6. О рядѣ Лапласа.

Н. М. Крылова.

(Доложено 17 сентября).

§ 1. Рѣшеніе одной изъ основныхъ задачъ математической физики, а именно задачи Дирихле для сферы, приводится, какъ извѣстно, къ вопросу о разложеніи т. н. „произвольной“ функціи двухъ угловъ въ рядъ, расположенный по сферическимъ функціямъ Лапласа:

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f(\theta,\psi)=Y_0+Y_1+Y_2+\ldots+Y_m+\ldots,$$

гдѣ

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_m=\frac{2m+1}{4}\int_K f(\theta',\varphi')\,P_m(\cos\gamma)\,d\sigma';$$

въ дальнѣйшемъ имѣютъ мѣсто слѣдующія обозначенія: центръ сферы радіуса равнаго единицѣ принятъ за начало прямоугольной системы координатъ x, y, z; любая точка сферы опредѣляется своими географическими координатами: θ—есть разстояніе отъ полюса, φ — т. н. географическая долгота точки; $P_n(\cos\gamma)$ означаетъ полиномъ Legendre'a, соотвѣтствующій индексу n, а γ есть уголъ, образованный такъ наз. „лучами“ точекъ (θ',φ') и (θ,φ),—т.-е. другими словами разстояніе между этими точками, считаемое по дугѣ большого круга, такъ что:

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta.\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi).$$

Разсмотримъ нѣкоторую, однозначнымъ образомъ на сферѣ опредѣленную, функцію двухъ угловъ: $f(\theta,\varphi)$, обладающую слѣдующими свойствами:

1) по абсолютной величинѣ она будетъ на всей сферѣ меньше нѣкотораго положительнаго числа M, т.-е. другими словами будетъ ограниченной.

2) на всей сферической поверхности она будетъ интегрируема въ обыкновенномъ Riemann'овомъ смыслѣ, т.-е. существуетъ интегралъ

$$\int_K f(\theta,\varphi)\,d\sigma,$$

гдѣ $d\sigma$ есть элементъ поверхности сферы K.

Для всякой такой функціи можно построить совершенно опредѣленный безконечный рядъ Лапласа:

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4}\int_K f(\theta',\varphi')\,P_n(\cos\gamma)\,d\sigma'$$

и предложить себѣ вопросъ при какихъ добавочныхъ условіяхъ, налагаемыхъ на $f(\theta,\varphi)$, онъ будетъ сходящійся.

Одновременно съ этимъ вопросомъ о сходимости не менѣе важнымъ является вопросъ о такъ наз. суммируемости ряда (3), т.-е. нахожденія такой, опредѣленнымъ образомъ составленной функціи, которую, по опредѣленію, принимаютъ за сумму ряда и которая дѣйствительно будетъ таковой, если данный рядъ сходится, т.-е. другими словами понятіе о суммируемости ряда обобщаетъ понятіе о сходимости его. Рѣшеніе этого послѣдняго вопроса для рядовъ Лапласа принадлежитъ L. Fejér'y; въ мемуарѣ: „Über die Laplassche Reihe“ (Math. Annalen, t. LXVII, 1908) знаменитый венгерскій математикъ далъ методъ суммируемости рядовъ (3), основанный на разсмотрѣніи т. н. среднихъ значеній Hölder'a 2-го порядка для

ряда (3). Основываясь на этихъ результатахъ Fejér'a, предложимъ себѣ въ настоящей статьѣ доказать слѣдующую весьма важную теорему въ теоріи рядовъ Лапласа: для всякой ограниченной интегрируемой функціи $f(\theta, \varphi)$ имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе:

$$(4) \quad \int_K f(\theta, \varphi)^2 d\sigma = \Sigma \int_K Y_n^2 d\sigma,$$

гдѣ интегрированіе распространяется на поверхность сферы K и знакъ суммы на всѣ значенія индекса n отъ o до ∞.

