32. Родственныя геометрическія системы.

Е. С. Федорова

(доложено 24 ноября 1909 г.).

Когда въ Новой геометріи признавался дуализмъ, то предполагалось всего двѣ геометрическія системы: система точекъ и коррелятивная съ нею система плоскостей. Тогда утверждалось, что всякая теорема, справедливая для одной системы, справедлива и для другой. Но при этомъ имѣлись въ виду теоремы, основанныя на позиціонныхъ то есть такихъ построеніяхъ, которыя независимо отъ индивидуальности системы могутъ быть воспроизведены въ обѣихъ системахъ. Сюда почти исключительно относятся построенія пересѣченій и касаній (изъ которыхъ уже посредственно выводятся построенія гармоническихъ совокупностей, сопряженныхъ паръ и пр.).

Но послѣдовательно были сдѣланы шаги, приведшіе къ заключенію, что коррелятивныхъ и вообще проективныхъ геометрическихъ системъ существуетъ не двѣ, а больше *), пока наконецъ авторомъ не было доказано, что таковыхъ существуетъ безграничное множество **). Свойствамъ, связаннымъ съ позиціонными построеніями, противополагались такъ называемыя метрическія свойства, для изученія которыхъ необходимы абсолютныя мѣры и ихъ единицы, какъ то мѣры длины, мѣры плоскихъ, двухгранныхъ, тѣлесныхъ угловъ. Такія теоремы, которыя основаны на подобнаго рода индивидуальныхъ для каждой системы построеніяхъ, уже не могутъ быть переносимы на другія системы вообще ***). Когда мы пользуемся лишь позиціонными построеніями, то различаемъ совокупности разныхъ ступеней и разныхъ степеней: съ одной стороны прямы, секунды, терціи и т. д., съ другой стороны совокупности линейныя, квадратичныя, кубичныя и т. д.; при этомъ однако, вообще мы не различаемъ индивидуальныхъ разностей такихъ совокупностей, напр. въ общемъ построеніи мы говоримъ про коническое сѣченіе или кривую 2-го порядка, но не различаемъ не только напр. гиперболъ съ разными углами между ассимптотами, но даже не различаемъ гиперболъ, эллипсовъ, параболъ и круга. Такое различеніе напр. прежде всего предполагаетъ абсолютное различеніе точекъ безконечно-удаленныхъ, между тѣмъ простое коллинеарное преобразованіе превращаетъ ихъ въ точки, находящіяся въ конечныхъ предѣлахъ чертежа.

Наиболѣе замѣчательною индивидуальностью по среди кривыхъ 2-го порядка является кругъ, какъ по простотѣ его свойствъ вообще, такъ и по ряду замѣчательныхъ построеній, связанныхъ съ его воспроизведеніемъ.

Геометрія древнихъ опредѣляла его окружность, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ одной единственной, составляющей его центръ. Такимъ образомъ въ опредѣленіе введены метрическія свойства этой замѣчательной совокупности, и значитъ такое опредѣленіе пріобрѣтаетъ чисто индивидуальный характеръ и абсолютно не переносимо на другія системы.

Но вѣдь подобное же опредѣленіе она давала и прямой, какъ кратчайшему разстоянію между двумя точками. Въ основѣ Новой геометріи лежитъ опредѣленіе, какое и дало возможность вывести безграничное число геометрическихъ системъ. По этому опредѣленію прямая есть такое геометрическое мѣсто или такая безконечная совокупность точекъ, опредѣляемая двумя данными, что если мы эти двѣ точки замѣнимъ двумя произвольными другими точками той же совокупности, то воспроизведемъ и изъ нихъ ту же прямую.

При такомъ опредѣленіи прямымъ геометріи то-

*) Напр. въ руководствѣ Рейе «Die Geometrie der Lage», наиболѣе полномъ изъ имѣющихся до сихъ поръ, признается шесть «Grundgebilde».

**) Записки Горнаго Института I 322.

***) Хотя въ опредѣленныхъ системахъ и позиціонныя построенія нерѣдко могутъ выражаться изящными формулами, что и отмѣчается въ трактатахъ и учебныхъ руководствахъ.

чекъ коррелятивны линейныя примы всякихъ другихъ системъ, и имѣя легкую переносимость всей совокупности изъ одной системы въ другую, мы легко выводимъ и переносимость слагающихъ ее элементовъ; приводится доказательство, что для этого достаточно имѣть коррелятивность трехъ элементовъ на линейной примѣ, и тогда прямая геометріи точекъ оказывается лишь частнымъ случаемъ линейной примы для этой системы, то есть линейной примы точекъ.

Но такое же обобщенное опредѣленіе допускаетъ и кругъ, какъ такая совокупность точекъ, которая вполнѣ и однозначно опредѣляется тремя точками, а если данныя три точки мы замѣнимъ тремя другими, взятыми произвольно въ этой совокупности, то и онѣ опредѣлятъ ту же самую совокупность, въ составѣ которой будутъ находиться и данныя три точки.

Отсюда становится понятнымъ присутствіе такихъ совокупностей и во всѣхъ геометрическихъ системахъ, если только намъ удастся построить ихъ согласно съ этимъ опредѣленіемъ. Такимъ образомъ мы получаемъ сферопримы и первая же теорема, которую мы можемъ перенести на эти совокупности изъ геометріи точекъ, есть та, что такая совокупность входитъ въ составъ линейной секунды элементовъ, опредѣляемой также тремя произвольно взятыми элементами системы.

Но уже сферопримы разныхъ геометрическихъ системъ никоимъ образомъ не коррелятивны другъ съ другомъ, потому что коррелятивность относится лишь къ совокупностямъ 2-го порядка вообще или конопримамъ, но не ихъ индивидуальнымъ разностямъ.

Въ частности, если мы установимъ (по соотвѣтствію четырехъ точекъ съ четырьмя элементами) коррелятивность между точками плоскости и элементами линейной секунды какой-нибудь системы, то кругамъ первой вообще будутъ коррелятивны не сферопримы, а конопримы; и наоборотъ, сферопримамъ этихъ системъ въ геометріи точекъ будутъ коррелятивны не круги, а коническія сѣченія.

Такое соотношеніе не даетъ возможности во всѣхъ вообще системахъ непосредственно, въ силу одной коррелятивности, воспроизводить сферопримы и требуетъ столь тщательнаго индивидуальнаго изученія системы, чтобы независимо вывести сфероприму, *согласно данному для нея общему опредѣленію.*

Но конечно этотъ общій случай не исключаетъ возможности и такого чрезвычайно частнаго случая, когда въ дѣйствительности сферопримамъ какой-либо одной системы соотвѣтствуютъ круги геометріи точекъ.

