26. Дополнительныя замѣчанія къ статьѣ Соколова и Артемьева объ опредѣленіи плотности сѣтокъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 26 октября 1909 года).

Предшествующую статью В. И. Соколова и Д. Н. Артемьева я считаю вторымъ крупнымъ шагомъ въ предпринятой нами общей работѣ по опредѣленію правильной установки всѣхъ описанныхъ кристалловъ. Хотя по существу она и не касается этихъ кристалловъ, но она сокращаетъ по крайней мѣрѣ вдвое количество труда по опредѣленію плотности сѣтокъ, труда, необходимо входящаго въ составъ упомянутаго общаго труда, и слѣдовательно она поспособствуетъ значительному ускоренію въ его окончаніи.

Привѣтствуя авторовъ по поводу труда столь выдающейся важности, я въ то же время замѣчаю, что онъ не затронулъ другихъ сторонъ дѣла, касающагося структуры кристалловъ; вѣрнѣе сказать, онъ затронулъ и эти стороны дѣла, но авторы не оговорили этого въ своей статьѣ, хотя изъ нея эти дальнѣйшіе выводы напрашиваются сами собой.

Въ самомъ дѣлѣ, операція опредѣленія плотности сѣтокъ граней по существу та же, что и опредѣленія плотности конгруентныхъ рядовъ точекъ; но авторы имѣли въ виду только первое, между тѣмъ опредѣленіе плотности конгруентныхъ рядовъ тоже представляетъ существенную важность, особенно если имѣть въ виду заключеніе Ф. Ф. Баркера изъ своихъ наблюденій, что правильное наростаніе разнородныхъ кристалловъ другъ на друга происходитъ именно по тѣмъ направленіямъ, по которымъ эта плотность почти одинакова, такъ что именно это приблизительное равенство опредѣляетъ оріентировку кристалла, правильно наростающаго на другомъ.

Такимъ образомъ предстоитъ выяснить вопросъ, остается ли для рѣшенія поставленной задачи только тотъ способъ, который предложенъ мною въ статьѣ „Изображеніе структуры кристалла векторіальными кругами“, или же можно съ значительнымъ упрощеніемъ пользоваться таблицами, составленными авторами.

Вникнувъ въ суть дѣла, мы сразу же дадимъ утвердительный отвѣтъ на этотъ вопросъ. Для опредѣленія плотности сѣтокъ дается гномостереографическая проекція граней, причемъ грани вертикальнаго пояса представлены точками на окружности проекціи. Но если такая проекція дана, но не дано, есть ли это гномостереографическая проекція граней или граммастереографическая проекція реберъ, то тѣмъ не менѣе операція опредѣленія плотности воспроизводится совершенно опредѣленнымъ образомъ и остается только толковать полученный результатъ.

Если данная проекція есть гномостереографическая проекція граней, то наши опредѣленія плотности относятся къ полярной рѣшеткѣ, и длины діагоналей ея параллелепипедовъ представляютъ мѣру плотности сѣтокъ, перпендикулярныхъ къ этимъ діагоналямъ.

Если же данная проекція есть граммастереографическая проекція реберъ комплекса, то наши опредѣленія плотности относятся къ обыкновенной рѣшеткѣ, а длины діагоналей представляютъ мѣру плотности (опять таки обратную) конгруентныхъ рядовъ точекъ [1]).

Фактически всегда дается, какъ результатъ непосредственнаго гоніометрическаго измѣренія именно гномостереографическая проекція граней. Поэтому, для того, чтобы пользоваться таблицами авторовъ для опредѣленія плотности рядовъ, необходимо составить эту другую проекцію то есть граммастереографическую проекцію реберъ.

---

[1]) Дуализмъ между обыкновенными и полярными рѣшетками особенно ярко проявляется въ теоремѣ объ ихъ сдвигахъ (Зап. Г. Инст. I стр. 397).

Составить эту вторую по данной первой не представляетъ никакой трудности, такъ какъ точки второй есть полюсы большихъ дугъ круга первой проекціи.

Проекція ребра [100] есть полюсъ дуги большаго круга (010) : (001), [010] есть полюсъ (001) : (100), [001] есть полюсъ (100) (010); проекція ребра [110] есть полюсъ дуги $(1\bar{1}0)$ (001) и обратно $[1\bar{1}0]$ есть полюсъ дуги (110) (001) и т. д. Проекція ребра [111] есть полюсъ дуги $(1\bar{1}0)$ $(0\bar{1}1)$ или $(1\bar{1}0) : (10\bar{1})$ и т. д. Словомъ, нѣтъ ничего легче, какъ по данной гномостереографической проекціи граней получить граммастереографическую проекцію реберъ.