Хотя теорема эта доказана проф. Ляпуновымъ [1]) и можетъ быть также получена общими методами проф. В. А. Стеклова [2]), обобщившимъ соотношеніе (4), названное имъ „уравненіемъ замкнутости", на случая многихъ функцій, встрѣчаемыхъ въ математической физикѣ, тѣмъ не менѣе въ виду особой важности формулы (4), является не безъинтереснымъ, по нашему мнѣнію, привести еще одно доказательство, которое явилось бы естественнымъ обобщеніемъ доказательства Hurwitz'a [3]), установившаго эту формулу для случай тригонометрическихъ функцій примѣненіемъ аналогичныхъ результатовъ Fejér'a суммированія тригономет. рядовъ помощью метода ариѳметическихъ среднихъ Cesaro.

Въ дальнѣйшемъ, для краткости, предполагаемъ извѣстными результаты Fejér'a, заключающіеся въ его выше цитированномъ мемуарѣ.

Для Hölder'овыхъ среднихъ величинъ нулевого, перваго, второго и т. д. порядковъ безконечнаго ряда:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

въ вышеупомянутомъ мемуарѣ Fejér'a приняты соотвѣтственно слѣдующія обозначенія:

$$\begin{array}{l} s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n,\ \ldots \\ s_0',\ s_1',\ s_2',\ \ldots\ s_n',\ \ldots \\ s_0'',\ s_1'',\ s_2'',\ \ldots\ s_n'',\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

гдѣ

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_n;$$
$$s_n' = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \ldots s_n}{n+1};$$
$$s_n'' = \frac{s_0' + s_1' + \ldots s_n'}{n+1};$$

обозначая черезъ $s''(\gamma)$ соотвѣтствующее индексу n среднее Hölder'a 2-го порядка для ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\gamma),$$

Fejér получаетъ [4]) слѣдующую формулу для Hölder'ова средняго 2-го порядка ряда (3):

$$(5) \quad s_n''(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_K f(\theta', \varphi') s_n''(\gamma) d\sigma',$$

гдѣ $s_n''(\gamma)$ очевидно равно:

$$(5') \quad s_n''(\gamma) = 1 + c_1 P_1(\cos\gamma) + \ldots + c_n P_n(\cos\gamma) + \ldots;$$

и гдѣ c_i суть положительные раціональные коэффиціенты.

---

[1]) Доказательство проф. Ляпунова, основанное на примѣненіи интеграла Poisson'a находится въ его мемуарѣ: «Problème de minimum dans une question de stabilité» .... p. 41—47. Изв. Ак. Наукъ, 1908.

[2]) Stekloff. Sur la théorie de fermeture des systemes des fonctions .... Изв. Ак. Наукъ. 1911.

[3]) Hurwitz. Über die Fourier'che constanten integrierbaren Functionen. Math. Annalen, 1903.

[4]) Fejér. Ibid, p. 90.

Такъ какъ $s''_n(\gamma)$ при всякомъ n и для каждаго γ будетъ $\geqq 0$, то къ интегралу формулы (5) можно примѣнить первую теорему о средней, что и приводитъ, какъ впервые замѣтилъ Fejér, къ важному результату: обозначая черезъ M и m соотвѣтственно верхнюю и нижнюю точныя границы функціи $f(\theta, \varphi)$ на данной сферѣ K, имѣемъ:

$$m \leqq s''_n(\theta, \varphi) \leqq M,$$

для какихъ угодно значеній θ, φ и для $n = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots$

Принимая это во вниманіе, имѣемъ очевидно, что

$$s''_n(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi)$$

по абсолютной величинѣ не будетъ больше колебанія функціи $f(\theta, \varphi)$ на всей сферѣ.

Пусть нѣкоторая замкнутая линія разрѣзаетъ сферу K на части k_1 и k_2, причемъ на первой части колебаніе $f(\theta, \varphi)$ положимъ равно u; замѣтивъ это, предложимъ себѣ отысканіе верхняго предѣла для абсолютной величины разности:

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots s''_n(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi) = \int_K \left[f(\theta', \varphi') - f(\theta, \varphi) \right] s''_n(\gamma)\, d\sigma'$$

въ томъ случаѣ, когда точка, опредѣляемая географическими координатами θ, φ находится въ части k_3 сферы, лежащей цѣликомъ внутри части k_1, такъ что k_3 и k_2 не имѣютъ общихъ точекъ; тогда интегралъ формулы (7) можетъ быть разложенъ такимъ образомъ:

$$\int_K \left[f(\theta', \varphi') - f(\theta, \varphi) \right] s''_n(\gamma)\, d\sigma' = \int_{k_1} + \int_{k_2}$$

