23. Методъ вычисленія простѣйшаго символа грани съ опредѣленной точностью.

Д. Н. Артемьевъ.

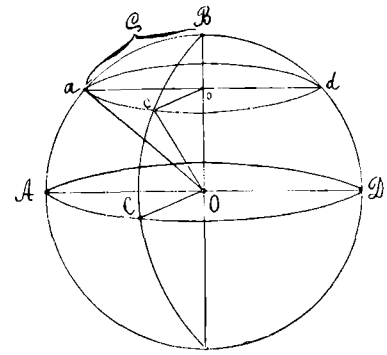
(Доложено 11 мая 1909 года).

Представимъ себѣ кристаллъ, измѣряемый на универсальномъ теодолитномъ гоніометрѣ. [1]) Положимъ, что намъ приходится измѣрять грань, обладающую различными дефектами образованія и дающую не одинъ а нѣсколько сигналовъ (благодаря развитію вициналоидовъ). При такихъ условіяхъ точность измѣренія значительно понижается и въ отсчетахъ угловъ φ (по вертикальному лимбу гоніометра) и ρ (по горизонтальному лимбу) могутъ быть допущены довольно большія ошибки.

Если даже грань образована достаточно хорошо, то все-таки часто можно поручиться за точность только въ нѣсколько минутъ, а бо́льшая точность достигается лишь въ исключительныхъ случаяхъ.

Вопросъ о степени точности въ отсчетѣ угла ρ рѣшается прямо по даннымъ наблюденія. Если для наблюденнаго ρ максимальная допустимая ошибка въ ту или другую сторону $= t'$, то ошибка для угла φ выразится въ $\left(\frac{t}{sn\rho}\right)'$

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ (фиг. 1) шаръ, на поверхности котораго проектируются измѣряемыя грани. Если ACD и ABD будутъ діаметріальные круги и геометрическимъ мѣстомъ проекцій граней, имѣющихъ $\rho = 90°$, будетъ кругъ ACD, то геометрическимъ мѣстомъ проекцій граней съ $\rho = v°$ будетъ малый кругъ acd. Между тѣмъ, при измѣреніи мы производимъ отсчеты всегда по дугѣ экваторіальнаго круга, въ то время какъ рефлексы граней въ случаѣ $\rho \gtrless 90°$ движутся по дугѣ малаго круга. Ясно, что величина ошибки для φ по мѣрѣ уменьшенія ρ будетъ возрастать отъ t' для граней, имѣющихъ $\rho = 90°$ до $+\infty$ для граней съ $\rho = 0°$ (нуль гоніометра).



ф 1

Это возрастаніе ошибки будетъ обратно пропорціонально $sn\rho$. Дѣйствительно, принявъ во вниманіе, что ошибка въ t' по дугѣ большого круга есть ошибка на нѣкоторую длину дуги, выражаемую чрезъ $\frac{2\pi Rt}{360.60}$, мы должны рѣшить вопросъ: сколько минутъ заключаетъ въ себѣ дуга малаго круга, равная по длинѣ дугѣ большаго круга въ t'. Положимъ, соотвѣтственная дуга малаго круга заключаетъ въ себѣ x' Тогда $\frac{2\pi Rt}{360.60} = \frac{2\pi rx}{360.60}$, откуда $Rt = rx$, гдѣ R и r — радіусы большого и малого круга. Изъ чертежа видно, что $R = aO$ и $r = ao$. Такъ какъ $\angle BOd = \rho$ и $oa = aO$. $sn\rho$ или $r = Rsn\rho$, то, замѣняя въ выраженіи $Rt = rx$, r черезъ $Rsn\rho$ и рѣшая полученное уравненіе, находимъ $x = \frac{t}{sn\rho}$.

[1]) Напр. системы Е. С. Федорова.

Выяснивъ величину максимальныхъ допустимыхъ ошибокъ t'_1 и t' для угловъ φ и ρ, можемъ принять какіе угодно углы, отличающіеся отъ наблюденныхъ φ и ρ въ ту или другую сторону не больше, чѣмъ на t'_1 и t' за истинные углы измѣряемой грани. Назовемъ наибольшіе допустимые при данной точности углы φ и ρ — φmax и ρmax, а наименьшіе — — φmin и ρmin.