Настоящая замѣтка и имѣетъ своею цѣлью показать особое значеніе такого частнаго случая, которое выражается слѣдующею теоремою, если мы двѣ такія коррелятивныя системы, въ которыхъ сферопримамъ одной коррелятивны сферопримы другой, назовемъ системами *родственными.*

Всѣ рѣшительно построенія, а слѣдовательно и теоремы, одной родственной системы переносятся и въ другую.

Кромѣ того, я имѣю въ виду показать, что можно неопредѣленно установить и такія системы, что для каждой ея линейной секунды можно воспроизвести родственную ей систему точекъ на плоскости.

Перенося всѣ построенія изъ послѣдней на первую, мы должны выяснить значеніе каждаго элемента построенія въ этой системѣ.

Такими же элементами, помимо проведенія совокупности разныхъ ступеней и степеней, мы должны считать еще тѣ операціи, которыя связаны съ мѣрою длинъ и угловъ, то есть: отложить на прямой отъ данной точки отрѣзокъ данной длины и провести къ данной прямой и въ данной ея точкѣ другую прямую подъ даннымъ угломъ.

Въ частности, сюда относится проведеніе перпендикуляровъ (прямой уголъ) параллельныхъ (уголъ равенъ нулю), нахожденіе центровъ (равные отрѣзки). Понятіе о параллельныхъ линіяхъ приводитъ также къ понятію о безконечно-удаленныхъ точкахъ, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаются.

Понятіе о мѣрѣ длины проводится къ умѣнію находить равные отрѣзки. И потому, чтобы умѣть дѣлать построенія, связанныя съ длинами, намъ нужно рѣшить вопросъ, какъ откладывать равные отрѣзки, и что это равенство выражаетъ.

Также понятіе о мѣрѣ угловъ сводится къ понятію объ отложеніи равныхъ угловъ; въ частности, перпендикулярны будутъ такія двѣ прямыя, всѣ четыре угла между которыми равны; значитъ нужно рѣшить, что въ разныхъ системахъ приходится понимать подъ выраженіемъ, „равные углы“.

Въ геометріи на плоскости это равенство опредѣляется способностью къ совмѣщенію, а такія операціи какъ отложенія равныхъ отрѣзковъ производятся непосредственно.

Въ общемъ же случаѣ о совмѣстимости не можетъ быть рѣчи, такъ какъ несовмѣстимы сами элементы системы; но даже тогда, когда элементы дѣйствительно совмѣстимы, напр. прямыя на плоскости или плоскости въ пространствѣ, то все-таки равнымъ единицамъ мѣры для парныхъ частей системы от-

нюдь нельзя приписывать свойства совмѣстимости.

По этой причинѣ правильнѣе говорить не о равенствѣ, а о *равнозначности*; напр. если на прямой въ системѣ точекъ, мы отъ одной точки откладываемъ два равныхъ отрѣзка, въ родственной системѣ, соотвѣтственныя части линейной примы, какъ вообще несовмѣстимые, мы будемъ называть равнозначными. И обратно, если въ какой-нибудь системѣ мы про двѣ части какихъ-нибудь линейныхъ примъ скажемъ, что онѣ равнозначны, то это означаетъ, что въ родственной ей системѣ точекъ, соотвѣтственные отрѣзки равны. То же замѣчаніе слѣдуетъ сдѣлать и относительно угловыхъ величинъ. Если мы скажемъ, что двѣ линейныя примы пересѣкаются взаимно-перпендикулярно, то это означаетъ, что тѣ угловые элементы, которые имъ соотвѣтствуютъ въ системѣ точекъ, равны и значитъ коррелятивныя имъ совокупности, разсматриваемыя какъ углы системы, равнозначны.

Какъ видимъ, въ родственныхъ системахъ, а слѣдовательно и въ системахъ вообще, абсолютное значеніе имѣютъ безконечно-удаленные элементы.

Таковые имѣютъ и абсолютную характеристику, а именно, каковы бы ни были элементы системы, тѣ изъ нихъ, коимъ принадлежитъ значеніе безконечно-удаленныхъ, не могутъ быть изображены цѣликомъ ни на какомъ чертежѣ конечныхъ размѣровъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы одинъ таковой могъ быть изображенъ цѣликомъ, то, составивъ изъ него и какого-нибудь другого элемента, цѣликомъ воспроизведеннаго на чертежѣ, линейную прим мы получили бы одну единственную линейную приму даннаго направленія, тогда какъ всѣ линейныя примы, проходящія чрезъ безконечно-удаленный элементъ, въ предѣлахъ чертежа какихъ-угодно конечныхъ размѣровъ имѣютъ одно и то же направленіе (то есть параллельны или, иначе, образуютъ нулевой уголъ).

Въ системѣ точекъ таковыми являются безконечно-удаленныя точки, въ системѣ лучей таковымъ является единственный безконечно-удаленный лучъ. Въ системѣ круговъ таковыми являются круги съ безконечно-удаленными центрами, то есть безграничныя прямыя; въ системѣ векторіальныхъ круговъ таковымъ является единственный безконечно-удаленный кругъ; въ системѣ параллельныхъ векторовъ таковыми являются векторы съ безконечно-удаленными начальными точками и т. д.

Какъ въ системѣ точекъ полюсъ безконечно-удаленной прямой по отношенію къ произвольно-взятому кругу, есть центръ послѣдняго, такъ во всѣхъ системахъ вообще полюсъ линейной примы безконечно-удаленныхъ элементовъ есть *центръ* сферопримы, по отношенію къ которой опредѣляется полюсъ.

Если въ системѣ точекъ производимъ коллинеарное преобразованіе, то безконечно-удаленныя точки вообще замѣняются точками въ чертежѣ конечныхъ размѣровъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ круги преобразуются въ кривыя 2-го порядка, и наоборотъ извѣстная совокупность (терція) кривыхъ 2-го порядка преобразуется въ круги, которые въ суммѣ сохраняютъ въ системѣ то же положеніе, что и до преобразованія.

Итакъ, коллинеарное преобразованіе сохраняетъ неприкосновенною ту совокупность круговъ, которая имѣлась въ системѣ до этого преобразованія.