Но теперь спрашивается, удовлетворяетъ ли полученная проекція условіямъ, необходимымъ для того, что-бы по ней непосредственно пользоваться таблицами авторовъ?

Ясно, что это имѣетъ мѣсто не всегда, въ частности, полученная проекція не удовлетворяетъ этимъ условіямъ въ случаѣ триклинныхъ кристалловъ.

Въ самомъ дѣлѣ, для примѣненія этихъ таблицъ требуется, чтобы точки, занимающія въ пространственной рѣшеткѣ положеніе въ плоскости чертежа (нулевой плоскости сѣтки) имѣли опредѣленные индексы напр. $(p_1\ p_2\ 0)$ въ кристаллахъ тетрагоналоидныхъ, $(0\ p_1\ p_2)$ въ кристаллахъ гипогексагональныхъ или имѣли нулевую сумму индексовъ въ кристаллахъ тригоналоидныхъ. Между тѣмъ въ триклинныхъ кристаллахъ точки, изображающія ребра съ такими индексами никоимъ образомъ не находятся въ плоскости чертежа (какъ точки рѣшетки); несоблюденіе этого условія дѣлаетъ употребленіе таблицъ непримѣнимымъ.

Но для того, чтобы сдѣлать таблицы примѣнимыми мы должны только точки на сферѣ повернуть такимъ образомъ, чтобы поясъ, о которомъ идетъ рѣчь, выразился окружностью проекціи.

Проще всего произвести это на стереографической сѣткѣ такимъ образомъ, чтобы діаметръ, проходящій чрезъ точку (001) (въ тетрагоналоидныхъ кристаллахъ) занялъ въ сѣткѣ положеніе одного изъ двухъ главныхъ діаметровъ, проходящихъ чрезъ полюсы сѣтки. Это можно сдѣлать простымъ копированіемъ точекъ нашей проекціи на другую сѣтку.

Сдѣлавъ это, мы повернемъ всѣ точки сферы на одинъ и тотъ же уголъ около перпендикулярнаго діаметра; уголъ же поворота опредѣлится сферическимъ разстояніемъ точки (001) отъ центра.

Для кристалловъ другихъ разрядовъ, кромѣ тетрагоналоидныхъ, мы должны произвести соотвѣтственную операцію.

Въ этомъ видѣ мы уже можемъ непосредственно пользоваться таблицами, а слѣдовательно и всѣми преимуществами, которыя они представляютъ.

Я еще остановлюсь на триклинныхъ кристаллахъ, чтобы показать, что только-что приведенная операція даетъ намъ средство просто рѣшить задачу, кажущуюся весьма сложною: составить гномостереографическую проекцію граней даннаго символа, когда для опредѣленія комплекса даны константы прежней кристаллографіи то есть три угла между кристаллографическими осями и отношенія единичныхъ отрѣзковъ на нихъ.

Чтобы понять рѣшеніе этой задачи, мы рѣшимъ сначала обратную задачу: найти константы прежней кристаллографіи по данной гномостереографической проекціи граней триклиннаго кристалла.

Что изъ себя представляютъ эти константы? Ясно, не что иное, какъ числа, опредѣляющія элементарный параллелепипедъ пространственной рѣшетки, а слѣдовательно отношеніе единичныхъ отрѣзковъ есть обратное отношеніе плотности рядовъ на осяхъ.

Но по данной гномостереографической проекціи мы нетолько можемъ опредѣлить граммастереографическія проекціи осей то есть, въ частности, опредѣлить и углы между этими осями, но послѣ упомянутаго поворота сферы еще и квадраты плотностей конгруентныхъ рядовъ на осяхъ.

Такъ какъ для послѣдняго опредѣленія мы должны построить [101] (для опредѣленія плотности по 100) и [011] (для опредѣленія плотности по 010), то ясно, что и наоборотъ, если изъ данныхъ константъ мы выведемъ (обратно-квадратныя) числа, заключающіяся въ таблицахъ, то по тѣмъ же таблицамъ выведемъ величины центральныхъ угловъ для проекцій [101] и [011] и значитъ легко составимъ граммастереографическую проекцію реберъ комплекса, а отъ нея непосредственно перейдемъ къ гномостереографической проекціи граней (съ поворотомъ на обратный уголъ).