Въ гномостереографической проекціи углы

$\varphi max\ \rho max$, $\varphi max\ \rho min$, $\varphi min\ \rho max$, $\varphi min\ \rho min$

дадутъ четыре точки, опредѣляющія нѣкоторый районъ, внутри котораго находятся проекціи допустимыхъ для измѣряемой грани угловъ. Если измѣряемая грань обладаетъ сравнительно простымъ символомъ (какъ это и бываетъ обыкновенно), то отысканіе его сведется къ рѣшенію задачи: найти въ предѣлахъ даннаго района грань съ простѣйшимъ символомъ и опредѣлить его индексы.

Простѣйшимъ символомъ грани можно назвать такой символъ, каждый индексъ котораго является наименьшимъ числомъ сравнительно съ соотвѣтственными индексами символовъ всѣхъ другихъ граней, находящихся въ предѣлахъ опредѣленнаго района.

Зная геометрическія константы [1]) для кристалловъ какого-нибудь вещества при опредѣленной установкѣ очень легко вычислить символъ любой грани по угламъ φ и ρ, полученнымъ для нея при измѣреніи кристалла. Для такого вычисленія проще всего воспользоваться слѣдующими уравненіями:

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{a_4 p_2 + a_5 p_3} \quad [2])$$

$$\frac{p_2'}{p_3'} = \frac{p_3}{p_1'}$$

и

$$\frac{p_1'}{p_3'} = \frac{sn\varphi}{cs\varphi\ ctg\rho} \quad [3])$$

Изъ этихъ двухъ уравненій непосредственно получаются слѣдующія выраженія:

$$\left.\begin{aligned} Kp_1 &= \frac{a_4\, sn\varphi - a_2\, cs\varphi + (a_2 a_5 - a_3 a_4)\ ctg\rho}{a_1 a_4} \\ Kp_2 &= \frac{cs\varphi - a_5\ ctg\,\rho}{a_4} \\ Kp_3 &= ctg\,\rho \end{aligned}\right\} \qquad A$$

Вычисливъ по этимъ формуламъ Kp_1 Kp_2 и Kp_3 и взявъ ихъ отношенія, получаемъ искомый символъ данной грани.

Дѣло обстояло бы такъ просто, если бы при вычисленіи ирраціональныхъ геометрическихъ константъ мы не дѣлали никакихъ ошибокъ и для вычисленій пользовались бы абсолютно точными величинами угловъ. Однако, принимая во вниманіе отклоненіе граней отъ идеально нормальнаго положенія, несовершенства ихъ развитія и ошибки наблюденія, можно уже a priori сказать, что вычисленныя отношенія $p_1 : p_2 : p_3$ почти никогда не будутъ отношеніями простыхъ раціональныхъ чиселъ.

Опытъ вполнѣ оправдываетъ такое предсказаніе.

Для нахожденія болѣе простыхъ чиселъ для p_1, p_2 и p_3 очень удобно воспользоваться методомъ превращенія полученныхъ двойныхъ отношеній для $p_1 : p_2$; $p_2 : p_3$; $p_1\ p_3$ въ непрерывныя дроби.

Дѣйствительно, изъ ряда подходящихъ дробей всегда можно выбрать дробь, выражающую отношеніе двухъ индексовъ символа съ достаточной точностью. Взявъ два изъ трехъ двойныхъ отношеній и приведя ихъ къ виду $p_1 : p_2 : p_3$, получимъ выраженіе символа искомой грани. Примѣняя такой методъ, прежде всего очень трудно рѣшить какое приближеніе будетъ достаточнымъ, чтобы не выйти за предѣлы требуемой точности.

Кромѣ того, ни въ какомъ случаѣ нельзя быть увѣреннымъ, что найденный символъ будетъ дѣйствительно простѣйшимъ въ предѣлахъ даннаго района. Наоборотъ, при такомъ способѣ вычисленій всѣ шансы за нахожденіе не простѣйшаго, а очень сложнаго символа.

