# I. Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

**И. П. Долбни** *).

§ 1. Дается диф. уравненіе

(1) $F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0,$

гдѣ

$$p_i = \frac{dz}{dx_i},$$

т. е.

(2) $dz = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2 + \ldots p_n\, dx^n;$

вслѣдствіи чего

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}.$$

Называя по обыкновенію

$$\frac{dF}{dx_i} = X_i; \quad \frac{dF}{dp_i} = P_i; \quad \frac{dF}{dz} = Z,$$

дифференцируемъ (1) по $x_1$; получимъ

$$X_1 + Zp_1 + P_1 \frac{dp_1}{dx_1} + P_2 \frac{dp_2}{dx_1} + Pn \frac{dp_n}{dx_1} = 0,$$

или

$$(X_1 + Vp_1) + P_1 \frac{dp_1}{dx_1} + + P_2 \frac{dp_1}{dx_2} + \ldots + Pn \frac{dp_1}{dx_n} = 0$$

Получили для нахожденія $p_1$ неоднородное линейное уравненіе съ частными производными, которое равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка.

$$(3)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dp_1}{X_1 + Zp_1}.$$

Дифференцируя уравненіе (1) по $x_2$, получимъ

$$X_2 + Zp_2 + P_1 \frac{dp_1}{dx_2} + P_2 \frac{dp_2}{dx_2} + P_3 \frac{dp_3}{dx_2} + \ldots + P_n \frac{dp_n}{dx_2} = 0,$$

$$X_2 + Zp_2 + P_1 \frac{dp_2}{dx_1} + P_2 \frac{dp_2}{dx_2} + \ldots + P_n \frac{dp_2}{dx_n} = 0.$$

Получили линейное неоднородное дифференціальное уравненіе перваго порядка, которое равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

$$(4)\quad \frac{dx_1}{P} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_2}{X_2 + Zp_2}.$$

Ясно, что послѣдовательное дифференцированіе уравненія (1) по $x_3 \ldots x_n$ дастъ намъ результаты

$$(5)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_3}{X_3 + Zp_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_n}{X_n + Zp_n},$$

подобные (3) и (4). Соединяя (3), (4), (5), получимъ

$$(6)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_1}{X_1 + Vp_1} = \ldots$$

$$= -\frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = dt.$$

Отсюда

$dx_1 = P_1 dt,\ dx_2 = P_2 dt, \ldots, dx_n = P_n dt.$

Вслѣдствіи чего уравненіе (2) даетъ

$dz = (P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \ldots + P_n p_n)\, dt = dt\, \Sigma Pp$

Поэтому имѣемъ такую систему

$$(7)\quad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = -\frac{dp_1}{X_1 + Zp_1} =$$

$$= -\frac{dp_2}{X_2 + Zp_2} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = \frac{dz}{\Sigma Pp} = dt.$$

§ 2. Чтобы подчинить тому же анализу методу Якоби, беремъ уравненіе

$$(8)\quad \frac{dV}{dz} + H(x_1, x_2 \ldots x_n, P_1, P_2 \ldots P_n) = 0,^1)$$

гдѣ $P_i = \frac{dV}{dx_i}$;

назовемъ $\frac{dV}{dz} = q.$

Дифференцируемъ (8) по $z$; получимъ

$$(9)\quad \frac{dq}{dz} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{dz} + \frac{dH}{dp_2}\frac{dp_2}{dz} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dz} = 0.$$

$$\text{Но } \frac{dp_i}{dz} = \frac{d}{dx_i}\left(\frac{dV}{dz}\right) = \frac{dq}{dx_i}.$$

Поэтому уравненіе (9) приметъ форму

$$\frac{dq}{dz} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dq}{dx_1} + \frac{dH}{dx_2}\frac{dq}{dx_2} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dq}{dx_n} = 0.$$

Получили однородное линейное дифференціальное уравненіе перваго порядка съ частными произ-

*) Настоящая замѣтка найдена въ посмертныхъ бумагахъ И. П. Оставались неоконченными только вычисленія примѣра.

*М. Акимовъ.*

1) Jordan, t. III, 1887, p. 328.

