Г 2596

Записки Ленинградского горного института, т. X, вып. 3, 1937
Annales de l'Institut des Mines à Leningrad, vol. X, livr. 3, 1937

О напряжениях в канате при подъеме груза

доц. Н. П. Неронов

Sur la tension du câble pendant l'ascension de la cage du puits de mine

Doz. N. P. Neronoff

Расчет каната на прочность имеет на практике несколько условный характер. Именно исходят из отношения разрывающей нагрузки к нагрузке статической, которое носит название коэфициента безопасности и наименьшая величина которого устанавливается правилами безопасности для подъемов. Задавшись величиной этого коэфициента и найдя при его помощи число и диаметр проволок, производят затем поверку коэфициента безопасности, частично принимая во внимание действительные напряжения в канате. Однако, поскольку последние полностью не учитываются, подобная поверка не может дать достаточно ясного представления о действительном значении коэфициента безопасности.

Поэтому, несмотря на то, что длительная практика показала приемлемость упомянутого выше расчета, вполне рациональным он все-таки признан быть не может и временно сохраняет свое значение только в силу сравнительной сложности задачи определения действительных напряжений в канате.

Определение напряжений в подъемном канате для различных, могущих встретиться в практике случаев, составляло задачу многих исследований. Из новых работ следует указать весьма ценную монографию проф. А. Ш. Локшина

Поперечными размерами каната обычно пренебрегают. Поэтому будем рассматривать канат как упругую нить и ограничимся случаем каната постоянного сечения.

Как показывают произведенные расчеты, для небольших высот подъема (100—150 *м*) вес каната составляет около 12% от веса поднимаемой клети с грузом.[2] В этом случае допустимо первым пренебречь и считать канат нитью, не имеющей массы. При большой длине каната этого сделать нельзя и является необходимым учет как массы, так и веса каната.

На основании сделанного замечания поставленная задача естественно распадается на две части.

---

[1] „О динамических напряжениях в подъемных канатах", приложение к № 12 (1929) „Горного журнала". Динамические напряжения в канатах переменной длины рассмотрены во второй части работы, см. стр. 89—120. На стр. 1—5 можно найти изложение истории вопроса.

[2] Расчет канатов приводится в книге проф. А. П. Германа, Шахтный подъем, 1932, стр. 262, § 52.

В настоящем исследовании мы ограничиваемся небольшими высотами подъема, приводя вопрос к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка. Общий случай является предметом нашего дальнейшего изучения во второй части настоящей работы и представляет несколько большие трудности.

§ 1. Вывод дифференциального уравнения движения клети

Клеть A подвешена в точке B к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O (рис. 1).

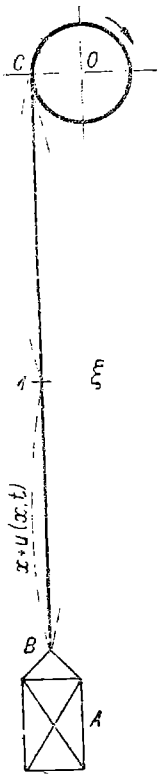


Рис. 1.

Предполагая отсутствие скольжения каната по барабану, будем считать скорость точки C каната направленной вертикально вверх и по величине заданной функцией времени $v(t)$.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB от конца B (рис. 1) равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части каната MB, а второе $u(x, t)$—ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией переменных x и времени t.

Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости T каната в точке M:

$$T = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \tag{1}$$

где k обозначает некоторую положительную постоянную, а производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ — относительное удлинение.[1]

Следствием пренебрежения массой, а значит и силами инерции каната, является линейная зависимость $u(x, t)$ от x, т. е.

$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= xf(t) \\ T &= kf(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Помещаем начало координат в точке C и направляем координатную ось вертикально вниз. Обозначаем координаты точек M и B соответственно через X и ξ.