Нетрудно видѣть однако, что только-что разсмотрѣнная вспомогательная операція поворота необходима только для триклинныхъ кристалловъ.

Хотя и для моноклинныхъ кристалловъ мы при переходѣ отъ гномостереографической проекціи къ граммастереографической получимъ проекціи точекъ [100], [110] не на окружности проекціи но зато точка [010] займетъ положеніе одного изъ трехъ полюсовъ сѣтки, а также точки [100], [001] (центръ проекціи), [101] и вообще $[p_1\ 0\ p_3]$ займутъ положеніе на одномъ изъ главныхъ діаметровъ проекціи.

Поэтому пользованіе таблицами авторовъ можетъ быть произведено непосредственно, если только будемъ отсчитывать углы не отъ центра проекцій, а отъ полюса ребра [010], причемъ условія, необходимыя для употребленія таблицъ, оказываются соблюденными. Для опредѣленія плотности рядовъ $[p_1\,0\,p_3]$ намъ придется пользоваться тою таблицею, которая составлена для граней вертикальнаго пояса. Только въ этомъ и будетъ состоять вся особенность опредѣленія.

Замѣчу вскользь, что въ виду дуализма обыкновенныхъ и полярныхъ рѣшетокъ, мы можемъ каждый данный кристаллографическій комплексъ обозначать двоякаго рода символами. То, что обыкновенно означается этимъ словомъ, относится именно къ полярнымъ рѣшеткамъ и составляется на основаніи гномостереографической проекціи граней. Но если признать тѣ же діаграммы за граммастереографическія проекціи реберъ, то получимъ тотъ же символъ, но уже какъ символъ комплекса реберъ.

Въ дѣйствительности, если дана гномостереографическая проекція граней, то, какъ мы видѣли, изъ нея выведется совсѣмъ не похожая на нее граммастереографическая проекція реберъ, и слѣдовательно символы комплексовъ граней и реберъ одного и того же кристалла будутъ нетолько неодинаковы, но въ нѣкоторомъ отношеніи противоположными, за исключеніемъ комплексовъ изотропныхъ.

Если означимъ число, характеризующее кубическій комплексъ чрезъ a, то $tga = \frac{tg\ 45^o}{cs\ 45^o}$; при этомъ уголъ (101) (001) $= 45^0$. Подвергнемъ комплексъ растяженію по главной оси, причемъ тотъ же уголъ получитъ значеніе $45^\circ + \beta$; тогда соотвѣтственный уголъ для символа реберъ будетъ $45^\circ - \beta$, и потому получимъ тетрагональный комплексъ съ символомъ для граней $(a + \alpha_1)$, причемъ $tg\,(a + \alpha_1) = \frac{tg\,(45^\circ + \beta)}{cs\ 45^\circ}$ а для реберъ $(a - \alpha_2)$, причемъ $tg\,(a - \alpha_1) = \frac{tg\,(45^\circ - \beta)}{cs\ 45}$

Въ этихъ формулахъ и выражается упомянутая противоположность между символами граней и реберъ одного и того же тетрагональнаго комплекса.

Въ кристаллахъ кубическаго типа, но различной структуры, нетолько плотности граней распредѣляются въ различномъ порядкѣ, но также и плотности реберъ. Однако законы, устанавливающіе эти различія неодинаковы для граней и реберъ за исключеніемъ структуры гексаэдрической, гдѣ соотвѣтственныя числа мы получаемъ непосредственно по извѣстнымъ правиламъ.

Различіе же въ двухъ другихъ видахъ структуры состоитъ въ томъ, что въ граняхъ вдвое большую плотность получаютъ для октаэдрической—тѣ, въ символѣ которыхъ два нечетные, а для додекаэдрической—тѣ, въ символѣ которыхъ три нечетные индекса; для реберъ же наоборотъ, вдвое большую плотность получаютъ—для октаэдрической—тѣ, въ символѣ которыхъ три нечетные, а для додекаэдрической—тѣ, въ символѣ которыхъ два нечетные индекса.