Въ самомъ дѣлѣ, получивъ рядъ подходящихъ дробей для отношеній $p_1 : p_2$; $p_2\ p_3$; $p_1\ p_3$ и выбравъ достаточныя приближенія для каждаго отношенія, получаемъ, въ общемъ случаѣ, три различныя подходящія дроби $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$; $\frac{p_2}{p_3} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p_3}{p_1} = \frac{r}{s}$ (Для нахожденія $p_1 : p_2 : p_3$ мы можемъ взять какія угодно два изъ полученныхъ трехъ отношеній). Принимая во вниманіе, что каждая подходящая дробь отличается отъ непрерывной менѣе, чѣмъ на единицу, дѣленную на произведеніе знаменателей данной подходящей дроби и слѣдующей мы вообще никогда не получимъ двухъ изъ трехъ отношеній $p_1 : p_2$, $p_2 : p_3$ и $p_3\ p_1$ съ одинаковой степенью приближенія. Если же m и s, n и p, q и r не равны между собой и не имѣютъ общихъ множителей, то вмѣсто одного рѣшенія получаемъ три. Дѣйствительно, взявъ $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ и $\frac{p_2}{p_3} = \frac{p}{q}$ найдемъ $p_1 : p_2 : p_3 = mp\quad np\quad qn$ взявъ $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ и $\frac{p_3}{p_1} = \frac{r}{s}$ получаемъ $p_1\ p_2\ p_3 = ms\quad ns\quad rm$; наконецъ при $\frac{p_2}{p_3} = \frac{p}{q}$ и $\frac{p_3}{p_1} = \frac{r}{s}$ получимъ $p_1 : p_2 : p_3 = sq : pr : qr$. Очевидно, при такомъ способѣ вычисленій не только сильно усложняется символъ грани, благодаря перемноженію найденныхъ величинъ, но, сверхъ того, получается полная неопредѣленность въ рѣшеніи вопроса.

---

[1]) Е. С. Федоровъ—Курсъ кристаллографіи Спб. 1901 г. стр. 239.

[2]) Ibid.—стр. 237.

[3]) Ibid.—стр. 271.

Для однозначенаго рѣшенія необходимо, чтобы численныя значенія одного и того же индекса символа въ двухъ двойныхъ отношеніяхъ были равны между собой, или являлись кратными одно другого.

Отношеніе $\frac{p_1}{p_2}$ опредѣляетъ поясъ (001) $(p_1\ p_2 0)$, $\frac{p_2}{p_3}$ — поясъ (100) $(0 p_2\ p_3)$ и $\frac{p_3}{p_1}$ — поясъ (010) $(p_1 0 p_3)$. Грань съ символомъ $(p_1 p_2 p_3)$ должна находиться одновременно во всѣхъ 3-хъ поясахъ, и ея полюсъ является точкой ихъ пересѣченія. Такъ какъ каждый изъ такихъ поясовъ имѣетъ одинъ изъ индексовъ символа равнымъ нулю, то для развитія подобнаго пояса совершенно достаточно знать отношеніе только двухъ индексовъ. Принимая за исходныя для развитія пояса грани 10 и 01, получаемъ табличку:

Исходныя грани: 10 01

I-й періодъ 11

II-й » 21 12

III-й 31 32 23 13

IV-й 41 52 53 43 34 35 . 25 14 [1])

Если бы мы стали неопредѣленно продолжать развитіе пояса, то получили бы послѣдовательно всѣ числа въ отношеніяхъ отъ $P:1$ до $1:P$ (гдѣ P — какое угодно большое число). Возьмемъ одно изъ (двойныхъ) отношеній двухъ индексовъ символа и представимъ это отношеніе въ видѣ непрерывной дроби $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots}}$ гдѣ a, b, c . .— цѣлыя числа.