Тогда

$$X = \xi - x[1 + f(t)]. \tag{3}$$

Полагая $X = 0$, находим значение $x = l$, соответствующее точке C:

$$x = l = \frac{\xi}{1+f(t)}. \tag{4}$$

Вычисляем скорость точки M каната, дифференцируя по t уравнение (3):

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - x\frac{df(t)}{dt} \tag{5}$$

---

[1] Значение k может быть найдено по формуле $k = \mathcal{E}F$, где $\mathcal{E}$ обозначает модуль упругости для каната и F—площадь его сечения. Теоретическое и экспериментальное определение значения $\mathcal{E}$ составляло задачу ряда работ, указание на которые можно найти в заметке акад. А. Н. Динника (см. сборник „Прикладная математика и механика", 1933, т. I, в. 2, стр. 335, § 7).

Применяем последнее уравнение к точке C:

$$v(t) \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\xi \frac{df(t)}{dt}}{1+f(t)}. \tag{6}$$

Составляем дифференциальное уравнение движения клети A, обозначая через m ее массу и через g ускорение свободного падения:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - kf(t). \tag{7}$$

Исключаем из уравнений (6) и (7) функцию $f(t)$:

$$m\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(m \frac{d^2\xi}{dt^2} - a \right) \left[\frac{d\xi}{dt} - v(t) \right], \tag{8}$$

где

$$a = mg + k. \tag{9}$$

Полученное дифференциальное уравнение третьего порядка определяет функцию ξ при следующих начальных данных:

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \qquad \frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0} = \xi'_0.$$

Постоянная ξ''_0 находится из уравнения

$$\xi''_0 = g - \frac{k}{m}\left(\frac{\xi_0}{l_0} - 1\right), \tag{10}$$

где l_0 обозначает нормальную длину каната BC в начальный момент.

Вид функции $v(t)$, входящей в дифференциальное уравнение (8), в каждом отдельном случае зависит от характера диаграммы окружной скорости на барабане. Прежде чем переходить к общему случаю, рассмотрим следующий частный, но имеющий большое распространение на практике, когда диаграмма скорости состоит из трех участков. Первый соответствует начальному периоду ускоренного вращения барабана (в частном случае равноускоренного), второй — наиболее длительному периоду равномерного вращения и, наконец, последний — периоду равнозамедленного вращения. Результат интегрирования уравнения (8) для каждого из указанных выше периодов, конечно, будет различен. Все отмеченные случаи последовательно разбираются в нижеследующих параграфах.

В то время как мы получили для клети дифференциальное уравнение движения (8) третьего порядка, в цитированной выше работе проф. А. Ш. Локшина [1] движение клети приближенно определяется дифференциальным уравнением второго порядка. Выясним степень точности указанного приближения. С этой целью напишем дифференциальное уравнение движения клети в виде:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - k\frac{\xi - l}{l},$$

где l попрежнему обозначает переменную нормальную длину каната BC, являющуюся неизвестной функцией времени. Вводим в рассмотрение абсолютную деформацию каната u:

$$u = \xi - l;$$

---

[1] Idem, стр. 89, см. уравнения (1) и (2) где u, как и у нас, обозначает абсолютное удлинение каната.

отсюда $$\frac{d^2\xi}{dt^2} \quad \frac{d^2u}{dt^2} \quad \frac{d^2l}{dt^2}$$

После соответствующей подстановки наше дифференциальное уравнение переписывается в следующей форме:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{ku}{l} + mg\left(1 - \frac{1}{g}\frac{d^2l}{dt^2}\right)$$

Это точное уравнение переходит в приближенное уравнение проф. А. Ш. Локшина

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{ku}{l_0 + s(t)} \qquad mg\left[1 - \frac{1}{g}\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right],$$

если сделать два предположения.

Первое заключается в вычислении неизвестной величины l по формуле:

$$l = l_0 + s(t),$$

где l_0 обозначает начальное значение переменной l, а $s(t)$ — взятую с соответствующим знаком длину дуги поворота барабана.

Вследствие малости деформаций каната первое допущение является приемлемым.

Этого нельзя сказать о втором допущении, в силу которого вместо неизвестной производной $\frac{d^2l}{dt^2}$ подставляется

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{dv(t)}{dt}.$$

В самом деле, исключение функции $f(t)$ из уравнений (4) и (6) настоящего параграфа дает

$$\frac{\frac{dl}{dt}}{l} \qquad \frac{v(t)}{\xi}$$

Благодаря малости деформаций каната ξ мало отличается от l, и поэтому на основании последнего равенства $\frac{dl}{dt}$ мало отличается от $v(t)$.