Такимъ образомъ для кристалловъ кубической сингоніи имѣемъ слѣдующую схематическую таблицу:

	октаэдрическая стр.	додекаэдрическая стр.	
порядокъ по плотн.	граней {110} (2),	{100} (1), {111} (0,33), {321} (0,29)	реберъ
	реберъ {111} (1,33),	{100} (1), {110} (0,50), {311} (0,36)	граней

Въ гексагонально-изотропныхъ комплексахъ мы имѣемъ одну и ту же послѣдовательность для граней и реберъ:

{1000} (1,33), $\{01\bar{1}0\}$ (1), $\{11\bar{2}0\}$ (0,57), {0121} (0,33), $\{21\bar{3}0\}$ (0,25), {1220} (0,21)

Теперь воспользуемся таблицами авторовъ, чтобы нагляднѣе показать различіе въ порядкѣ плотности граней и реберъ въ различныхъ случаяхъ.

1 примѣръ. Рутилъ. Символъ комплекса граней $4o$ 43., реберъ $4o$ 65.

Ввиду принятаго теперь нами (ради простоты) условія, чтобы грани, встрѣчающіяся больше чѣмъ въ 90% случаевъ брать съ двойнымъ коэфиціентомъ, а грани, встрѣчающіяся меньше чѣмъ въ 25% случаевъ, вовсе не принимать въ разсчетъ и ссылаясь на таблицу въ Зап. Г. Инст. I 198, считаю въ двойномъ числѣ грани {110} и {010} и просто принимаю въ разсчетъ грани {001}, {011}, {231} и {230}.

Поэтому получаю таблицу.

формы	010	110	001	011	231	230	111	210	310	
число граней	4	8	1	4	8	4	—	—	—	29

гексаэдрическая структура.

квадратъ плотности	9,12	4,44	4,0	2,78	0,61	0,72	2,10	1,82	0,95	
	36,48	35,52	4,0	11,12	4,88	2,88	—	—	—	$94,88 = R_h$

октаэдрическая структура.

квадратъ плотности	9,12	17,76	4,0	11,12	2,44	0,72	2,10	1,82	3,8	
	36,48	141,08	4,0	44,48	19,52	2,88	—	—	—	$247,44 = R_0$

гексаэдрическая структура.

	4	8	1	4	—	—	4	8	—	29
	36,48	35,52	4,0	11,12	—	—	8,4	14,56	—	$110,08 = J_h$

октаэдрическая структура.

	4	8	1	4	4	—	—	—	8	29
	36,48	141,08	4,0	44,48	9,76	—	—	—	30,4	$266,2 = J_0$.

Итакъ $R_h \; J_h = 0,86$, а $R_0 : J_0 = 0,93$. Слѣдовательно, структура рутила должна считаться октаэдрическою (а не гексаэдрическою), а порядокъ плотности граней {110} (17,76), {011} (11,12), {010} (9,12) {001} (4,0), {310} (3,8) и т. д.

Для реберъ же получимъ слѣдующую послѣдовательность:

{001} (4,0), {111} (0,72×4=2,88), {100} (1,75), {113} (0,37×4=1,48), {101} (1,22), {110} (0,87), {311} (0,18×4=0,72) и т. д.

2 примѣръ. Анатазъ. Символъ комплекса граней $^{4d}68$, а реберъ $^{4d}39$.

Для граней получимъ слѣдующую послѣдовательность:

{001} (4,0), {111} (0,86×4=3,44), {113} (0,26×4=1,04), {100} (1,27), {101} (0,97), {110} (0,65)

а для реберъ

{110} (6,12×4=24,48), {100} (12,48), {101} (3,02×4=12,08), {121} (1,59×4=6,36), {001} (4,0), {112} (0,86×4=3,44), {111} (2,42)

3 примѣръ. Паризитъ. Символъ комплекса граней $^{6}82.$, а реберъ $^{6}9.$

Для граней получимъ слѣдующую послѣдовательность:

{1000} (4,0), {0110} (0,08), {1110} (0,08), {2110} (0,07), {3110} (0,06) {0121} (0,02)

а для реберъ

{0110} (1,50), {0121} (0,49), {0231} (0,25), {0341} (0,12) {1000} (0,04), {1110} (0,04)

Уже изъ этихъ примѣровъ мы можемъ видѣть, что по теоріи, вполнѣ согласной съ опытомъ, въ сильно положительныхъ комплексахъ имѣется преобладающая по своему значенію грань, по сравненію съ которой всѣ другія имѣютъ второстепенное значеніе и идутъ въ непрерывной послѣдовательности, мало различаясь другъ отъ друга по плотности. Но тогда комплексъ реберъ является сильно отрицательнымъ, и не имѣется особенно выдающихся реберъ, но они образуютъ болѣе непрерывную послѣдовательность, и на первомъ мѣстѣ ребра въ выдающейся грани.