Опредѣлимъ рядъ подходящихъ дробей $\frac{a}{1}$; $\frac{ab+1}{b}$; $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$

Докажемъ теперь (теорема 1), что двѣ рядомъ стоящія подходящія дроби опредѣляютъ символы граней, исходныхъ для правильнаго развитія отрѣзка зоны, ограниченнаго этими гранями.

Какъ извѣстно [2]) символы двухъ исходныхъ для развитія отрѣзка пояса граней должны удовлетворять условію: детерминантъ, составленный изъ индексовъ символовъ такихъ граней равенъ 1. Покажемъ, что такое равенство дѣйствительно существуетъ для каждыхъ двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей непрерывной дроби

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\ldots\ \cfrac{+1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}$$

Ясно, что для первыхъ двухъ подходящихъ дробей такое соотношеніе дѣйствительно существуетъ. Въ самомъ дѣлѣ $\Delta=\begin{vmatrix} ab+1 & b \\ a & 1 \end{vmatrix}= ab+1-ab=1$.

То же самое справедливо и для второй и третьей подходящихъ дробей. Положимъ, что такое отношеніе существуетъ для $n^{\text{ой}}$ и $(n+1)^{\text{ой}}$ подходящихъ дробей. Докажемъ теперь что то же самое будетъ справедливо и для $(n+1)^{\text{ой}}$ и $(n+2)^{\text{ой}}$ подходящихъ дробей. Пусть $n^{\text{ая}}$ и $(n+1)^{\text{ая}}$ подходящія дроби будутъ $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$ и детерминантъ, составленный изъ нихъ $\Delta=\begin{vmatrix} P & Q \\ P_1 & Q \end{vmatrix}=PQ_1-P_1Q=1$. Если $(n+2)^{\text{ая}}$ подходящая дробь соотвѣтствуетъ частному r, то она равна $\frac{P_1 r+P}{Q_1 r+Q}$. Детерминантъ, составленный изъ $(n+1)^{\text{ой}}$ и $(n+2)^{\text{ой}}$ подходящихъ дробей будетъ $\Delta=\begin{vmatrix} P_1 r+P & Q_1 r+Q \\ P_1 & Q_1 \end{vmatrix}=(P_1Q_1 r+PQ_1)-(P_1Q_1 r+P_1Q)=PQ_1-P_1Q=1$. Ясно, что такое же соотношеніе справедливо для каждыхъ двухъ рядомъ стоящихъ подходящихъ дробей.

Разсмотримъ рядъ подходящихъ дробей: $\frac{a}{1}$ $\frac{ab+1}{b}$; $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$ Каждая подходящая дробь получается черезъ умноженіе числителя и знаменателя предшествующей дроби на соотвѣтственное частное и прибавленіе къ этимъ произведеніямъ числителя и знаменателя второй предшествующей подходящей дроби. Слѣдовательно, вторая подходящая дробь $\frac{ab+1}{b}$ составлена изъ дроби $\frac{a}{1}$ умноженіемъ числителя и знаменателя послѣдней дроби на частное b, что дастъ $\frac{ab}{b}$, и прибавленіемъ къ числителю и знаменателю, полученной такимъ образомъ дроби $\frac{ab}{b}$, числителя и знаменателя второй предшествующей дроби. Для нахожденія послѣдней вычтемъ изъ числителя $2^{\text{ой}}$ подходящей дроби ab, а изъ ея знаменателя b. Получаемъ $\frac{(ab+1)-ab}{b-b}=\frac{1}{0}$. Такимъ образомъ предшествующая $1^{\text{ой}}$ подходящей дроби — нулевая подходящая дробь—будетъ $\frac{1}{0}=\infty$. Такимъ образомъ Нулевая подходящая дробь всякой непрерывной большей 1 будетъ $\frac{1}{0}=\infty$ (теорема 2).

Допустимъ, что числитель и знаменатель каждой подходящей дроби опредѣляетъ два индекса въ сим-

[1]) Ibid.—Стр. 152.

[2]) E. v. Fedorow — Beiträge z. zon. Krystall. Zeitschr. f. Kryst. etc. *35* s. 29.