причемъ первый интегралъ правой части по абсолютной величинѣ будетъ меньше $u \int_{k_1} s''_n(\gamma)\, d\sigma'$, а потому и подавно меньше $u \int_K s''_n(\gamma)\, d\sigma'$, ибо $s''_n(\gamma)$ всегда положительно; поэтому первый интегралъ меньше или равенъ u [1]); второй интегралъ:

$$\int_{k_2} \left[f(\theta', \varphi') - f(\theta, \varphi) \right] s''_n(\gamma)\, d\sigma',$$

можетъ быть сдѣланъ сколь угодно малымъ, ибо по предположенію точка (θ, φ) находится въ части k_3 сферы, а потому γ удовлетворяетъ условію $E \leqq \gamma \leqq \pi$, при которомъ, какъ извѣстно, $s''_n(\gamma)$ равномѣрно стремится къ нулю при неопредѣленномъ возрастаніи n. Отсюда видимъ, что:

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left| s''_u(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi) \right| < u + \varepsilon,$$

гдѣ $lim\, \varepsilon = 0$.

Обратимся теперь къ изученію интеграла

$$V_n = \int_K \left| s''_n(\theta, \varphi) - f(\theta, \varphi) \right|^2 d\sigma;$$

обозначая черезъ u и ε два произвольно выбранныя положительныя числа, раздѣлимъ поверхность сферы K на части такимъ образомъ, чтобы сумма тѣхъ частей, назовемъ ихъ L_{i_1}, на которыхъ колебаніе

---

[1]) т. к. $\frac{1}{4\pi} \int_k s''_n(\gamma)\, d\sigma = 1$; въ этомъ убѣждаемся изъ (5'), принявъ во вниманіе свойство ортогональности полиномовъ Legendre'a.

функціи $f(\theta,\varphi)$ больше u было-бы меньше ε, что, очевидно, всегда возможно, ибо по предположенію $f(\theta,\varphi)$ принадлежитъ къ категоріи интегрируемыхъ (въ Риманновомъ смыслѣ) функцій.

Каждую изъ остальныхъ частей, назовемъ ихъ, положимъ l_i, на которыхъ колебаніе $f(\theta,\varphi)$ меньше u, раздѣлимъ на двѣ части l'_i и l''_i такимъ образомъ, что l'_i цѣликомъ лежитъ внутри части l_i (другими словами части l'_i и К—l''_i не имѣютъ общихъ точекъ), и сумма l''_i будетъ сколь угодно мала, что, очевидно, всегда можно сдѣлать.

Принимая это во вниманіе, разложимъ интегралъ V_n такимъ образомъ:

$$(9)\ \ldots V_n = \sum_{L_i}\int_{L_i}\left[s''_n(\theta,\varphi)-f(\theta,\varphi)\right]^2 d\sigma + \sum_{l'_i}\int_{l'_i}\left[s''_n(\theta,\varphi)-f(\theta,\varphi)\right]^2 d\sigma + \sum_{l''_i}\int_{l''_i}\left[s''_n(\vartheta,\varphi)-f(\theta,\varphi)\right]^2 d\sigma,$$

но такъ какъ:

$$\left|s''_n(\theta,\varphi)-f(\theta,\varphi)\right| \leqq A,$$

гдѣ A колебаніе функціи $f(\theta,\varphi)$ на всей сферѣ К, то по формулѣ (8) изъ равенства (9) получаемъ:

$$V_n < A^2 \sum_{L_i} L_i + (u+\varepsilon)^2 \sum_{l'_i} l'_i + A^2 \sum_{l''_i} l''_i;$$

но, на основаніи предыдущаго,

$$\sum_{l''_i} l''_i \quad \text{и} \quad \sum_{L_i} L_i$$

могутъ быть сдѣланы меньше ε_1, гдѣ ε_1 сколь угодно мало; съ другой же стороны очевидно.

$$\sum_{l'_i} l'_i < 4\pi,$$

слѣдовательно:

$$V_n < 2A^2\varepsilon_1 + 4\pi(u+\varepsilon)^2,$$

отсюда при произвольной малости: ε_1, u, ε, которая имѣетъ мѣсто, слѣдуетъ.