Конечно эту теорему съ одинаковымъ правомъ мы можемъ распространить и на всѣ системы въ предѣлахъ одной линейной секунды.

При преобразованіи обратными радіусами каждый кругъ преобразуется въ какой-нибудь другой кругъ, но полная совокупность круговъ (то есть терція) при этомъ преобразуется сама въ себя.

Поэтому вообще реципрочное преобразованіе въ какой бы то ни было системѣ не измѣняетъ полной совокупности (терціи) сферопримъ, имѣющихся въ линейной секундѣ этой системы.

Отсюда видимъ, что оба основныя преобразованія, на которыхъ строится вся система построеній въ Новой геометріи не затрагиваютъ абсолютнаго значенія линейныхъ примъ и сферопримъ, которыя сохраняютъ это значеніе независимо отъ какихъ-либо преобразованій, также какъ неизмѣнными сохраняются и сами системы, какъ полныя совокупности элементовъ.

Поэтому, если имѣемъ двѣ родственныя системы, въ которыхъ линейныя примы и сферопримы составлены согласно установленному для этихъ системъ закону, то онѣ, какъ имѣющія абсолютное значеніе, остаются родственными и послѣ какихъ-угодно преобразованій и неродственность ихъ, то есть, напр., коррелятивность сферопримъ одной съ конопримами другой указываетъ только на нѣкоторыя преобразованія (и притомъ коллинеарныя, а не реципрочныя), а для утвержденія ихъ родства необходимо и достаточно произвести обратныя преобразованія.

Съ другой стороны мы можемъ показать, какъ установить родство какой-нибудь данной системы (въ предѣлахъ линейной секунды) съ системою точекъ на

плоскости, и тогда получимъ какъ выводъ, что всѣ системы родственны, если есть соотвѣтствіе ихъ безконечно-удаленныхъ элементовъ.

Хотя мы при этомъ выводѣ ограничимся разсмотрѣніемъ родства въ предѣлахъ линейной секунды, но совершенно ясно, что этотъ выводъ окажется справедливымъ и для всѣхъ системъ одной ступени вообще.

Что же касается только-что подчеркнутаго вывода, то онъ вытекаетъ изъ свойства геометрическаго родства, по которому двѣ системы, родственныя третьей системѣ порознь, родственны и между собою.

Если мы напр. для символическаго выраженія геометрическаго родства примемъ знакъ кружка (○), то получимъ слѣдующее: если $B_{\circ}A$, и $C_{\circ}A$, то $C_{\circ}B_1$ [1]).

Итакъ, предполагаемъ, что въ системѣ имѣется линейная прима безконечно-удаленныхъ элементовъ, и возьмемъ одну сфероприму, хотя бы это была единственною извѣстною сферопримою.

Полюсъ безконечно-удаленной примы по отношенію къ ней есть ея центръ (по опредѣленію). Двѣ линейныя примы, проведенныя изъ одного безконечно-удаленнаго элемента, параллельны (также по опредѣленію). Слѣдовательно, параллельными будутъ и двѣ примы, касательныя къ сферопримѣ, проведенныя изъ такого элемента. Мы получаемъ изъ безконечно-удаленнаго элемента три луча: два касательные къ сферопримѣ и лучъ, представляющій безконечно-удаленную линейную приму; сопряженный ему четвертый гармоническій лучъ, есть лучъ, проходящій чрезъ центръ.

Сфероприма, какъ и всякая коноприма, есть совокупность квадратичная, то есть можетъ быть пересѣчена линейною примою не больше, чѣмъ въ двухъ элементахъ, въ частности же и вовсе ею не пересѣкаться. Въ послѣднемъ случаѣ всѣ ея элементы есть элементы внѣшніе по отношеніи къ конопримѣ; въ первомъ случаѣ элементы пересѣченія раздѣляютъ элементы внѣшніе отъ внутреннихъ. Отсюда вытекаетъ, что въ безконечно-удаленной линейной примѣ необходимо имѣются и элементы внѣшніе то есть что дѣйствительно изъ нихъ можно провести два касательные луча. Если же въ сферопримѣ нѣтъ элементовъ безконечно-удаленныхъ, каковой случай мы и будемъ имѣть въ виду, то всѣ элементы безконечно-удаленной примы есть элементы внѣшніе, а потому центръ сферопримы есть элементъ внутренній, и всякая, проходящая чрезъ него *линейная прима, необходимо* пересѣкаетъ ее въ двухъ элементахъ.

Проведя изъ безконечно-удаленнаго элемента лучъ чрезъ центръ сферопримы, мы найдемъ полюсъ этого луча въ видѣ другого безконечно-удаленнаго элемента, изъ котораго снова можемъ провести линейную приму чрезъ центръ. Это будутъ два сопряженные діаметра сферопримы, то есть два взаимно-перпендикулярные луча, проходящіе чрезъ центръ.

Четыре касательные луча къ сферопримѣ въ концахъ этихъ двухъ діаметровъ даютъ квадратъ, а имѣя одинъ квадратъ, мы уже легко раздѣлимъ всю линейную секунду на сѣтку квадратовъ. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы на одной изъ сторонъ квадрата по ея продолженію отложить сторону смежнаго квадрата, намъ достаточно чрезъ одну изъ вершинъ квадрата провести линейную приму, параллельную діагонали квадрата и т. д.

Принятый нами исходный квадратъ двумя перпендикулярными діаметрами раздѣляется на четыре равнозначные квадрата, и то же можемъ сдѣлать со всѣми квадратами сѣтки, и тогда получимъ вдвое болѣе густую сѣтку квадратовъ (съ площадями вчетверо меньшими).

Въ свою очередь, каждый изъ квадратовъ этой новой сѣтки мы снова можемъ двумя перпендикулярами раздѣлить а четыре квадрата и т. д.; словомъ, мы можемъ установить равнозначность отрѣзковъ на всѣхъ линейныхъ примахъ системы. При сопоставленіи же этой системы съ какою-нибудь родственною ей системою, въ обѣихъ легко найдемъ коррелятивные элементы, изъ коихъ одинъ взятъ произвольно.

Чтобы видѣть, что во всѣхъ такихъ родственныхъ системахъ мы можемъ переносить изъ одной въ другую рѣшительно всѣ геометрическія построенія, мы сопоставимъ одну изъ такихъ системъ съ системою точекъ на плоскости.