волахъ граней какого-нибудь пояса. Въ такомъ случаѣ, первая и нулевая подходящія дроби дадутъ отрѣзокъ пояса между (10) и (*a*1). Слѣдующія подходящія дроби опредѣлятъ символы граней находящихся въ предѣлахъ того же отрѣзка зоны. Въ самомъ дѣлѣ, развивая поясъ (не по періодамъ) между гранями (*ab*) и (*cd*), не выходя изъ предѣловъ, опредѣляемаго ими отрѣзка зоны, можемъ складывать индексы символа (*ab*) n разъ съ соотвѣтственными индексами символа (*cd*).

Точно также мы поступаемъ и при нахожденіи подходящихъ дробей. Отсюда заключаемъ, что (теорема 3) каждыя двѣ послѣдовательныя подходящія дроби опредѣляютъ отрѣзокъ зоны, на которомъ находятся грани съ символами, опредѣляемыми всѣми слѣдующими подходящими дробями. То же слѣдствіе непосредственно вытекаетъ и изъ извѣстной теоремы: точная величина непрерывной дроби есть нѣкоторая промежуточная между двумя послѣдовательными подходящими дробями, причемъ каждая подходящая дробь ближе къ непрерывной, чѣмъ предыдущія.

Принявъ для вычисленій углы и ρ съ максимальными допустимыми ошибками въ ту и другую сторону, мы вообще не выйдемъ за предѣлы требуемой точности. Въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, непосредственно изъ разсмотрѣнія формулъ A, легко рѣшить вопросъ, при какихъ наибольшихъ допустимыхъ измѣненіяхъ въ величинахъ угловъ φ и ρ получаются максимальныя и минимальныя значенія для вычисленныхъ p_1 p_2 и p_3. Произведя соотвѣтственныя вычисленія, получаемъ для каждаго индекса символа двѣ величины p_{1max}, p_{1min} p_{2max} p_{2min}, и p_{3max}, p_{3min}. Взявъ найденныя максимальныя и минимальныя значенія для p_1, p_2 и p_3, мы можемъ составить изъ нихъ шесть отношеній $\frac{p_{1max}}{p_{2min}}$, $\frac{p_{1min}}{p_{2max}}$, $\frac{p_{2max}}{p_{3min}}$, $\frac{p_{2min}}{p_{3max}}$ и $\frac{p_{3max}}{p_{1min}}$, $\frac{p_{3min}}{p_{1max}}$. Каждое такое отношеніе опредѣляетъ поясъ и, такимъ образомъ, мы получимъ 6 поясовъ, между которыми находится данная грань.

Представимъ полученныя отношенія въ видѣ непрерывныхъ дробей и найдемъ для каждаго отношенія $\frac{p_1}{p_2}$, $\frac{p_2}{p_3}$, $\frac{p_3}{p_1}$ два ряда подходящихъ дробей. Такъ какъ одинъ рядъ полученъ для непрерывной дроби съ числителемъ p_{max}, а другой съ числителемъ p_{min}, то первый рядъ подходящихъ дробей назовемъ максимальнымъ, а второй—минимальнымъ,

Назовемъ дроби одинаковаго порядка и значенія въ двухъ рядахъ (т. е. меньшія непрерывныхъ максимальнаго и минимальнаго ряда, или большія непрерывныхъ обоихъ рядовъ)—соотвѣтствующими, и разнаго значенія и порядка (т. е. большую одного и меньшую другого ряда)—несоотвѣтствующими.

Сравнимъ теперь подходящія дроби максимальнаго и минимальнаго ряда. До извѣстной степени приближенія соотвѣтствующія дроби обоихъ рядовъ могутъ быть равны между собой, но слѣдующія за ними подходящія дроби максимальнаго ряда будутъ больше соотвѣтствующихъ дробей минимальнаго ряда. Если сравнить между собой несоотвѣтствующія дроби обоихъ рядовъ, слѣдующія за равными въ томъ и другомъ ряду подходящими дробями, то можно различить два случая несоотвѣтствія:

1) Дробь максимальнаго ряда, мéньшая непрерывной, равна дроби минимальнаго ряда большей непрерывной.