$$(10)\ \ldots \lim_{n=\infty} V_n = 0.$$

Возвращаясь снова къ интегралу V_n, представимъ его въ видѣ (на основаніи (5′)):

$$V_n = \int_K \left[s''_n(\theta,\varphi)-f(\theta,\varphi)\right]^2 d\sigma = \int_K \left[\sum_{i=1}^{n} c'_i Y_i - f(\theta,\varphi)\right]^2 d\sigma,$$

откуда:

$$(11)\ \ldots V_n = \int_K f(\theta,\varphi)^2\, d\sigma - 2\sum_{i=1}^{n} c'_i \int_K f(\theta,\varphi) Y_i\, d\sigma + \sum_{i=1}^{n} c'^2_i \int_K Y_i^2 d\sigma.$$

Но формула (2), на основаніи извѣстнаго свойства сферическихъ функцій, даетъ

$$\int_K f Y_i\, d\sigma = \int_K Y_i^2 d\sigma;$$

съ другой же стороны, полагая для краткости:

$$Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_m = S_m,$$

имѣемъ:

$$\int_K [f - S_m]^2 \, d\sigma = \int_K f^2 \, d\sigma - \sum_{n=o}^{n=m} \int_K Y_n^2 \, d\sigma,$$

откуда:

$$\sum_{n=o}^{n=m} \int_K Y_n^2 \, d\sigma < \int_K f^2 \, d\sigma,$$

при какомъ угодно значеніи числа m, что и доказываетъ, какъ извѣстно, слѣдующую лемму: рядъ съ положительными членами $\sum_o^\infty \int_K Y_n{}^2 \, d\sigma$ будетъ сходящимся, а потому выраженіе,

$$\sum_{m=o}^{m=n} \int_K Y_m^2 \, d\sigma$$

при всякомъ n, имѣетъ смыслъ; вычитая и прибавляя его ко второй части соотношенія (11), получаемъ:

$$V_n = \Big[\int_K f^2 \, d\sigma - \sum_o^n \int_K Y_i^2 \, d\sigma \Big] + \Big[\sum_{i=o}^n (c_i' - 1)^2 \int_K Y_i^2 \, d\sigma \Big];$$

такъ какъ количества (обозначимъ ихъ соотвѣтственно черезъ W_n и W'_n) заключенныя въ прямыя скобки будутъ всегда положительны, и такъ какъ, по доказанному:

$$\lim_{n=\infty} V_n = 0,$$

то и

$$(11') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \lim_{n=\infty} W_n = 0; \ \lim_{n=\infty} W'_n = 0,$$

изъ перваго соотношенія (11′) слѣдуетъ теорема Ляпунова-Стеклова:

$$(4) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \int_K f(\theta, \varphi) \, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K Y_i^2 \, d\sigma.$$

§ 2. Теорема, выражаемая формулой (4), очень важна; она позволяетъ между прочимъ утверждать, что всякій равномѣрно сходящійся рядъ Лапласа (3) дѣйствительно представляетъ на сферѣ функцію $f(\theta, \varphi)$ данную для разложенія;—въ этомъ убѣждаемся обычнымъ разсужденіемъ.

Такимъ образомъ вопросъ о представленіи функціи двухъ угловъ на сферѣ можетъ быть трактованъ и безъ разсмотрѣнія свойствъ т. н. интеграла Poisson'a *), примѣненіемъ котораго вначалѣ хотѣли внести болѣе строгости въ разсужденія, относящіяся къ рядамъ, расположеннымъ по тригонометрическимъ

---

*) т. е. $\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) \, f(\theta', \varphi')}{(1 - 2r \cos\gamma + r^2)^{3/2}} \sin\theta' \, d\theta' \, d\varphi'$.

и сферическимъ функціямъ. Вопросъ о сходимости ряда (3) Лапласа былъ въ теченіе 19-го столѣтія предметомъ множества работъ; среди тѣхъ ученыхъ, которые пытались доказать вышеупомянутую сходимость, не прибѣгая къ разсмотрѣнію ассимптотическихъ выраженій для полиномовъ Legendre'a надлежитъ отмѣтить прежде всего самого Poisson'a [1]), а затѣмъ Saint-Germain'a.