Съ данною сферопримою мы сопоставимъ какой-нибудь кругъ на плоскости; съ какимъ-нибудь безконечно удаленнымъ элементомъ мы сопоставимъ безконечно-удаленную точку, а со всею примою такихъ элементовъ сопоставимъ всю приму безконечно-удаленныхъ точекъ, а слѣдовательно съ полюсомъ этой примы по отношенію къ сферопримѣ, то есть центромъ сферопримы сопоставимъ центръ круга. Сопоставивъ этотъ взятый безконечно-удаленный элементъ съ опредѣленною безконечно-

[1]) Я принимаю за выраженіе родства кружокъ, чтобы напомнить, что оно состоитъ въ коррелятивности между сферопримами этихъ системъ и въ частности, въ коррелятивности между ними и кругами плоскости.

удаленною точкою, мы изъ нея проведемъ діаметръ, потомъ перпендикулярный къ нему діаметръ, построимъ квадратъ, всю сѣтку квадратовъ и т. д.

Если въ системѣ точекъ мы изъ одной вершины проведемъ подъ равными углами три прямыя, то въ коррелятивной системѣ, построивъ коррелятивныя линейныя примы, мы получимъ равнозначные углы между ними. Итакъ, мы можемъ въ системѣ откладывать не только равнозначные отрѣзки, но и проводить лучи подъ равнозначными углами, чѣмъ собственно и исчерпываются всѣ необходимыя для геометрическихъ построеній операціи.

Однако при приведенномъ здѣсь сопоставленіи равнозначныхъ построеній въ двухъ родственныхъ системахъ остается еще недоказаннымъ, что всѣ тѣ же коррелятивные элементы, выведутся и изъ сопоставленія какихъ-нибудь произвольно взятыхъ четырехъ элементовъ (изъ коихъ никакіе три не находятся на одной линейной примѣ) съ четырьмя точками системы точекъ, между тѣмъ какъ коррелятивность элементовъ двухъ системъ второй ступени именно и устанавливается по четыремъ элементамъ.

Для этого прежде всего докажемъ, что, исходя изъ четырехъ элементовъ, представляющихъ элементы пересѣченія сферопримы съ двумя перпендикулярными діаметрами, мы получимъ коррелятивность какъ центровъ и элементовъ безконечно-удаленныхъ, такъ и коррелятивность элементовъ сферопримы съ точками проведеннаго круга.

Что касается центра и безконечно-удаленныхъ элементовъ, то такая коррелятивность устанавливается непосредственно, потому что центръ сферопримы есть въ то же время элементъ пересѣченія двухъ діагоналей квадрата, вершинами котораго являются четыре данныя точки.

Также коррелятивность двухъ безконечно-удаленныхъ элементовъ съ двумя безконечно-удаленными точками, устанавливается продолженіемъ противоположныхъ сторонъ квадрата до взаимнаго пересѣченія этихъ двухъ линейныхъ примъ.

Теперь перейдемъ къ главной части доказательства.

Если мы утверждаемъ, что данная совокупность есть именно сфероприма, то это значитъ, что есть такой законъ построенія ея элементовъ, по тремъ даннымъ элементамъ, что если мы замѣнимъ эти три тремя другими элементами той же сферопримы мы по этому закону построимъ ту же самую совокупность, въ составъ которой войдутъ и прежде данные три элемента. Если такихъ законовъ существуетъ не одинъ, а нѣсколько, то конечно для данной системы дѣйствуетъ только одинъ, а другой будетъ уже относиться къ другой системѣ, даже съ тѣми же элементами.

Теперь мы установили коррелятивность между двумя парами концовъ двухъ перпендикулярныхъ діаметровъ aa_1 и bb_1. Если какому-нибудь элементу c сферопримы коррелятивна не точка на кругѣ, а нѣкоторая точка внѣ или внутри круга, то вообще всей совокупности элементовъ сферопримы будетъ коррелятивна совокупность точекъ не круга, опредѣленнаго парами точекъ aa_1 и bb_1, а какой-нибудь другой кривой, и притомъ, перенося изъ первой системы всѣ тѣ построенія, которыя служили для опредѣленія элементовъ сферопримы къ системѣ точекъ по плоскости, мы и здѣсь найдемъ, что по тремъ даннымъ точкамъ при помощи упомянутыхъ построеній мы можемъ провести кривую, однозначно ими опредѣляемую, и все-таки она не есть кругъ.

Не имѣя возможности доказать противоположное, я все-таки останавливаюсь на этомъ утвержденіи, какъ на очевидной истинѣ, а потому принимаю за постулятъ:

Тремя точками на плоскости однозначно опредѣляется только одна кривая, а именно кругъ, то есть нѣтъ такой другой кривой, кромѣ круга, три произвольныя точки которой однозначно опредѣлятъ ту же кривую.

Если же совокупность элементовъ сферопримы корреллятивна совокупности точекъ круга, то коррелятивность отдѣльныхъ элементовъ съ опредѣленными точками уже легко можетъ быть установлена на основаніи принципа квадратной сѣтки, которая, какъ мы видѣли, уже выведена позиціонными построеніями.

Въ частности, проведя изъ центра круга лучи подъ равными углами, напр. величиною въ одинъ градусъ, мы и въ коррелятивной родственной системѣ легко построимъ совокупность лучей подъ тѣми же углами. Если конецъ a діаметра мы соединимъ прямою съ точкою круга c, то прямая ca будетъ параллельна перпендикуляру къ прямой ca_1 въ точкѣ a_1.

Если на тѣ же углы будемъ поворачивать квадратъ въ кругѣ на плоскости, то получимъ соотвѣтственные повороты квадрата и въ сферопримѣ коррелятивной родственной системы.

Наконецъ, если въ системѣ точекъ на плоскости проведемъ произвольный кругъ, то такъ какъ мы его можемъ разсматривать какъ проходящій чрез четыре вершины нѣкотораго квадрата нашей сѣтки, то и коррелятивная совокупность элементовъ, проходящая чрезъ четыре вершины коррелятивнаго квадрата, окажется сферопримой.

Итакъ, для опредѣленія родства какой-нибудь системы, заключающей въ себѣ линейную приму безконечно-удаленныхъ элементовъ съ системою точекъ на плоскости, намъ достаточно имѣть одну сфероприму и принять за коррелятивный съ нею кругъ на плоскости, а также одинъ изъ безконечно удаленныхъ элементовъ сопоставить съ какою-либо безконечно удаленною точкою на плоскости, и тогда рѣшительно всѣ геометрическія построенія системы точекъ на плоскости переносятся и въ систему коррелятивную, какъ родственную. Черезъ посредство системы точекъ на плоскости мы можемъ вообще всѣ построенія переносить съ одной системы на другую.