2) Дробь минимальнаго ряда, бóльшая непрерывной, меньше дроби максимальнаго ряда меньшей непрерывной.

Назовемъ первыя изъ такихъ дробей максимальнаго и минимальнаго ряда „первыми расходящимися“

Въ случаѣ непрерывной дроби > 1, первая расходящаяся дробь максимальнаго ряда есть первая нечетная дробь, слѣдующая за рядомъ одинаковыхъ дробей. Если одинаковыхъ дробей нѣтъ, то это—первая подходящая дробь максимальнаго ряда.

Первая расходящаяся дробь минимальнаго ряда есть первая четная дробь, слѣдующая за рядомъ одинаковыхъ дробей; если одинаковыхъ дробей нѣтъ, то это—вторая дробь минимальнаго ряда.

Непрерывныя дроби максимальнаго и минимальнаго ряда опредѣляютъ крайнія грани отрѣзка зоны, въ которомъ находится грань искомаго простѣйшаго символа. Одинаковыя дроби обоихъ рядовъ опредѣлятъ символы граней находящихся внѣ этого отрѣзка (согласно теоремѣ 3).

Первыя расходящіяся дроби, также, какъ и слѣдующія за ними меньшія непрерывной максимальнаго ряда и бóльшія непрерывной—минимальнаго, опредѣлятъ грани, находящіяся на отрѣзкѣ зоны, опредѣляемомъ непрерывными дробями. Всѣ другія подходящія дроби того и другого ряда будутъ соотвѣтствовать символамъ граней, находящихся внѣ этого отрѣзка. Такимъ образомъ, чтобы не выйти за предѣлы требуемой точности, намъ необходимо опредѣлить грань находящуюся на данномъ отрѣзкѣ и, кромѣ того (по условію), имѣющую простѣйшій символъ. Символъ такой грани опредѣлится простѣйшею изъ первыхъ расходящихся дробей. Такимъ путемъ легко рѣшается вопросъ о нахожденіи, съ требуемой точностью, наиболѣе простыхъ отношеній каждыхъ двухъ изъ трехъ индексовъ искомаго символа.

Чтобы найти наиболѣе простое выраженіе для отношенія 3-хъ индексовъ, поступаемъ слѣдующимъ образомъ.

Возьмемъ двѣ послѣдовательныя подходящія дроби, предшествующія первымъ расходящимся дробямъ, въ максимальномъ или минимальномъ ряду за исходныя (см. теорема 1) для развитія пояса. Развиваемъ поясъ между ними до тѣхъ поръ, пока не получимъ символовъ, соотвѣтствующихъ первымъ расходящимся дробямъ того и другого ряда, если онѣ различны и слѣдующимъ за ними черезъ одну [1]), если онѣ равны.

Получаемъ такимъ образомъ отрѣзокъ зоны, находящійся внутри отрѣзка, опредѣляемаго непрерывными дробями. Такимъ образомъ, уменьшаемъ нѣсколько районъ, въ которомъ находится гранъ искомаго символа. Продолжаемъ развитіе поясовъ для всѣхъ трехъ отношеній $\frac{p_1}{p_2}$, $\frac{p_2}{p_3}$ и $\frac{p_3}{p_1}$ въ предѣлахъ уменьшенныхъ отрѣзковъ, пока не получимъ символа удовлетворяющаго условію однозначнаго рѣшенія. Такъ какъ мы начинаемъ развитіе поясовъ, взявъ за исходныя въ каждомъ поясѣ грани съ простѣйшими символами, то первыя величины, удовлетворяющія условію однозначнаго рѣшенія, будутъ искомыми индексами простѣйшаго символа грани.

Для иллюстраціи позволю себѣ привести два примѣра вычисленій простѣйшихъ символовъ граней по вышеизложенному методу.

Первый примѣръ относится къ вычисленію символа грани триклиннаго кристалла [2]).