водными относительно $q$. Уравненіе это равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

$$(10)\quad \frac{dx_1}{\frac{dH}{dp_1}} = \frac{dx_2}{\frac{dH}{dp_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{dH}{dp_n}} = dz.$$

Дифференцируя теперь (8) по $x_i$, получимъ

$$(11)\quad \frac{dH}{dx_i} + \frac{dq}{dx_i} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_1}{dx_i} + \frac{dH}{dp_2}\frac{dp_2}{dx_i} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_n}{dx_i} = 0.$$

Такъ какъ

$$\frac{dq}{dx_i} = \frac{dp_i}{dz},\quad \frac{dp_k}{dx_i} = \frac{dp_i}{dx_k},$$

то, вмѣсто (11), получимъ

$$\frac{dH}{dx_i} + \frac{dp_i}{dz} + \frac{dH}{dp_1}\frac{dp_i}{dx_1} + \frac{dH}{dp_2}\frac{dp_i}{dx_2} + \ldots + \frac{dH}{dp_n}\frac{dp_i}{dx_n} = 0.$$

А отсюда система

$$(12)\quad \frac{dx_1}{\frac{dH}{dp_1}} = \frac{dx_2}{\frac{dH}{dp_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{dH}{dp_n}} = dz = -\frac{dp_i}{\frac{dH}{dx_i}},$$
$$i = 1, 2, \ldots n.$$

Изъ (10) и (12) имѣемъ

$$\frac{dx_1}{\frac{dH}{dp_1}} = \frac{dx_2}{\frac{dH}{dp_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{dH}{dp_n}} = -\frac{dp_1}{\frac{dH}{dx_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{dH}{dx_2}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{dH}{dx_n}} = dz.$$

Или, придерживаясь обыкновеннаго обозначенія, имѣемъ

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{dH}{dp_k},\quad \frac{dp_k}{dz} = -\frac{dH}{dx_k},$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

§ 3. Вообразимъ линейное однородное уравненіе съ частными производными перваго порядка

$$X^h_\varphi = X^h_1\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + X^h_m\frac{d\varphi}{dx_m} + \ldots X^h_{m+n}\frac{d\varphi}{dx_{m+n}} = 0.$$

Или, употребляя обозначеніе

$$\frac{d\varphi}{dx_i} = P_i,$$

получимъ

$$X^h_\varphi = X^h_1 p_1 + X^h_2 p_2 + \ldots + X^h_{m+n} p_{m+n} = 0.$$

Этому уравненію соотвѣтствуетъ система

$$(13)\quad \frac{dx_1}{X^h_1} = \ldots = \frac{dx_{m+n}}{X^h_{m+n}} = -\frac{dp_1}{p_1\frac{dX^h_1}{dx_1} + p_2\frac{dX^h_2}{dx_1} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^h_{m+n}}{dx_1}} =$$

$$= \frac{dp_2}{p_1\frac{dX^h}{dx_2} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^h_{m+n}}{dx_2}} = \ldots = -\frac{dp_{m+n}}{p_1\frac{dX^h_1}{dx_{m+n}} + \ldots}.$$

Пусть теперь другое уравненіе

$$X^k_\varphi = X^k_1\frac{d\varphi}{dx_1} + \ldots + X^k_{m+n}\frac{d\varphi}{dx_{m+n}} = 0$$

имѣетъ тотъ же, что и $X^h_\varphi = 0$ интегралъ $\varphi$; тогда

$$X^k_\varphi = X^k_1 p_1 + \ldots + X^k_{m+n} p_{m+n} = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\left(p_1\frac{dX^k_1}{dx_1} + p_2\frac{dX^k_2}{dx_1} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^k_{m+n}}{dx_1}\right)dx_1 +$$
$$+\left(p_1\frac{dX^k_1}{dx_2} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^k_{m+n}}{dx_2}\right)dx_2 + \ldots$$
$$+ X^k_1 dp_1 + X^k_2 dp_2 + \ldots + X^k_{m+n} dp_{m+n} = 0.$$

Подставляя сюда изъ (13) вмѣсто

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots\ dp_1,\ dp_2\ \ldots$$

равныя имъ величины, получимъ

$$\left(p_1\frac{dX^k_1}{dx_1} + p_2\frac{dX^k_2}{dx_1} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^k_{m+n}}{dx_1}\right)X^h_1 +$$
$$+\left(p_1\frac{dX^k_1}{dx_2} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^k_{m+n}}{dx_2}\right)X^h_2 + \ldots -$$
$$- X^k_1\left(p_1\frac{dX^h_1}{dx_1} + p_2\frac{dX^h_2}{dx_1} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^h_{m+n}}{dx_1}\right) -$$
$$- X^k_2\left(p_1\frac{dX^h_1}{dx_2} + p_2\frac{dX^h_2}{dx_2} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^h_{m+n}}{dx_2}\right) - \ldots$$
$$- X^k_{m+n}\left(p_1\frac{dX^h_1}{dx_{m+n}} + \ldots + p_{m+n}\frac{dX^h_{m+n}}{dx_{m+n}}\right) = 0.$$

