сходится равномѣрно, то можно назначить столь большое число N, что для всѣхъ значеній $n > \mathrm{N}$ и для всѣхъ значеній x въ интервалѣ $(0,2\pi)$, имѣемъ:

$$\left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx - \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos\ nx\,dx \right| < \varepsilon_1,$$

гдѣ ε_1, сколь угодно малая величина.

Съ другой стороны, такъ какъ *cos* есть дифференцируемая функція и производная *cos nx* по абсолютной величинѣ очевидно меньше n, то

$$(14) \quad \ldots \ldots \left| \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos\ nx\,dx - \cos nx \right| < nh, \text{ (для всѣхъ значеній } x \text{ въ интервалѣ } (0,2\pi);$$

отсюда видимъ, что разность:

$$(15) \quad \ldots \ldots \ldots \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos nx\,dx - \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos nx.$$

по абсолютной величинѣ меньше

$$\mathrm{A}(1+2+3+\ldots n)h = \frac{\mathrm{A}\,n(n+1)h}{2}: \text{ гдѣ } \mathrm{A} > a_i \ (i = 0, 1, 2 \ldots n)$$

а потому взявъ h меньшимъ напр.

$$\mathrm{A}\frac{2}{n(n+1)n},$$

видимъ, что при стремленіи n къ безконечности, т. е. при достаточно маломъ h, разность (15) можетъ быть сдѣлана сколь угодно малой; итакъ при достаточно большомъ n и достаточно маломъ h, интегралы:

$$(16) \quad \ldots \ldots \ldots \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \right]^2 dx$$

и

$$(17) \quad \ldots \ldots \ldots \int_0^{2\pi} (f(x) - \sum_n a_n \cos nx)^2\,dx$$

будутъ отличаться другъ отъ друга на произвольно малую величину, убывающую съ возрастаніемъ n и съ убываніемъ h; но при достаточно маломъ h, интегралъ (16) можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, а интегралъ (17) очевидно равенъ:

*) Stekloff. Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions. 1911, p. 12.

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 - \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n{}^2,$$

отсюда заключаемъ:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n^2,$$

и, вообще говоря, имѣетъ мѣсто формула (12), ибо формулы (14) и (15) имѣютъ мѣсто не только для *cosinus*'овъ но и для *sinus*'овъ и мы получаемъ такимъ образомъ формулу Стеклова—Parseval'я.

Доказательство это очевидно можетъ быть обобщено и на случай болѣе общей системы ортогональныхъ функцій.

§ 3. Наиболѣе важнымъ условіемъ, налагаемымъ на функцію, для сходимости ея ряда Fourier, безспорно является такъ называемое условіе Lipchitz'a:

$$|f(x+h) - f(x)| < kh,$$

гдѣ k—положительное постоянное или что все равно,—эквивалентное этому условіе [1]): производныя числа (nombres derivées) функціи f ограничены. Вслѣдствіе представляемой имъ аналогіи съ часто примѣняемыми условіями сходимости рядовъ и интеграловъ, условіе Lipchitz'a позволяетъ иногда легко рѣшить вопросъ о томъ, когда оно выполняется—чѣмъ и оттѣняется практическая важность этого условія. Предложимъ себѣ здѣсь поэтому, отличнымъ отъ обычнаго путемъ, доказать возможность разложенія функціи, удовлетворяющей вышеупомянутому условію въ тригонометрическій рядъ.

Итакъ разсматривая нѣкоторую функцію $f(x)$, опредѣленную въ $0 \leq x < 2\pi$, подчинимъ её условію періодичности: $f(x+2\pi) = f(x)$, которымъ она и опредѣлится такимъ образомъ во всемъ интервалѣ $(0, \infty)$; замѣтимъ далѣе, что при условіи существованія двухъ опредѣленныхъ ограниченныхъ первыхъ производныхъ, функція $f(x)$ разлагается въ тригонометрическій рядъ:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

какъ въ этомъ можно убѣдиться интегрированіемъ по частямъ; въ самомъ дѣлѣ:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left|\frac{f(x)\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{\pi n}\,dx = \left|-\frac{f'(x)\cos nx}{\pi n^2}\right|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{f''(x)\cos nx\,dx}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \left|-\frac{f(x)\cos nx}{\pi n}\right|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{f'(x)\cos nx\,dx}{\pi n} = \frac{f(+0)-f(2\pi-0)}{\pi n} - \int_0^{2\pi}\frac{f''\sin nx\,dx}{\pi n^2},$$

отсюда, принимая во вниманіе, что рядъ $\Sigma\frac{1}{n^2}$ сходится, и что рядъ

$$S(x) = \frac{f(+0)-f(2\pi-0)}{\pi}\,\Sigma\frac{\sin nx}{n}$$

сходится равномѣрно внутри интервала $(0,2\pi)$ [2]), убѣждаемся, что рядъ правой части формулы (18) сходится равномѣрно внутри интервала $(0,2\pi)$, а потому представляетъ $f(x)$ [3]) вездѣ за исключеніемъ быть можетъ точекъ $x=0$, $x=2\pi$ [4]).

---

[1]) Lebesgue. Leçons sur l'integration, p. 72.

[2]) Lebesgue. Leçons sur les series trigonometriqus, p. 46.—Доказательство основано на извѣстной леммѣ Абеля.

