XXVIII. Его-же. Выраженіе двойного преобразованія символовъ.

При рѣшеніи задачъ о правильной установкѣ кристалловъ (какъ основѣ для кристаллохимическаго анализа) постоянно приходится прибѣгать къ преобразованію символовъ, причемъ провѣрка этого рѣшенія связана со вторымъ и дальнѣйшими преобразованіями.

Если окончательные символы отличаются отъ символовъ исходныхъ, данныхъ авторомъ первоначальнаго кристаллоизмѣренія, то аналитическое выраженіе преобразованія должно относиться именно къ этимъ исходнымъ символамъ, тогда какъ при промежуточныхъ операціяхъ удобнѣе послѣдовательно переходить отъ однихъ символовъ къ слѣдующимъ. Поэтому сама собою возникаетъ задача выразить окончательные символы въ исходныхъ.

Вмѣсто извѣстной формулы преобразованія [1]) мы на практикѣ пользуемся сокращеннымъ выраженіемъ въ видѣ детерминанта, то есть вмѣсто формулы

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3}{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3}$$
$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3}{c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3}$$

мы пользуемся выраженіемъ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, даже не выписывая членовъ, равныхъ нулю.

Если второе преобразованіе выражается детерминантомъ

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

то окончательный детерминантъ есть произведеніе двухъ слагающихъ детерминантовъ, причемъ въ первомъ изъ детерминантовъ нужно строчки замѣнить колоннами, а колонны строчками, то есть

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1a_1' + b_1a_2' + c_1a_3'; & a_2a_1' + b_2a_2' + c_2a_3'; & a_3a_1' + b_3a_2' + c_3a_3' \\ a_1b_1' + b_1b_2' + c_1b_3'; & a_2b_1' + b_2b_2' + c_3b_3'; & a_3b_1' + b_3b_2' + c_3b_3' \\ a_1c_1' + b_1c_2' + c_1c_3'; & a_2c_1' + b_2c_2' + c_2c_3'; & a_3c_1' + b_3c_2' + c_3c_3' \end{vmatrix}.$$

Убѣдиться въ справедливости этого въ высшей степени просто.

Символу (100) послѣ перваго преобразованія соотвѣтствуетъ $(a_1\ b_1\ c_1)$,

а послѣ второго $(a_1a_1' + b_1a_2' + c_1a_3';\ a_1b_1' + b_1b_2' + c_1b_3';\ a_1c_1' + b_1c_2' + c_1c_3')$.

[1]) См. напр. Сокращенный курсъ кристаллографіи. 1910 стр. 247.

Символу (010) послѣ перваго преобразованія соотвѣтствуетъ $(a_2\ b_2\ c_2)$,
а послѣ второго $a_2a_1' + b_2a_2' + c_2a_3'$; $a_2b_1' + b_2b_2' + c_2b_3'$; $a_2c_1' + b_2c_2' + c_2c_3'$).
(Символу (001) послѣ перваго преобразованія соотвѣтствуетъ $(a_3\ b_3\ c_3)$,
а послѣ второго $(a_3a_1' + b_3a_2' + c_3a_3'$; $a_3b_1' + b_3b_2' + c_3b_3'$; $a_3c_1' + b_3c_2' + c_3c_3')$.
Символу (111) послѣ перваго преобразованія соотвѣтствуетъ $(a_1 + a_2 + a_3;\ b_1 + b_2 + b_3;\ c_1 + c_2 + c_3)$, а послѣ второго

$$a_1'(a_1 + a_2 + a_3) + a_2'(b_1 + b_2 + b_3) + a_3'(c_1 + c_2 + c_3)$$
$$b_1'(a_1 + a_2 + a_3) + b_2'(b_1 + b_2 + b_3) + b_3'(c_1 + c_2 + c_3)$$
$$c_1'(a_1 + a_2 + a_3) + c_2'(b_1 + b_2 + b_3) + c_3'(c_1 + c_2 + c_3).$$

Не трудно видѣть, что это тѣ самыя три индекса символа, которые прямо получатся изъ детерминанта $\Delta\Delta'$, если за перемѣнныя независимыя примемъ числа (111).

Конечно, на практикѣ мы имѣемъ вообще дѣло съ простѣйшими частными случаями, а потому и вычисленія имѣютъ чрезвычайно простой видъ.

Беру для примѣра первый попавшійся на глаза случай.

Для перваго преобразованія понадобился детерминантъ $\begin{vmatrix} \bar{1} & 1 \\ 1 & 1 \\ & 2 \end{vmatrix}$, а при повѣркѣ пришлось примѣнить детерминантъ $\begin{vmatrix} \bar{1} & \\ 1 & \\ & 1 \end{vmatrix}$.

Для окончательнаго детерминанта, по только что изложенному, выведемъ:

$$\begin{vmatrix} \bar{1}01 \\ 101 \\ 020 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{1}00 \\ 010 \\ 001 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{1}+1 & 0+0 & 0;\ 0 & \bar{1}+0 & 0+2 & 0;\ 1 & \bar{1}+1 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{1} & 0+1 & 1+0 & 0;\ 0 & 0+0 & 1+2 & 0;\ 1 & 0+1 & 1+0 & 0 \\ \bar{1} & 0+1 & 0+0 & 1;\ 0 & 0+0 & 0+2 & 1;\ 1 & 0+1 & 0+0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10\bar{1} \\ 101 \\ 020 \end{vmatrix}.$$

13 февраля 1910 года.