Но вытекает ли отсюда, что тем же свойством обладают и производные этих функций, т. е. $\frac{d^2l}{dt^2}$ и $\frac{dv(t)}{dt}$? В общем случае этого никоим образом нельзя утверждать. Напомним, что введение в вариационное исчисление понятия о сильной вариации функции именно основано на том, что графики двух функций могут иметь при одной и той же абсциссе мало отличающиеся между собой ординаты и в то же время весьма различные угловые коэфициенты. Поэтому мне кажется, что в данной задаче было бы желательно избежать приема решения, основанного на не вполне очевидном предположении.

§ 2. Начальный период вращения барабана

Представляем дифференциальное уравнение движения клети в виде

$$\frac{m\frac{d^3\xi}{dt^3}}{m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a} = \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\xi} - \frac{v(t)}{\xi}.$$

Интегрируем обе части этого уравнения в пределах от 0 до t:

$$\log \frac{m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a}{\xi}_0 \int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi} \tag{11}$$

Пользуясь равенствами (9) и (10), находим:

$$\frac{m\xi_0'' - a}{\xi_0} = -\frac{k}{l_0}. \tag{12}$$

При помощи последнего равенства уравнение (11) переписывается следующим образом:

$$\log \frac{m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a}{\frac{k}{l_0}\xi} = -\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}.$$

Отсюда

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a = -\frac{k}{l_0}\xi e^{-\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}},$$

обозначая через e основание натуральных логарифмов.

Наконец подставляем значение a из уравнения (9):

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g + \frac{k}{m}\left(1 - \frac{}{l_0}\, e^{\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}}\right) \tag{13}$$

Интеграл правой части имеет простой смысл. В самом деле, в предыдущем параграфе было получено равенство:

$$\frac{\frac{dl}{dt}}{l} = \frac{v(t)}{\xi}$$

или

$$\frac{d\log l}{dt} = \frac{v(t)}{\xi}.$$

Интегрирование дает

$$l = l_0\, e^{\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}}$$

Разложим показательную функцию правой части уравнения (13) в бесконечный ряд и в полученном разложении удержим только первые два члена, пользуясь тем обстоятельством, что в начальный период движения клети ξ имеет наибольшее значение:

$$e^{-\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}} = 1 - \int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}. \tag{14}$$

Наконец вводим обозначение

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt,$$

где функция $s(t)$ считается известной, интегрируем по частям интеграл правой части равенства (14):

$$\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi} = \frac{s(t)}{\xi}\Bigg|_0^t + \int_0^t \frac{s(t)\,dt}{\xi^2}.$$

Пренебрегая в предыдущем равенстве интегралом правой части, подынтегральная функция которого содержит в знаменателе ξ^2, имеем приближенно

$$\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi} = \frac{s(t)}{\xi}\Bigg|_0^t = \frac{s(t)}{\xi}$$

Отсюда равенство (14) может быть заменено следующим:

$$e^{-\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}} = 1 - \frac{s(t)}{\xi}.$$

После этого точное уравнение (13) можно заменить следующим приближенным:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g + \frac{k}{m}\left\{1 - \frac{\xi}{l_0}\left[1 - \frac{s(t)}{\xi}\right]\right\}$$

или

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k}{ml_0}\xi + g + \frac{k}{m} + \frac{k}{ml_0}s(t). \tag{15}$$

Полученное линейное диференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэфициентами может быть проинтегрировано в общем виде. В дальнейшем мы ограничимся случаем равноускоренного вращения барабана из состояния покоя. Пусть j обозначает постоянное тангенциальное ускорение на окружности барабана.