[3]) Въ этомъ можно убѣдиться, напр. разсмотрѣніемъ интеграла Poisson'a, изученіе котораго, какъ извѣстно, показываетъ, что разъ рядъ Fourier функціи $f(x)$ сходится, то онъ представляетъ функцію $f(x)$.

[4]) Обычно примѣняемымъ въ такихъ случаяхъ разсужденіемъ, можно убѣдиться, что въ этой точкѣ рядъ (18) стремится къ $\frac{f(+0)+f(-0)}{2}$; въ самомъ дѣлѣ, полагая: $f(x) = S(x) + T(x)$, имѣемъ на основаніи предыдущаго: $T(x)$ непрерывна въ точкѣ $x=0$, а потому $f(+0) = S(+0) + T$; $f(-0) = S(-0) + T$, но $S(x)$ нечетно, поэтому $S(+0) + S(-0) = 0$, слѣдовательно: $T = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}$; съ другой стороны $S(x) = 0$ при $x=0$, а потому $f(0) = T(0) = T = \frac{f(+0)+f(-0)}{2}$, что и требуется доказать.

Итакъ для $f(x)$ удовлетворяющей вышеприведеннымъ условіямъ, соотвѣтственный рядъ Fourier будетъ равномѣрно сходящимся во всякомъ интервалѣ (a, b), лежащимъ внутри интервала $(0, 2\pi)$, и для всѣхъ точекъ интервала (a, b). Поэтому можно назначить столь большое число N, что при $n > N$, остатокъ ряда (18) въ обычной формѣ Dirichlet:

$$(19) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_n(x) = S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(x)}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}} \sin(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}\, d\alpha,$$

можетъ быть сдѣланъ меньше сколь угодно малаго числа ε.

Предложимъ себѣ теперь доказать, что въ томъ-же интервалѣ равномѣрно стремится къ нулю остатокъ R^1_n ряда Fourier функціи $\varphi(x)$ удовлетворяющей условію Lipchitz'a и для этой цѣли замѣтимъ, что за функцію $f(x)$ можетъ быть принята такая

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\, dx,$$

гдѣ $f(x)$ обладаетъ первой производной, а $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условію Lipchitz'a (что единственно существенно) тогда обозначая остатокъ для $\varphi(x)$ черезъ R^1_n, составимъ разность:

$$(20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_n(x) - R^1_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left[\frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} \varphi(x)\, dx - \varphi(\alpha)\right] - \left[\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\, dx - \varphi(x)\right]}{2\sin\frac{\alpha - x}{2}} \sin(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}\, dx$$

и покажемъ, что при достаточно большомъ значеніи n и достаточно маломъ h, разность эта стремится къ нулю; для этой цѣли, замѣчая, что:

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\, dx - \varphi(x)\right| < kh,$$

гдѣ k есть опредѣленное число, независящее ни отъ x, ни отъ h убѣждаемся, что интегралъ правой части формулы (20) будетъ меньше чѣмъ выраженіе:

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{kh}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}}{\sin\frac{\alpha - x}{2}}\right| dx < \frac{kh\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(2n+1)\frac{\alpha - x}{2}}{\sin^2\frac{\alpha - x}{2}}\, dx};$$

но интегралъ, стоящій въ правой части формулы (21) представляетъ собой очевидно часть извѣстнаго интеграла Fejér'a:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos n(\alpha - x)}{1 - \cos(\alpha - x)}\, dx = 2n\pi \text{ (гдѣ } n \text{ есть цѣлое число)},$$

подъинтегральная функція котораго положительна, а потому правая часть неравенства (21) будетъ очевидно порядка:

$$A\, kh\sqrt{n},$$

гдѣ A есть постоянная величина, поэтому положивъ h равнымъ напр. $\frac{1}{n}$, что сдѣлать можно, ибо h не зависитъ отъ n, видимъ, что выраженіе

$$\left|R_n - R^1_n\right|$$

для всѣхъ x интервала (a, b) при достаточно большомъ n, можетъ быть сдѣлано сколь угодно малымъ.

Отсюда слѣдуетъ равномѣрная внутри интервала (a, b) сходимость ряда Fourier для функціи $\varphi(x)$ повторяя тоже разсужденіе съ функціями

$$\varphi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \psi(x)\, dx,$$

(гдѣ $\psi(x)$ есть непрерывная функція, удовлетворяющая условію Lipchitz'a) и $\psi(x)$, убѣдимся въ справедливости теоремы:

Всякая непрерывная функція $\psi(x)$, удовлетворяющая условію Lipchitz'a, разлагается въ интервалѣ (a, b) $(0<a<b<2\pi)$ въ равномѣрно сходящійся тригонометрическій рядъ.

Аналогичную теорему въ болѣе общемъ случаѣ функцій Sturm'a и Liouvill'я получена проф. В. А. Стекловымъ; доказательство, приводимое нами кромѣ нѣкоторыхъ деталей, отличается отъ доказательства В. А. Стеклова въ томъ, что В. А. Стекловъ устанавливаетъ неравенства для R_n съ помощью общихъ сооб. раженій, у насъ-же этого дѣлать не нужно, ибо мы пользуемся однимъ элементарнымъ интегралomъ Fejér'a, приложенія котораго къ вопросу о сходимости тригонометрическаго ряда въ литературѣ намъ не встрѣчалось.