Ясно, что мы можемъ этотъ выводъ обобщить и на системы третьей ступени, заключающія въ себѣ, также какъ система точекъ въ пространствѣ, одну линейную секунду безконечно-удаленныхъ элементовъ, если имѣемъ для этой системы хотя одну сферосекунду, которую мы можемъ сопоставить съ шаромъ въ пространствѣ.

Ясно, что въ такой родственной системѣ мы воспроизведемъ уже не квадратную, а кубическую сѣтку, и уже, согласно этой сѣткѣ, мы можемъ въ родственной системѣ воспроизвести всѣ построенія пространства точекъ и, значитъ, доказать всѣ теоремы этой геометріи для данной системы совершенно такимъ же образомъ, какъ доказываемъ для геометріи точекъ въ пространствѣ.

Если данная система высшей ступени, чѣмъ три, то уже сопоставленіе ея съ геометріею точекъ непосредственно невозможно; но это возможно или косвенно для ея отдѣльныхъ линейныхъ секундъ и терцій, или же порядокъ построеній по общему типу можетъ быть воспроизведенъ независимо.

Напр. для системъ шаровъ обыкновенныхъ или для системы параллельныхъ векторовъ мы имѣемъ линейную терцію безконечно-удаленныхъ элементовъ.

Если имѣемъ хоть одну сферотерцію (а мы уже знаемъ, какъ строить сферотерціи—раньше подъ именемъ мегасферъ — вообще), то полюсъ терціи безконечно-удаленныхъ элементовъ по отношенію къ этой сферотерціи есть элементъ, составляющій ея центръ.

Вообще каждому безконечно-удаленному элементу по отношенію къ сферотерціи коррелятивна линейная терція. Она опредѣляется четырьмя элементами касанія линейныхъ терцій, проведенныхъ чрезъ данный безконечно-удаленный элементъ касательно къ сферотерціи. Всякая такая полярная терція проходитъ чрезъ центръ сферотерціи, а четыре линейныя терціи въ своемъ единственномъ элементѣ пересѣченія и опредѣляютъ этотъ центръ.

Теперь проведемъ чрезъ этотъ центръ произвольную линейную терцію; линейная прима, соединяющая центръ съ безконечно-удаленнымъ элементомъ, составляющимъ полюсъ этой терціи, будетъ прима, сопряженная съ данною терціей, то есть, по опредѣленію, будетъ перпендикулярна къ ней и одновременно ко всѣмъ заключающимся въ ней линейнымъ примамъ.

Возьмемъ одну изъ послѣднихъ произвольно, но съ условіемъ прохожденія чрезъ центръ сферотерціи. Такимъ образомъ получимъ уже два перпендикулярные діаметра, каждый изъ которыхъ опредѣлитъ на сферотерціи пару діаметрально-противоположныхъ элементовъ.

Въ сферосекундѣ пересѣченія сферотерціи съ діаметральною линейною терціей найдемъ сопряженную ко 2-му діаметру линейную секунду, также проходящую чрезъ центръ сферотерціи. Эта секунда пересѣчетъ сферосекунду въ сфероприме, а всѣ линейныя примы этой секунды перпендикулярны и къ 1-му и ко 2-му діаметру сферотерціи. Въ сферосекундѣ легко взять еще два сопряженные перпендикулярные діаметра, и мы имѣемъ группу четырехъ взаимноперпендикулярныхъ діаметровъ сферотерціи. Въ концахъ каждаго изъ нихъ мы можемъ провести касательную къ сферотерціи линейную терцію, а каждыя такія четыре терціи пересѣкаются въ одномъ элементѣ, то есть вершинѣ той сѣтки, которая раздѣлитъ всю кварту на равнозначныя части. Такихъ вершинъ въ единичной ячейкѣ этой сѣтки будетъ 16, что легко вывести изъ того, что всякая вершина опредѣляется четырьмя линейными терціями изъ ихъ четырехъ паръ, причемъ въ составъ такихъ перестановокъ не могутъ входить никакія двѣ параллельныя терціи. Поэтому, если отмѣтимъ терціи цифрами 1, 2, 3, 4, а имъ параллельныя терціи цифрами 1', 2', 3', 4', то 16 вершинъ можно опредѣлить перестановками.

1234 1′234 12′34 123′4 1234′ 1′2′34 1′23′4 1′234′
1′2′3′4′ 12′3′4′ 1′23′4′ 1′2′34′ 1′2′3′4 123′4′ 12′34′ 12′3′4.

При каждой вершинѣ имѣется $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$ ребра, причемъ каждое ребро принадлежитъ двумъ вершинамъ, а потому всего имѣется $\frac{16.4}{2} = 32$ ребра.

Такъ какъ вообще двѣ линейныя терціи пересѣкаются въ линейной секундѣ то есть въ грани разсматриваемаго политопа, а каждая такая терція пересѣкаетъ сферотерцію въ сферосекундѣ, послѣднею же опредѣляется 6 касательныхъ граней въ

концахъ трехъ перпендикулярныхъ діаметровъ, то значитъ искомый политопъ каждою изъ ограничивающихъ его съ линейныхъ терцій пересѣкается въ кубѣ, а грани куба есть одновременно и грани политопа то есть грани этого правильнаго октотопа есть квадраты и число ихъ опредѣлится произведеніемъ $\frac{6.8}{2} = 24$, такъ какъ въ каждой терціи находится 6 граней, и каждая изъ нихъ есть общая для двухъ терцій.

Самое число граней куба, какъ находящихся въ одной линейной терціи и представляющихъ пересѣченіе ея со всѣми остальными терціями, кромѣ параллельной, опредѣляется комбинаціями:

12, 13, 14, 12', 13', 14'

Какъ кубическая сѣтка есть развитіе квадратной для системы 3-ей ступени, октотопическая сѣтка есть развитіе кубической для системы 4-ой ступени и т. д. Не останавливаясь на доказательствѣ, которое, по своей простотѣ, представляется подразумѣвающимся само собою, мы можемъ составить слѣдующую табличку для сѣтокъ разныхъ ступеней:

Система	1-ой ступени.	2-ой ступени.	3-ей ступени.	4-ой ступени.	5-ой ступени.
Число вершинъ	2	4	8	16	32
реберъ	2	4	12	32	80
граней	—	2	6	24	80
терцій	—	—	2	8	40
квартъ	—	—	—	2	10

Чтобы отчетливѣе оттѣнить особенность родственныхъ системъ, слѣдуетъ остановиться хотя бы на одномъ примѣрѣ системы неродственной то есть, въ частности, системѣ неродственной по отношенію къ системѣ точекъ.