Тогда

$$s(t) = -\frac{1}{2}jt^2.$$

Интеграл уравнения (15) после определения входящих в него произвольных постоянных представляется в следующей форме:

$$\xi = l_0 + \frac{ml_0}{k}(g+j) - \frac{1}{2}jt^2 - \frac{ml_0 j}{k}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{ml_0}}\right) \tag{16}$$

Далее при помощи уравнения (7) определяем натяжение T каната:

$$T = k\,f(t) = mg - m\frac{d^2\xi}{dt^2} = mg + mj - mj\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{ml_0}}\right). \tag{17}$$

Находим максимальное значение T:

$$T_{\max} = mg + 2\,mj,$$

что подтверждает результат Штера (Stör): наибольшее динамическое напряжение в канате равно удвоенному напряжению от сил инерции.[1]

---

[1] Проф. А. П. Герман, idem, стр. 277. В своей статье „(Österreichische Zeitschrift für Berg und Hüttenwesen", 1909, S. 419) Штер произвольно считает движение клети как бы происходящим от перемещения каната постоянной длины, верхнему концу которого сообщается движение.

Из предыдущих рассуждений мы видим, что это заключение имеет приближенный характер и предполагает дробь $\frac{s(t)}{\xi}$ малой по абсолютному значению.

§ 3. Случай равномерного вращения

Обозначим через v постоянную линейную скорость на окружности барабана. Имеем:

$$s(t) = -vt,$$

ограничиваясь случаем поднятия клети.

Пусть ξ_0 обозначает абсциссу клети в начальный момент и предположим, что последний соответствует началу равномерного вращения ($t = 0$).

Вместо ξ вводим неизвестную функцию x по формуле [1]

$$\xi = \xi_0 - vt + x. \tag{18}$$

Диференциальное уравнение (8) принимает вид:

$$m(\xi_0 - vt + x)\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - a\right) \tag{19}$$

Очевидно, в данном случае имеет место частный интеграл

$$x = 0.$$

Ищем решение уравнения (19), соседнее по отношению к предыдущему, представляя функцию x бесконечным рядом:

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \tag{20}$$

и применяя метод последовательных приближений.

В первом приближении $|x = x_1|$ неизвестная функция определяется диференциальным уравнением

$$(\xi_0 - vt)\frac{d^3x}{dt^3} = -a_1\frac{dx}{dt}, \tag{21}$$

где

$$a_1 = \frac{a}{m} = g + \frac{k}{m}$$

В дальнейшем мы ограничимся первым приближением, так как его точность для наших целей совершенно достаточна.

Вводим вместо переменных t, x новые τ, y по формулам:

$$t = \frac{\xi_0}{v} + \frac{v}{a_1}\tau, \qquad \frac{dx}{dt} = y. \tag{22}$$

Имеем:

$$\tau\frac{d^2y}{d\tau^2} - y = 0. \tag{23}$$

---

[1] Отметим, во избежание недоразумений, что в наших обозначениях переменная x не совпадает с абсолютным удлинением каната u. Последнее равно $\xi - l$ и выражается через x следующим образом:

$$u = \xi - l = \xi_0 - l_0 e^{\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}},$$

где $\xi = \xi_0 + s(t) + x$ и в частном случае равномерного вращения $s(t) = -vt$.

Наконец, замена переменных

$$\left.\begin{aligned} \tau &= -\frac{w^2}{4} \\ y &= wz \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

приводит уравнение (23) к виду:

$$w^2 \frac{d^2 z}{dw^2} + w \frac{dz}{dw} + (w^2 - 1) z = 0. \tag{25}$$

Мы получили уравнение Бесселя. Его интеграл, содержащий бесселевы функции первого и второго рода:

$$z = C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w); \tag{26}$$

через C_1 и D_1 обозначены произвольные постоянные.

Возвращаемся к первоначальным переменным t и

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{2}{v}\sqrt{a_1(\xi_0 - vt)} \\ \frac{dx}{dt} &= w\left[C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w)\right] \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Отсюда, принимая во внимание, что на основании равенства (18) $x_{t=0} = 0$,

$$x = \int_0^t w\left[C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w)\right] dt$$

или

$$x = -\frac{v}{2a_1}\int_{w_0}^{w} w^2\left[C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w)\right] dw,$$

где

$$w_0 = \frac{2}{v}\sqrt{a_1 \xi_0}$$

Выполняем квадратуру, пользуясь известными соотношениями [1]

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n Y_n(x)\right] = x^n Y_{n-1}(x).$$

Имеем:

$$x = -\frac{vw^2}{2a_1}\left[C_1 J_2(w) + D_1 Y_2(w)\right]_{w_0}^{w} \tag{28}$$

Равенство (18) позволяет составить уравнения для определения начальных значений x_0', x_0'' производных функций x:

$$\xi_0' = -v + x_0', \quad \xi_0'' = x_0'',$$

---

[1] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen, 1904, S. 28.