Въ своемъ сообщеніи въ Comptes Rendus de l'Acad. des sciences de Paris (9 Juin 1879), Saint-Germain замѣчаетъ, что налагая на $f(\theta, \varphi)$ добавочныя условія, касающіяся дифференцируемости ея, можно довести до конца идею Poisson'a и вполнѣ строго доказать равномѣрную сходимость ряда (3). Покажемъ здѣсь, что примѣняя извѣстную въ этой теоріи [2]), замѣну перемѣнныхъ, можно еще болѣе упростить анализъ Saint-Germain'a.

Итакъ, желая доказать равномѣрную сходимость ряда:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma Y_n = \Sigma \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(cos\gamma)\, f(\theta', \psi')\, sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi',$$

замѣнимъ перемѣнныя θ', φ' новой системой полярныхъ координатъ [3]): λ, μ, выбранныхъ такимъ образомъ, чтобы новая ось z проходила черезъ точку (θ, φ); тогда $f(\theta, \varphi)$ преобразуется въ нѣкоторую функцію $F(\lambda, \mu)$ и уголъ γ въ уголъ λ, а потому $P_n(cos\,\gamma)$ превратится въ $P_n(cos\,\lambda)$, рядъ-же (12) въ слѣдующій:

$$\Sigma \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\cos\lambda)\, F(\lambda, \mu)\, \sin\lambda\, d\lambda\, d\mu;$$

полагая теперь: $\cos\lambda = x$ и $F(\lambda, \mu) = \Phi(x, \mu)$, имѣемъ:

$$(12') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Sigma \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)\, P_n(x)\, dx\, d\mu,$$

гдѣ $P^n(x)$, какъ полиномъ Legendr'a, удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

$$\frac{d\left\{[1-x^2]\frac{dP_n}{dx}\right\}}{dx} + n(n+1)\, P_n = 0.$$

Отсюда интегрированіемъ по частямъ получаемъ, что n-ый членъ предыдущаго ряда равенъ:

$$\frac{-(2n+1)}{n(n+1)4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)\, \frac{d\left\{(1-x^2)^2 \frac{dP_n}{dx}\right\}}{dx}\, dx\, d\mu = +\frac{2n+1}{n(n+1)4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{d[\Phi'(x, \mu)\,(1-x^2)]}{dx} dx\, d\mu,$$

допуская, слѣдовательно, существованіе второй производной функціи $\Phi(x, \mu)$, по извѣстному неравенству Schwarz'a, имѣемъ:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) \frac{d[\Phi'(x, \mu)\,(1-x^2]}{dx}\, dx < \sqrt{\int_{-1}^{+1} P_n{}^2(x)\, dx \cdot \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d[\Phi'(x, \mu)\,(1-x^2)]}{dx}\right]^2 dx} < \frac{B}{\sqrt{2n+1}}\ ^{4}),$$

---

[1]) Доказательство Poisson'a было нестрого, т. к. ему удалось доказать только, что члены ряда (3) будутъ соотвѣтственно менѣе членовъ гармоническаго ряда, умноженныхъ на нѣкоторую постоянную, изъ чего нельзя никоимъ образомъ заключить о сходимости ряда (3).

[2]) См. также: Saint-Germain. Sur la série de Laplace. (Extrait des mémoires de l'Acad. des sciences de Caen).

[3]) См. напр. Jordan. Cours d'Analyse, t. 2 стр. 249.

[4]) т. к. $\int_{-1}^{+1} P_n(x)^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$.

гдѣ B есть нѣкоторая опредѣленная постоянная относительно x, слѣдовательно модуль n-го члена ряда (12′) будетъ меньше

$$\frac{(2n+1)\,A}{n(n+1)\sqrt{2n+1}};$$

отсюда заключаемъ: рядъ (12′) будетъ равномѣрно сходящимся, т. к. рядъ, общій членъ котораго есть $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, что и доказываетъ результатъ S. Germain'a и Poisson'a.

Такимъ образомъ доказана возможность разложенія для функціи, обладающей двумя первыми производными и разсужденіемъ аналогичнымъ таковому-же, приведенному въ нашей статьѣ: „Къ теоріи тригонометрическихъ рядовъ“ [1]) можно установить возможность разложенія для функціи, удовлетворяющей условію Lipchitz'a;—къ этому мы намѣрены возвратиться въ отдѣльной статьѣ.

---

[1]) См. «Записки Горнаго Института». Т. IV, вып. I—1912.