За таковой мы выберемъ простѣйшій примѣръ системы лучей на плоскости то есть такой, въ которой за элементы принимаются прямыя.

Она не родственна системѣ точекъ на плоскости, потому что въ ней безконечно-удаленнымъ элементомъ является одинъ единственный (а не линейная прима).

Мы знаемъ, и въ этомъ состоитъ особенность новой геометріи, что и къ ней, какъ ко всякой геометрической системѣ, приложимы всѣ построенія позиціоннаго характера и соотвѣтственныя теоремы, но мы сейчасъ увидимъ, что къ ней вообще не приложимы теоремы другого рода.

Напр. къ ней приложимы теоремы, обусловливающія способы построенія квадратичныхъ примъ вообще, къ ней приложимо и то, что въ числѣ такихъ примъ имѣется и сфероприма, но уже къ ней не приложимо основное раздѣленіе этихъ примъ на два главные разряда: эллипсовъ и гиперболъ съ промежуточнымъ членомъ—параболою, по крайней мѣрѣ неприложимо въ буквальномъ словесномъ опредѣленіи: эллипсъ есть та квадратичная прима, въ которой вовсе нѣтъ безконечно-удаленныхъ элементовъ, гипербола же имѣетъ два безконечно-удаленныхъ элемента. Послѣднее невозможно потому, что во всей системѣ вообще имѣется всего одинъ единственный таковой. Съ этой точки зрѣнія пришлось бы сказать, что ея квадратичными примами могутъ быть лишь эллипсы и въ частности парабола.

Такъ какъ полныя совокупности касательныхъ къ какимъ угодно кривымъ 2-го порядка, то есть, какъ эллипсамъ, такъ и гиперболамъ и параболамъ, и для этой системы являются квадратичными примами, въ частности совокупности касательныхъ къ кругу—сфероприми, то фактически и въ этой системѣ мы можемъ различать, какъ огибаемыя кривыя, эллипсы, гиперболы, параболы, и въ частности круги, но тогда для этихъ разрядовъ совокупностей мы должны были бы принять иное опредѣленіе, а не то, которое дано для системы точекъ и системъ, ей родственныхъ*).

Далѣе въ отношеніи линейныхъ примъ мы имѣемъ коренное различіе.

Тогда какъ въ системѣ точекъ, въ каждой линейной системѣ необходимо имѣется одинъ безконечно-удаленный элементъ, въ линейной примѣ лучей мы вообще не имѣемъ ни одного безконечно удаленнаго элемента. Напротивъ того, въ системѣ точекъ мы имѣемъ одну единственную линейную приму, сплошь состоящую изъ безконечно-удаленныхъ элементовъ, тогда какъ въ системѣ лучей мы имѣемъ линейную приму линейныхъ примъ съ общимъ безконечно-удаленнымъ элементомъ (то есть параллельныхъ).

Если возьмемъ сфероприму лучей (огибаемая ими кривая есть кругъ) и изъ одного изъ нихъ и безконечно-удаленнаго элемента составимъ линейную приму, то въ составѣ ея получимъ два луча (параллельные), принадлежащіе сфероприми; четвертый гармоническій, сопряженный безконечно-удаленному, есть лучъ, проходящій чрезъ центръ огибаемаго круга, и таковыхъ центральныхъ элементовъ для этой системы линейная прима. Эта прима есть

*) Приведу еще слѣдующій извѣстный и характерный примѣръ: двѣ конопримы точекъ (коническія сѣченія) опредѣляютъ линейную (Kegelschnittbüschel) приму, въ составъ которой входятъ вообще или двѣ параболы или ни одной; двѣ конопримы лучей опредѣляютъ линейную приму (Kegelschnittschaar), въ составъ которой входитъ лишь одна парабола.

поляра, по отношенію къ сфероприме, безконечно удаленнаго луча.

Отсюда слѣдуетъ, что какая-бы прима ни была дана, но если въ составъ ея входитъ центральный лучъ, въ примѣ лучей сопряженныхъ будетъ находиться и безконечно-удаленный.

Это тѣмъ болѣе относится къ линейной примѣ лучей. Легко доказать, что сопряженная ей, по отношенію къ сфероприме, прима есть прима параболическая (она параболическая и въ томъ смыслѣ, что содержитъ въ себѣ безконечно-удаленный лучъ, и въ томъ смыслѣ, что огибаемая ею кривая есть парабола).

Въ самомъ дѣлѣ, всякому лучу по отношенію къ сфероприме гомологиченъ нѣкоторый параллельный лучъ, потому что если изъ даннаго и безконечно-удаленнаго луча составимъ линейную приму, то вся прима есть прима параллельныхъ лучей; изъ нихъ два луча, принадлежащіе сфероприме, есть лучи двойные, обусловливающіе инволюцію, а каждому данному лучу сопряженъ, какъ четвертый гармоническій, опредѣленный лучъ этой примы; онъ то и входитъ въ составъ сопряженной примы.

Съ другой стороны, если центръ данной линейной примы лучей есть точка a, а ея поляра по отношенію къ сфероприме есть прямая A, то полюсъ каждаго луча изъ a есть точка на прямой A, а потому искомая параболическая прима получится, если чрезъ полюсъ каждаго луча изъ a проведемъ лучъ, ему параллельный.

По извѣстной теоремѣ: „если лучи линейной примы проективны точкамъ прямой и мы проведемъ чрезъ каждую такую точку прямую, параллельную или перпендикулярную къ лучу, коррелятивному этой точкѣ, то совокупность этихъ параллельныхъ или перпендикулярныхъ лучей огибаетъ параболу, къ которой касательна и прямая съ проективными точками“ [1]) искомая прима есть параболическая, такъ какъ дѣйствительно существуетъ коррелятивность между лучами изъ a и точками на прямой A.

Но это теорема справедлива не только въ случаѣ сферопримы, но и какой-угодно квадратичной, и, въ частности, въ случаѣ примы параболической.