Или

$$\left(X^h_1\frac{dX^k_1}{dx_1} - X^k_1\frac{dX^h_1}{dx_1} + X^h_2\frac{dX^k_1}{dx_2} - X^k_2\frac{dX^h_1}{dx_2} + \ldots\right)p_1 +$$
$$+\left(X^h_1\frac{dX^k_2}{dx_1} - X^k_1\frac{dX^h_2}{dx_1} + X^h_2\frac{dX^k_2}{dx_2} - X^k_2\frac{dX^h_2}{dx_2} + \ldots\right)p_2 + \ldots$$
$$+\left(X^h_1\frac{dX^k_{m+n}}{dx_1} - X^k_1\frac{dX^h_{m+n}}{dx_1} + \ldots\right)p_{m+n} = 0$$
$$= \left(X^h\frac{dX^k}{dx} - X^k\frac{dX^h}{dx}\right)\varphi = 0.$$

Примѣръ. Дается система

$$(1)\quad 2x_2x_4^2p_1 + x_3^2x_4p_4 + x_3^2x_5p_5 = 0,$$
$$(2)\quad 2x_2p_2 - x_4p_4 - x_5p_5 = 0,$$
$$(3)\quad x_2x_4^2p_3 + x_1x_3x_4p_4 + x_1x_3x_5p_5 = 0.$$

Изъ (1) имѣемъ

$$\frac{dx_1}{2x_2x_4^2} = \frac{dx_4}{x_3^2x_4} = \frac{dx_5}{x_3^2x_5} = \frac{-dp_2}{2x_4^2p_1} =$$

$$(a)\quad \frac{-dp_3}{2x_3x_4p_4 + 2x_3x_5p_5} = \frac{-dp_4}{4x_2x_4p_1 + x_3^2p_4} = \frac{-dp_5}{x_3^2p_5}.$$

Дифференцируя (2) и принимая во вниманіе систему (*a*), имѣемъ

$$-p_4 x_3^2 x_4 - p_5 x_3^2 x_5 - 4 x_2 x_4^2 p_1 + 4 x_2 x_4^2 p^1 + x_3^2 x_4 p_4 + x_3^2 x_5 p_5 = 0$$ тождественно.

Дифференцируя (3) и принимая во вниманіе систему (*a*), получимъ

$$2 x_2 x_4^2 (x_3 x_4 p_4 + x_3 x_5 p_5) + x_3^2 x_4 (2 x_2 x_4 p_3 + x_1 x_3 p_4) + x_1 x_3^3 x_5 p_5 - x_2 x_4^2 (2 x_3 x_4 p_4 + 2 x_3 x_5 p_5) - x_1 x_3 x_4 (4 x_2 x_4 p_1 + x_3^2 p_4) - x_1 x_3^3 x_5 p_5 = 0,$$ или

$$2 x_2 x_3^2 x_4^2 p_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4^2 p_1 = 0,$$ или

$$(4)\quad x_3 p_3) - 2 x_1 p_1 = 0.$$

Это уравненіе не даетъ новаго соотношенія, ибо оно получается изъ (1) и (3) чрезъ исключеніе $p_4$ и $p_5$.

Изъ (2) имѣемъ

$$(б)\quad \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_4}{-x_4} = \frac{dx_5}{-x_5} = \frac{-dp_2}{2p_2} = \frac{-dp_4}{-p_4} = \frac{-dp_5}{-p_5}.$$

Дифференцируя (3) и принимая во вниманіе систему (*б*), имѣемъ

$$2 x_2 x_4^2 p_3 - 2 x_2 x_4^2 p_3 - x_1 x_3 x_4 p_4 + x_1 x_3 x_4 p_4 - x_1 x_3 x_5 p_5 + x_2 x_3 x_5 p_5 = 0$$ тождественно.

Интегрируя (*a*), получаемъ сперва

$$x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2 = C_1,\ \frac{x_4}{x_5} = C_2.$$

Общій интегралъ (1) будетъ

$$f\left(x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2,\ \frac{x_4}{x_5},\ x_2, x_3\right).$$

Подставляя его въ (2) имѣемъ

$$\frac{df}{dx_2} = 0;$$

подставляя въ (3), получаемъ

$$\frac{df}{dx_3} = 0.$$

Общій интегралъ данной системы будетъ

$$f\left(x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2,\ \frac{x_4}{x_5}\right).$$