Данныя измѣреній: $\varphi = 6°34'$ погрѣшность $17' = t'$

$\rho = 42°37'$ $14' = t_1'$

Геометрическія константы: $a_1 = 0{,}9030$

$a_2 = -0{,}0764$

$a_3 = 0{,}0561$

$a_4 = 0{,}9055$

$a_5 = 0{,}0554$

При вычисленіи по формуламъ A надо взять:

для нахожденія: p_{1max} $\varphi + t' = 6°51'$ и $\rho + t_1' = 42°51$

p_{2max} $\varphi - t' = 6°17'$ « $\rho + t_1' = 42°51$

p_{3max} — « $\rho - t_1' = 42°23$

p_{1min} $\varphi - t' = 6°17'$ « $\rho - t_1' = 42°23$

p_{2min} $\varphi + t' = 6°51'$ « $\rho - t_1' = 42°23$

p_{3min} — « $\rho + t_1' = 42°51''$

Подставивъ въ уравненія A найденные углы и произведя соотвѣтствующія вычисленія, находимъ:

$p_{1max} = 0{,}073834$ $p_{1min} = 0{,}061846$

$p_{2max} = 1{,}031800$ $p_{2min} = 1{,}029400$

$p_{3max} = 1{,}095800$ $p_{3min} = 1.078000$

Находимъ отсюда:

$$\frac{p_{2min}}{p_{1max}} = \frac{1029400}{73834} = 13 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}} \qquad \text{I}$$

$$\frac{p_{2max}}{p_{1min}} = \frac{1031800}{61846} = 16 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\ldots}}}}}} \qquad \text{II}$$

Изъ I непрерывной дроби получаемъ минимальный рядъ подходящихъ дробей, а изъ II—максимальный.

Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}\wedge$; $\frac{16}{1}\vee$; $\frac{17}{1}\wedge$; $\frac{50}{3}\vee$; $\frac{317}{19}\wedge$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}\wedge$; $\frac{13}{1}\vee$; $\frac{14}{1}\wedge$; $\frac{237}{17}\vee$; $\frac{725}{52}\wedge$ [1])

Первыя расходящіяся дроби будутъ $\frac{16}{1}$ (макс. р.) и $\frac{14}{1}$ (миним. р.). Эти дроби будутъ опредѣлять отрѣзокъ пояса.

1 14 1 15 1 16 —— p_1. p_2.

Уже изъ этого одного примѣра нахожденія первыхъ расходящихся дробей видно, что обыкновенно нѣтъ надобности находить всѣ подходящія дроби, а можно ограничиваться первыми 4—5.

Совершенно аналогичнымъ способомъ опредѣляемъ отношенія $\frac{p_3}{p_2}$ и $\frac{p_3}{p_1}$.

Для $\frac{p_3}{p_2}$ имѣемъ:

Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}\wedge$; $\frac{1}{1}\vee$; $\frac{16}{15}\wedge$; $\frac{17}{16}\vee$; $\frac{33}{31}\wedge$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}\wedge$; $\frac{1}{1}\vee$; $\frac{23}{22}\wedge$; $\frac{70}{67}\vee$

Первыя расходящіяся дроби будутъ; $\frac{17}{16} = \frac{187}{176}$ (макс. р.) и $\frac{23}{22} = \frac{184}{176}$ (мин. р.). Онѣ опредѣлятъ отрѣзокъ зоны:

[1]) Такъ какъ слѣдующія за первыми расходящимися подходящія дроби будутъ опредѣлять символы граней, лежащихъ внѣ отрѣзка зоны.

[2]) Эти вычисленія были сдѣланы М. К. Еліашевичемъ, любезно сообщившимъ мнѣ ихъ результаты.

[1]) Значекъ $\vee$ надъ числителемъ дроби показываетъ, что она меньше непрерывной, а $\wedge$—больше.

16.17 17 18. 18.19 22.23——$p_2 : p_3$.