Замѣтимъ, что если въ плоскости параболы мы возьмемъ произвольную точку и примемъ ее за центръ подобія, то получимъ приму подобныхъ параболъ. Если изъ этой примы мы выберемъ двѣ такія, касательныя къ которымъ въ двухъ соотвѣтственныхъ точкахъ, одинаково удалены отъ соотвѣтственной же параллельной касательной къ данной параболѣ, то въ такомъ же отношеніи будутъ находится и всѣ соотвѣтственныя касательныя этихъ двухъ параболъ по отношенію къ соотвѣтственной касательной данной параболы.

Въ такомъ именно соотношеніи и находятся лучи линейной примы и параллельныя имъ касательныя преобразованной параболы, причемъ центръ линейной примы есть центръ подобія параболы преобразованія и параболы, преобразованной изъ линейной примы.

Совокупность касательныхъ къ послѣдней параболѣ есть, въ свою очередь, линейна прима нѣкоторой другой системы, то есть можетъ быть однозначно воспроизведена по двумъ касательнымъ.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ двѣ такія касательныя параллельными имъ прямыми, сопряженными по отношенію къ параболѣ преобразованія мы найдемъ два луча, пересѣкающіеся въ центрѣ подобія параболъ данной и искомой.

Нужно имѣть въ виду, что вообще парабола однозначно опредѣляется четырьмя касательными, такъ какъ двѣ изъ нихъ на двухъ другихъ отмѣчаютъ двѣ пары гомологичныхъ точекъ въ подобныхъ примахъ (такъ какъ безконечно-удаленныя точки также гомологичны).

Наконецъ, вообще всякая парабола реципрочно преобразуется данною постоянною параболою въ параболу, такъ какъ каждая касательная къ данной замѣстится при этомъ тою параллельною ей прямою, какъ касательною къ преобразованной параболѣ, которая находится на томъ же разстояніи отъ параллельной касательной къ параболѣ преобразованія, что и данная. Какъ въ примѣ касательныхъ данной параболы каждое направленіе представлено единственною касательною, такъ то же имѣетъ мѣсто и въ преобразованной параболѣ, а это и есть характерное свойство параболъ, отличающее ихъ отъ другихъ коническихъ сѣченій.

Итакъ, въ системѣ точекъ, прямая посредствомъ круга преобразованія реципрочно преобразуется въ особый кругъ (проходящій чрезъ центръ круга преобразованія), а всякій кругъ вообще реципрочно преобразуется въ кругъ же; въ системѣ лучей, каждая линейная прима посредствомъ параболы преобразованія реципрочно преобразуется въ особую параболическую приму лучей, подобную параболической примѣ преобразованія, а параболическія примы вообще преобразуются въ таковыя же.

Это сдва ли не главнѣйшая теорема, характери-

[1]) Ср. Reye—Die Geometrie der Lage I, стр. 94. Leipzig 1899.

зующая коренное различіе двухъ неродственныхъ геометрическихъ системъ.

Какъ видимъ, это различіе сводится къ тому, что въ системѣ точекъ и системахъ ей родственныхъ (напр. системѣ обыкновенныхъ круговъ или системѣ параллельныхъ векторовъ) особую роль играютъ сферопримы, а въ системѣ лучей и ей родственныхъ (напр. системѣ векторіальныхъ круговъ) особая роль принадлежитъ параболамъ [1]).

Изъ предыдущаго видимъ, что принадлежность къ той или другой изъ группъ родственныхъ геометрическихъ системъ обусловливается полною совокупностью безконечно-удаленныхъ элементовъ.

Въ частности, если полныя совокупности есть линейныя секунды, то мыслимы лишь 3 случая: 1) безконечно-удаленные элементы образуютъ линейную приму, 2) таковыхъ имѣется всего одинъ, 3) ихъ вовсе не имѣется.

Примѣры группъ первыхъ двухъ родовъ и были разсмотрѣны выше въ простѣйшихъ представителяхъ. Но можно привести и примѣры третьей группы, напр. систему точекъ на шарѣ (или вообще элементовъ на сферосекундѣ).

Раньше было отмѣчено [2]), что даже системъ точекъ на сферѣ можно различить двѣ: 1) въ одной линейная прима выражается дугами большого круга, 2) въ другой она есть кругъ, всегда проводящійся чрезъ одну постоянную точку на сферѣ.

Въ однѣхъ системахъ сфероприма точекъ есть кругъ на шарѣ, то есть плоское его сѣченіе съ тою разницею въ обоихъ случаяхъ, что для первой дуги большого круга всегда есть линейныя примы, а для второй только тогда, когда эти дуги проходятъ чрезъ постоянную точку, и наоборотъ дуги малаго круга, проходящія чрезъ эту точку; есть линейныя примы для второй системы, тогда какъ въ первой это есть уже сферопримы.

Я остановлюсь нѣсколько на первой системѣ, изъ которой чрезвычайно просто выводится родственная ей система, элементами которой служатъ дуги большого круга.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы воспроизведемъ какое нибудь построеніе первой системы въ грамма-стереографической проекціи, то тоже построеніе, считаемое за гномостереографическую проекцію есть уже построеніе другой родственной системы, пазывающейся по отношенію къ первой полярною.

Нѣтъ болѣе убѣдительнаго и точнаго доказательства родственности двухъ системъ, какъ возможность тождественно изображать ихъ построенія однѣми и тѣми же графическими операціями. При такомъ условіи даже вовсе отпадаетъ необходимость доказательства параллельнаго существованія одинаковыхъ теоремъ и построеній для обѣихъ системъ, несмотря на то, что эти теоремы и построенія относятся къ весьма различнымъ образамъ. Вообще же для всѣхъ системъ, не имѣющихъ безконечно-удаленныхъ элементовъ, получаются особенности, не свойственныя вышеразсмотрѣннымъ системамъ.

Если нѣтъ безконечно-удаленныхъ элементовъ, то нѣтъ и тѣхъ различій, которыя обусловливаются ихъ присутствіемъ.

Важнѣе всего для насъ замѣтить, что для такихъ системъ не имѣется различныхъ разрядовъ конопримъ то есть нельзя отличать эллипсовъ, гиперболъ и, въ частности, параболъ, а есть только конопримы вообще, въ частномъ особенномъ случаѣ представленныя сферопримами. Есть касательныя линейныя примы, но нѣтъ ассимптотъ, требующихъ, по опредѣленію, присутствія безконечно-удаленныхъ элементовъ.

Конопримы мы воспроизводимъ изъ сферопримъ посредствомъ коллинеарнаго преобразованія.

