XXIII. Его-же. Вычисленіе сферическихъ координатъ граней послѣ сдвига.

Въ «Дополнительныхъ замѣчаніяхъ къ статьѣ Соколова и Артемьева объ опредѣленіи плотности сѣтокъ» Е. С. Федоровъ [1]) указываетъ на «полезность составленія подробныхъ таблицъ» (взамѣнъ составленныхъ нами), которыя необходимы для «болѣе точнаго вычисленія плотностей сѣтокъ граней или плотностей реберъ. Какъ видимъ, во всѣхъ случаяхъ вообще, кромѣ триклинныхъ кристалловъ, такія вычисленія... вовсе не будутъ нужны, когда будутъ составлены таблицы».

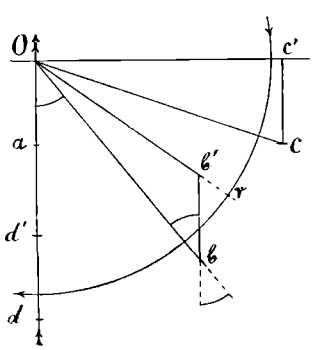
Спеціально для триклинныхъ кристалловъ, при нахожденіи по такимъ таблицамъ плотностей сѣтокъ граней вертикальнаго пояса, необходимо сдѣлать сдвигъ опредѣляющихъ граней, причемъ такой сдвигъ долженъ быть произведенъ съ большей точностью, сравнительно съ той, которую мы можемъ достигнуть графическимъ путемъ.

Въ такомъ случаѣ потребуется вычисленіе сферической координаты ρ, опредѣляющей грани послѣ сдвига.

Рѣшеніе вопроса о такомъ вычисленіи не представляетъ никакого затрудненія, и уже отчасти содержится въ одной изъ формулъ, приведенныхъ въ статьѣ Соколова и моей [2]).

Формула эта слѣдующая:

$$d_0 = -\frac{R\,tg\rho\,sn(\varphi_0 - \varphi_1)}{sn\varphi_0}$$



Въ самомъ дѣлѣ, пусть (см. фиг.) a, b, c, d—гномическія проекціи граней какого-нибудь кристаллическаго комплекса. Точка O — центръ и Or — радіусъ проекціи. Примемъ Or = 1. Тогда, по общему свойству гномическихъ проекцій $Oa = tg\rho_a$, гдѣ ρ_a — сферическая координата ρ для грани a; соотвѣтственно имѣемъ $Ob = tg\rho_b$, $Oc = tg\rho_c$, $Od = tg\rho_d$.

Если за плоскость сдвига мы примемъ плоскость чертежа, причемъ направленіе и величина сдвига выразятся черезъ Oa (направленіе сдвига на фиг. указано двойной стрѣлкой), то точка a послѣ сдвига перемѣстится въ точку O. На такую же величину и по тому же направленію перемѣстятся въ гномонической проекціи и всѣ другія грани. Такимъ образомъ, если послѣ сдвига b′, c′, d′ — гномическія проекціи граней, проектирующихся до сдвига въ b, c и d, то $bb' = cc' = dd' = Oa$.

Пусть сферическія координаты граней a, b, c, d будутъ до сдвига соотвѣтственно $\varphi_a\ \rho_a$, $\varphi_b\ \rho_b$, $\varphi_c\ \rho_c$, $\varphi_d\ \rho_d$, а послѣ сдвига $\varphi_{a'}\ \rho_{a'}$, $\varphi_{b'}\ \rho_{b'}$, $\varphi_{c'}\ \rho_{c'}$, $\varphi_{d'}\ \rho_{d'}$. Замѣтимъ, что въ нашемъ случаѣ $\varphi_a = \varphi_{a'} = \varphi_d = \varphi_{d'}$, такъ какъ проекціи a и d при сдвигѣ перемѣщаются въ плоскости, перпендикулярной плоскости сдвига и проходящей черезъ центръ проекцій.

Положимъ, углы φ отсчитываются по дугѣ круга, изображенной на фигурѣ и въ направленіи, указанномъ стрѣлкой.

Теперь не трудно вывести общія формулы для всевозможныхъ случаевъ сдвиговъ.

Изъ треугольника Obb′ находимъ:

$$Ob' = \frac{Ob\ sn\ \angle\ Obb'}{sn\ \angle\ Ob'b}$$

Такъ какъ $Ob' = tg\rho_{b'}$; $Ob = tg\rho_b$; $\angle\ Obb' = \varphi_a - \varphi_b$ и $\angle\ Ob'b = 180° - (\varphi_a - \varphi_{b'})$, то получаемъ выраженіе:

$$tg\rho_{b'} = \frac{tg\rho_b\ sn\ (\varphi_a - \varphi_b)}{sn\ (\varphi_a - \varphi_{b'})} \qquad (1)$$

Это выраженіе тождественно съ приведенной выше формулой изъ статьи Соколова и моей.

Выражая ту же величину $tg\rho_{b'}$ черезъ $bb' = Oa = tg\rho_a$ находимъ:

$$tg\rho_{b'} = \frac{tg\rho_a\ sn\ (\varphi_a - \varphi_b)}{sn\ (\varphi_b - \varphi_{b'})} \qquad (2)$$

Въ формулу (2) входитъ $tg\rho_a$ — постоянный для всѣхъ граней.

При вычисленіи $\rho_{d'}$ для грани d, имѣющей $\varphi_d = \varphi_a$, формулы (1) и (2) уже не примѣнимы, но спеціально для этого случая получаемъ выраженіе:

$$tg\rho_{d'} = tg\rho_d - tg\rho_a = \frac{sn\ (\rho_d - \rho_a)}{cs\rho_d\ cs\rho_a} \qquad (3)$$

Если для грани c имѣемъ $\varphi_a - \varphi_{c'} = 90°$, то изъ прямоугольнаго треугольника Oc′c выводимъ для $tg\rho_{c'}$ слѣдующія выраженія:

$$tg\rho_{c'} = tg\rho_c\ sn\ (\varphi_a - \varphi_c) = tg\rho_c\ cs\ (\varphi_c - \varphi_{c'}) \qquad (4)$$

и

$$tg\rho_{c'} = tg\rho_a\ tg\ (\varphi_a - \varphi_c) = tg\rho_a\ ctg\ (\varphi_c - \varphi_{c'}) \qquad (5)$$

Если при вычисленіи сферическихъ координатъ для грани b послѣ сдвига намъ неизвѣстно также и $\varphi_{b'}$, то формулы (1) и (2) могутъ быть замѣнены слѣдующими выраженіями:

для вычисленія $\varphi_{b'}$:

$$tg\varphi_{b'} = \frac{tg\rho_a\ sn\ (\varphi_a - \varphi_b)}{tg\rho_b - tg\rho_a\ cs\ (\varphi_a - \varphi_b)} \qquad (6)$$

для вычисленія $\rho_{b'}$:

$$tg\rho_{b'} = \sqrt{tg^2\rho_b + tg^2\rho_a - 2tg\rho_b\,tg\rho_a\,cs\,(\varphi_a - \varphi_b)} \qquad (7)$$

Вообще, мы видимъ, что вычисленіе сферическихъ координатъ граней послѣ сдвига комплекса, сводится къ рѣшенію плоскихъ треугольниковъ, что, конечно, не можетъ представлять никакихъ затрудненій.

Необходимо еще замѣтить, что, если грань b (или к. н. другая) служитъ опредѣляющей для какой-нибудь грани q, имѣющей координаты $\rho_q = 90°$ и φ_q, то $\varphi_q = \varphi_{b'}$. Такимъ образомъ, наиболѣе сложныя формулы (6) и (7) могутъ примѣняться только въ исключительныхъ случаяхъ.

Формулы (1) и (2) представляютъ изъ себя выраженія для вычисленія сферическихъ координатъ граней послѣ сдвига для самаго общаго случая, точно такъ же, какъ и формулы (6) и (7). Именно эти формулы и примѣнимы для триклинныхъ комплексовъ. Наоборотъ, формулы (3), (4) и (5) имѣютъ спеціальное значеніе и примѣнимы только въ случаѣ моноклиннаго комплекса для вычисленія сферическихъ координатъ послѣ сдвига для граней опредѣленнаго положенія.

23 января 1910 г.

---

1) См. этотъ же выпускъ «Записокъ Г. И.», стр. 345.

2) В. И. Соколовъ и Д. Н. Артемьевъ. «Опредѣленіе плотностей сѣтокъ кристаллическихъ граней безъ помощи построенія», этотъ же выпускъ „Записокъ Г. И.“, стр. 335.