И наоборотъ, въ сильно отрицательныхъ комплексахъ не имѣется особенно выдающихся граней, по онѣ образуютъ болѣе или менѣе непрерывную послѣдовательность по плотности, но въ одномъ (главномъ) поясѣ, тогда какъ въ комплексѣ реберъ, сильно положительномъ, имѣется одно ребро, выдающееся по своей плотности, а именно ось пояса главнѣйшихъ граней.

Разсмотримъ еще примѣры ромбическихъ и моноклинныхъ комплексовъ.

4 примѣръ. Мангапитъ. Символъ комплекса граней $^{4h}_{5}40.$, а реберъ $^{4h}_{5}56.$

Для граней получаемъ слѣдующую послѣдовательность:

{100} (1,36), {010} (0,88), {001} (0,40), {101} (0,31), {110} (0,53), {011} (0,28), {111} (0,23)

а для реберъ

{001} (4,0), {010} (1,82), {011} (1,25), {100} (1,22), {101} (0,94), {110} (0,72), {111} (0,61) . . .

5 примѣръ. Эпидотъ. Символъ комплекса граней $\overset{6;1/2}{\underset{+4.}{35}}$, а реберъ $\overset{6;1/2}{\underset{-4.}{62}}$

Для граней получаемъ слѣдующую послѣдовательность:

{010$\bar{1}$} (0,99), {0011} (0,82), {0110} (0,79), {1000} (0,40), {110$\bar{1}$} (0,29), {1011} (0,27), {1110} (0,27). {210$\bar{1}$} (0,09), {2011} (0,09), {2110} (0,09)

Для реберъ же получимъ:

{1000} (4,0), {0110} (1,13), {0011} (1,04), {1110} (0,89), {010$\bar{1}$} (0,87), {110$\bar{1}$} (0,72), {1011} (0,63), {2110} (0,54), {2011} (0,51), {210$\bar{1}$} (0,47)

Авторы не оговорили еще въ своей статьѣ, что ихъ таблицы могли бы легко быть составлены съ гораздо большею точностью.

Составляя ихъ, они руководствовались потребностью минуты и принаровили къ тому ходу графическихъ работъ, въ которомъ согласились между собою всѣ участники труда по составленію таблицъ для кристаллохимическаго анализа, и спеціально для этой работы ихъ таблицы вносятъ нетолько сильное сокращеніе труда, но и увеличиваютъ точность результатовъ при употребленіи тѣхъ же упрощенныхъ графическихъ методовъ. При этомъ, чтобы пользоваться ихъ таблицами, достаточно имѣть центральное сферическое разстояніе для каждаго гномостереографическаго полюса грани и символъ послѣдней.

Вторая изъ этихъ величинъ стоитъ внѣ зависимости отъ точности пріемовъ. Что же касается первой, то она уже значительно точнѣе дается непосредственными числами гоніометрическихъ измѣреній при обыкновенной юстировкѣ кристалла и составляетъ сферическую координату ρ. Но это число получится еще точнѣе, если, тщательно выведя константы, мы произведемъ соотвѣтственное вычисленіе напр. по системѣ уравненій проективности.

Такъ какъ ихъ методъ по существу математически точенъ, то онъ одинаково приложимъ, съ какою бы точностью ни были даны эти числа.

Въ виду того, что именно проективныя вычисленія спеціально принаровлены для полученія требующихся данныхъ, то ясно, что мы достигнемъ предѣльной точности, если составимъ болѣе подробныя таблицы а для разсчета будемъ пользоваться вычисленною величиною координаты ρ.

Такимъ образомъ становится ясною полезность составленія такихъ подробныхъ таблицъ, которыя конечно и будутъ составлены тогда, когда понадобится производить болѣе точныя вычисленія плотностей сѣтокъ граней или плотностей реберъ. Какъ видимъ, во всѣхъ случаяхъ вообще, кромѣ триклинныхъ кристалловъ, такія вычисленія будутъ отличаться значительною простотою, или точнѣе, вовсе не будутъ нужны, когда будутъ составлены таблицы.

Точность можетъ быть усилена и при употребленіи графическаго метода, если за основу для разсчетовъ мы возьмемъ не гномостереографическую (или граммастереографическую), а гномоническую (или линейную) проекцію.