Ко всѣмъ конопримамъ примѣнимы построенія полюсовъ и поляръ, причемъ всякая линейная прима, проходящая чрезъ полюсъ и пересѣкающая коноприму въ двухъ (сопряженныхъ) элементахъ, пересѣкаетъ и поляру въ четвертомъ гармоническомъ элементѣ, сопряженномъ полюсу.

Въ частности, мы можемъ въ системѣ точекъ на сферѣ проводить перпендикулярныя линейныя примы; и если одна изъ нихъ есть поляра по отношенію къ конопримѣ, а другая проходитъ чрезъ полюсъ, то такія называются сопряженными. Если найдемъ на сферѣ такія точки, что всѣмъ проведеннымъ чрезъ нея полярамъ сопряжены перпендикулярныя къ нимъ линейныя примы, проходящія чрезъ тѣже точки, то таковыя есть фокусы конопримы; такихъ точекъ двѣ; онѣ находятся въ одной изъ плоскостей симметріи конопримы (каковыхъ всего три) на равномъ сферическомъ разстояніи

---

[1]) Касательныя къ параболѣ преобразуемой и параболѣ преобразованія опредѣляютъ линейную приму параболическихъ лучей (Parabelschaar); у всѣхъ параболъ этой примы общими имѣются три касательныя (а четвертая—безконечно-удаленная прямая). Каждая пара сопряженныхъ (параллельныхъ) касательныхъ преобразуемой и преобразованной параболы пересѣкается въ точкѣ на общей касательной (безконечно-удаленной *Рейе* I. 183). Къ этой примѣ относится и преобразованная парабола, какъ имѣющая тѣ же общія касательныя.

Это совершенно аналогично тому, что каждый данный кругъ и кругъ преобразованія опредѣляютъ линейную приму круговъ, къ которой относится и кругъ преобразованный.

2) Записки Г. И. I 175.

отъ центровъ (двухъ) конопримы, а сами центры образуютъ между собою прямой уголъ (они соотвѣтствуютъ двумъ осямъ симметріи конуса 2-го порядка, причемъ понятно, перпендикулярная къ обѣимъ есть третья двойная ось симметріи). Всякія вообще двѣ сопряженныя перпендикулярныя линейныя примы пересѣкаютъ линейную приму фокусовъ въ двухъ точкахъ инволюціи, причемъ сами фокусы есть ея двойныя точки.

Вообще большое число теоремъ, относящихся къ конопримамъ на плоскости можетъ быть перенесено и къ конопримамъ на сферѣ; но, понятно, не могутъ быть перенесены всѣ тѣ, которыя связаны съ понятіемъ о безконечно-удаленныхъ точкахъ.

Напримѣръ, мы знаемъ, что на плоскости каждая точка кривой имѣетъ такія разстоянія отъ фокусовъ, что ихъ сумма (въ случаѣ эллипса) или разность (въ случаѣ гиперболы) есть величина постоянная. Любопытно отмѣтить, какъ такая теорема, имѣющая столь различное выраженіе при различеніи эллипсовъ и гиперболъ, можетъ быть выражена въ данномъ случаѣ, когда такого различенія сдѣлать нельзя.

Отмѣтимъ фокусы буквами F_1 и F_2 (а противоположныя точки буквами F_1' и F_2'). Возьмемъ какую-нибудь точку A на конопримѣ и пусть $AF_1 + AF_2 = k$ то есть постоянной величинѣ, характерной для эллипса. Но такъ какъ теперь каждый элементъ проявляется вдвойнѣ (двумя діаметрально противоположными точками), то съ равнымъ правомъ могли бы для характеристики кривой взять и сферическія разстоянія AF_1 и AF_2', причемъ $AF_2' = \pi - AF_2$, а потому $AF_1 - AF_2' = AF_1 - (\pi - AF_2) = k - \pi$ то есть получили и постоянную разность, характерную для гиперболы.

Теперь допустимъ, что мы въ граммастереографической проекціи построили коноприму на сферѣ и опредѣлили ея фокусы. Въ секундѣ лучей, имѣющихъ центромъ центръ сферы, она выразитъ квадратичный конусъ, а ея фокусы—такъ называемые **фокусные лучи**.

Перейдемъ къ другой родственной системѣ, принявъ граммастереографическую проекцію за проекцію гномостереографическую. Теперь каждая точка этой проекціи выразитъ въ секундѣ лучей нѣкоторую плоскость, то есть, въ частности, сама коноприма выразитъ квадратичную совокупность плоскостей, огибающую нѣкоторый конусъ, а фокусные лучи нѣкоторыя двѣ плоскости; которыя будутъ не что инос какъ **круговыя сѣченія** огибаемаго конуса. Въ самомъ дѣлѣ, по сдѣланнымъ опредѣленіямъ, каждыя двѣ линейныя примы плоскостей, имѣющихъ общимъ одно изъ этихъ сѣченій, и общія прямыя пересѣченія которыхъ взаимноперпендикулярны, будутъ сопряжены по отношенію къ конопримѣ плоскостей (квадратичной примѣ, огибающей конусъ). Если же всякому діаметру кривой сопряженъ діаметръ перпендикулярный, то кривая эта есть кругъ.

Если же мы примемъ во вниманіе, что хотя принятая сейчасъ гномостереографическая проекція выражаетъ и не тотъ (огибаемый) конусъ, который бы изъ даннаго (выраженнаго граммастереографическою проекціею) замѣною его лучей перпендикулярными плоскостями, но все-таки подходитъ подъ то же общее опредѣленіе квадратичнаго конуса (конопримы лучей), что примѣнимо для всякаго вообще, то значитъ и въ этомъ, а слѣдовательно и во всякомъ вообще, имѣются два круговыя сѣченія, и эти сѣченія есть плоскости, перпендикулярныя къ фокуснымъ лучамъ полярнаго конуса.

Такимъ образомъ простое сопоставленіе теоремъ двухъ такихъ родственныхъ системъ приводитъ къ выводу новыхъ теоремъ; вѣдь въ каждомъ квадратичномъ конусѣ имѣются и два фокусные луча и два круговыя сѣченія, хотя вообще эти лучи не перпендикулярны къ этимъ сѣченіямъ [1]).

---

[1]) Большой рядъ теоремъ, выведенныхъ отдѣльно для квадратичныхъ системъ лучей и плоскостей составляетъ содержаніе послѣдней главы I тома руководства Reye. Die Geometrie der Lage. 1899. Leipzig.