Для $\frac{p_3}{p_1}$ находимъ:

Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{17}{1}; \frac{18}{1}; \frac{53}{3}; \frac{71}{4}$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{14}{1}; \frac{15}{1}; \frac{29}{2}; \frac{44}{3}$

Первыя расходящіяся дроби: $\frac{17}{1}$ (макс. р.) и $\frac{15}{1}$ (мин. р.). Опредѣляемый ими отрѣзокъ пояса:

1 17 1 16 1 15 —— $p_1 . p_3$.

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующіе пояса, опредѣляющіе искомый символъ грани съ требуемой точностью:

1.14.0 .... 1.15.0 1.16.0

0.16.17 .... 0.17.18 ... 0.22.23

1.0 15 . .. 1.0.16 ..... 1. 0. 17

Ясно, что простѣйшимъ символомъ для опредѣляемой грани будетъ (1. 16. 17).

Вычисливъ φ и ρ для грани (1. 16. 17), находимъ $\varphi = 6^\circ 25'$ и $\rho = 42^\circ 24'$

Слѣдующій примѣръ относится къ вычисленію простѣйшаго символа энигматической грани ромбическаго кристалла кобальти-амин хлородиметил-гліоксимина,

Грань a [1]) $\left.\begin{matrix}\varphi = 9°34' \\ \varphi = 64°45'\end{matrix}\right\}$ ошибка измѣренія $2' = t$

Геометрическія константы: $a_1 = 0{,}98502$ и $a_4 = 0{,}7910$.

Для вычисленія: $\left\{\begin{matrix} p_{1max} — \varphi + t' = 9°36, \\ p_{2max} — \varphi - t' = 9°32' \\ p_{3max} — \rho - t' = 64°43' \end{matrix}\right.$ $\left|\begin{matrix} p_{1min} — \varphi - t' = 9°32_{,} \\ p_{2min} — \varphi + t' = 9°36 \\ p_{3min} — \rho + t' = 64°47' \end{matrix}\right.$

Найдено: $p_{1max} = 0{,}1693$ $p_{1min} = 0{,}1681$

$p_{2max} = 1{,}2467$ $p_{2min} = 1{,}2465$

$p_{3max} = 0{,}4723$ $p_{3min} = 0{,}4709$.

1) См. мою предъидущую статью „Энигматическія грани нѣкоторыхъ кристалловъ“

$\frac{p_2}{p_1}$ Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{7}{1}; \frac{15}{2}; \frac{37}{5}; \frac{89}{12}; \frac{2440}{329}$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{7}{1}; \frac{15}{2}; \frac{22}{3}; \frac{81}{11}; \frac{670}{91}$

Первыя расходящіяся дроби: $\frac{37}{5} = \frac{407}{55}$ (макс. р.) и $\frac{81}{11} = \frac{405}{55}$ (мин. р.). Опредѣлившійся отрѣзокъ пояса:

5 37 11.81 —— $p_1 p_2$.

$\frac{p_2}{p_3}$: Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{5}{2}; \frac{8}{3}; \frac{45}{17}; \frac{323}{122}$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{5}{2}; \frac{8}{3}; \frac{29}{11}; \frac{66}{25}$

Первыя расходящіяся дроби $\frac{45}{17} = \frac{1125}{425}$ (макс. р.) и $\frac{66}{25} = \frac{1122}{425}$ (мин. р.). Отрѣзокъ зоны:

66 25 37 14 . 45 17.

$\frac{p_3}{p_1}$: Максимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{14}{5}; \frac{45}{16}$

Минимальный рядъ: $\frac{1}{0}; \frac{2}{1}; \frac{3}{1}; \frac{11}{4}; \frac{14}{5}$

Первая расходящаяся дробь обоихъ рядовъ $\frac{14}{5}$.

Опредѣлившіеся пояса:

5.37.0. 11.81.0

0 45.17 0.37.14 0.66.25

.5. 0. 14

Отсюда символъ грани: (5 37 14), для которой вычислены $\varphi = 9^0 33'$ и $\rho = 64^0 45'$

Изъ только что приведенныхъ примѣровъ вполнѣ выясняется весь ходъ вычисленій по изложенному выше методу.