где значения производных ξ_0' и ξ_0'' могут считаться известными (§ 1). Составляем уравнения для нахождения производных постоянных C_1 и D_1:

$$C_1 J_1(w_0) + D_1 Y_1(w_0) = \frac{\varkappa_0'}{w_0},$$
$$C_1 J_0(w_0) + D_1 Y_0(w_0) = -\frac{\varkappa_0'' v}{2a_1}. \tag{29}$$

Находим из уравнения (7) натяжение T каната:

$$T = kf(t) = mg + \frac{2a}{v}\left[C_1 J_0(w) + D_1 Y_0(w)\right]. \tag{30}$$

Формула, полученная для аналогичного случая проф. А. Ш. Локшиным [1], отлична от найденной нами (30). Приложение последней к численному примеру составляет нашу дальнейшую задачу.

При наличии таблиц бесселевых функций вычисления для случая равномерного вращения барабана весьма упрощаются.

В рудничной практике аргумент w может быть довольно велик. Поэтому приведем известные асимптотические выражения для бесселевых функций при большом значении аргумента [2]:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P(x)\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) - Q(x)\sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right],$$
$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P(x)\sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) + Q(x)\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right)\right],$$

где

$$P(x) = 1 + \sum \frac{(-1)^s}{(2s)!}\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{(8x)^{2s}}\frac{[4n^2-(4s-1)^2]}{},$$

$$Q(x) = \frac{4n^2-1}{8x} - \sum \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{(8x)^{2s+1}}\frac{[4n^2-(4s+1)^2]}{}$$

и в двух предыдущих суммах расходящихся рядов нужно брать только конечное число первых членов ($s = 1, 2, 3, \ldots$).

§ 4. Случай равнопеременного вращения

Этот случай может иметь место при поднятии клети в начальный период (равноускоренное вращение), а также в период торможения (равнозамедленное вращение).

Равноускоренное вращение. Обозначим через v_0 начальную линейную скорость при $t = 0$ и через j постоянное тангенциальное ускорение на окружности барабана. Тогда

$$s(t) = -v_0 t - \frac{1}{2} j t^2.$$

Так же как в предыдущем параграфе, вводим новую неизвестную функцию

$$\xi = \xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 + \varkappa, \tag{31}$$

где ξ_0 обозначает начальную абсциссу клети.

---

[1] А. Ш. Локшин, idem, § 59.
[2] N. Nielsen, idem, S. 156, § 59.

Дифференциальное уравнение движения клети переписывается следующим образом:

$$m\left(\xi_0 - v_0 t \quad \frac{1}{2} j t^2 \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\left(m\frac{d^2 x}{dt^2} - m j - a\right)\right). \tag{32}$$

В первом приближении функция x определяется уравнением:

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2\right)\frac{d^3 x}{dt^3} = -a_2 \frac{dx}{dt} \tag{33}$$

где

$$a_2 = \frac{m j + a}{m} = j + g + \frac{k}{m}.$$

Производим замену переменных:

$$z = \frac{v_0 + j t}{\sqrt{2 j \xi_0 + v_0^2}} \qquad y = \frac{dx}{dt} \tag{34}$$

Наконец вводим сокращенное обозначение:

$$k_1^2 = \frac{2a_2}{j} = \frac{2}{j}\left(j + g + \frac{k}{m}\right).$$

Тогда уравнение (33) примет вид:

$$(1 - z^2)\frac{d^2 y}{dz^2} + k_1^2 y = 0. \tag{35}$$

В условиях практики параметр k_1 имеет большое значение. Поэтому будет целесообразным искать асимптотическое выражение интеграла предыдущего уравнения при больших значениях k_1.

С уравнением вида (35) столкнулся в своих исследованиях проф. А. