XXV Е. С. Федоровъ. Нѣсколько формулъ, относящихся къ системѣ зональныхъ вычисленій.

Въ статьѣ «Крайнее упрощеніе зональныхъ вычисленій и кристаллографическихъ вычисленій вообще»[1]) я отмѣтилъ ту крайнюю простоту, которую получаютъ вычисленія сферическихъ биполярныхъ координатъ, если положить въ основаніе формулу Миллера

$$2 \operatorname{ctg} av = \operatorname{ctg} ae + \operatorname{ctg} ae' \qquad A)$$

гдѣ a, e, v, e′ четыре гармоническія грани пояса, причемъ сопряженныя пары av и ee′

Показавъ, какъ къ простымъ сложеніямъ и вычитаніямъ сводятся вычисленія котангенсовъ угловъ простѣйшихъ (важнѣйшихъ) граней пояса съ нѣкоторою постоянною исходною гранью, я имѣлъ въ виду только такія про-

[1]) Записки И. СПБ. Минералогическаго Общества XL V 199.

стѣйшія грани, какъ почти исключительно представленный случай въ практикѣ кристаллографическихъ вычисленій.

Теперь я дополню выведенныя тогда формулы такими, которыя относятся къ вычисленію котангенсовъ угловъ, образуемыхъ съ исходною какою-угодно гранью пояса.

Чтобы, по возможности, кратко выражать выводимые формулы, принявъ за исходныя грани (01) и (10), изъ которыхъ послѣднюю будемъ представлять въ гномонической проекціи изображаемою безконечно-удаленною точкою, отмѣтивъ грани (11), (01), $(\bar{1}1)$ соотвѣтственно буквами a, b, c, будемъ пропускать въ выраженіи знакъ cotg, потому что всѣ численныя величины, входящія въ формулы есть сплошь котангенсы [1]).

Представимъ себѣ, что отрѣзки (11) (01) и (01):$(\bar{1}1)$ раздѣлены на n равныхъ частей, причемъ концы ихъ, начиная съ (01) мы будемъ отмѣчать цифрами (1), (2), (3) для перваго и (1′), (2′), (3′) для второго.

Такимъ образомъ основная формула прежде всего можетъ выражена равенствомъ

$$2\,(b) = (a) + (c).$$

Но она можетъ быть выражена многоразлично и иначе *напр.:*

$2(b) = (m) + (m')$ (въ частности, $(1)+(1')$, $(2)+(2')$, $(3)+(3')$...)

или $2(m) = (m+k)+(m-k)$ [напр. 2. $(4) = (3) + (5) = (3)+(5) = (2)+(6) = (1)+(7)$...]

Если составимъ два равенства

$$2_1(m) = (m-1)+(m+1)$$
$$\text{и } 2^{2}(m+1) = (m)+(m+2),$$

то изъ нихъ непосредственно выведемъ

$$(m)+(m+1) = (m-1)+(m+2) \qquad B)$$

то есть, что сумма котангенсовъ двухъ среднихъ угловъ равна суммѣ двухъ котангенсовъ, примыкающихъ къ нимъ крайнихъ угловъ.

Нетрудно обобщить эту формулу въ слѣдующихъ видахъ:

$$(m)+(m+k) = (m-1)+(m+k+1) \qquad C)$$
$$\text{и } (m)+(m+1) = (m-k)+(m+1+k), \qquad D)$$

а отсюда $(m)+(m+k) = (m-l)+(m+k+l)$ E)

Теперь покажемъ, какъ на основаніи этихъ равенствъ мы можемъ въ величинахъ котангенсовъ (a) и (b) выразить котангенсы какихъ-угодно угловъ по данному символу.

Имѣемъ

$$(1)+(1) = (b)+(2)$$
$$(1)+(2) = (b)+(3)$$
$$(1)+(3) = (b)+(4)$$
$$(1)+(4) = (b)+(5)$$
$$\vdots$$
$$(1)+(n-2) = (b)+(n-1)$$
$$(1)+(n-1) = (b)+(a),$$

то есть $(n-1)\,(1)+(1) = (n-1)\,(b)+(a)$, если сократимъ равные члены въ обоихъ частяхъ равенства и значитъ

$$n\,(1) = (n-1)\,(b)+(a). \qquad F)$$

Выведя такимъ образомъ величину котангенса угла (1), мы легко выведемъ величину котангенсовъ и всѣхъ другихъ угловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ

$$2\,(1) = (b)+(2) \text{ или } (2) = 2\,(1) - (b)$$
$$\text{или же } n\,(2) = 2n\,(1) - n\,(b);$$
$$\text{но } 2n\,(1) = 2\,(n-1)\,(b) + 2(a);$$

подставляя это значеніе въ предъидущее равенство, получаемъ $n\,(2) = 2\,(n-1)\,(b) + 2\,(a) - n\,(b)$, то есть окончательно

$$n\,(2) = (n-2)\,(b) + 2\,(a) \qquad G)$$

Также изъ равенства $2\,(2) = (1)+(3)$, выведемъ

$$n\,(3) = (n-3)\,(b)+3\,(a)$$

и вообще $n\,(m) = (n-m)\,(b)+m\,(a)$, H)

что получится само собою, если въ равенство

$$2\,(m-1) = (m-2)+(m),$$

мы введемъ соотношенія

$$n\,(m-2) = (n-m+2)\,(b)+(m-2)\,(a)$$
$$\text{и } n\,(m-1) = (n-m+1)\,(b)+(m-1)\,(a).$$

Общая формула H) даетъ возможность вычислить котангенсъ угла любой грани пояса по ея символу, такъ какъ этотъ символъ есть (m n). Если напр. полный кристаллографическій символъ, *соотвѣтствующій зональному* символу (01) есть (010), а символу (10) есть (100), то зональному символу (m n) соотвѣтствуетъ полный символъ (m n 0) и въ частности символу (11) — (110), а символу $(1\bar{1})$ — $(1\bar{1}0)$. Если бы зональному символу (01) соотвѣтствовалъ полный символъ (010), а символу (10) — (111), то символу (11) соотвѣтствовалъ бы (121), а символу $(1\bar{1})$ — $(\bar{1}0\bar{1})$. Общему же символу (m n) въ этомъ случаѣ соотвѣтствуетъ полный символъ m (010) + n (111) = (n; m + n; n).

Приведу примѣръ вычисленій.

Нужно вычислить уголъ между поясомъ [111] и $[2\bar{1}2]$, пересѣкающимся въ грани $[10\bar{1}]$, причемъ даны углы [111] $[0\bar{1}0] = -54°\,44'$. и [111] $[10\bar{1}] = 35°\,15'$.

Такъ какъ $[2\bar{1}2] = 3\,[0\bar{1}0] + 2\,[111]$, зональный символъ въ данномъ случаѣ есть [23], и потому имѣемъ

$$3\,\text{cotg}\,[2\bar{1}2[= -\,\text{ctg}\,54°44' + 2\,\text{ctg}\,35°15' = -0{,}70684 + 2 \times 1{,}41368$$

то есть $\text{cotg}\,[2\bar{1}2] = \dfrac{2{,}12052}{3} = 0{,}70684 = \text{ctg}\,54°44'$.

Нельзя не отмѣтить того любопытнаго обстоятельства, что если всѣ вышенаписанныя равенства принимать составленными не въ условныхъ символахъ, а какъ настоящія равенства между числами, то онѣ получаютъ видъ тождествъ, если вспомнить, что буква (a) пишется вмѣсто числа n, а буква b вмѣсто числа 0.

Формула H) выражаетъ не только указанное соотношеніе числовыхъ символовъ, но еще равенство суммъ коэффиціентовъ въ обѣихъ частяхъ этой формулы.

Итакъ, система зональныхъ вычисленій съ биполярными координатами въ своей особой простотѣ примѣнима безъ примѣненія послѣдовательнаго, рекурсивнаго, хода вычисленія, и прямо къ гранямъ съ произвольными сложными индексами.

2 декабря 1909 г.

[1]) Угловъ, дѣлаемыхъ гранью съ (10).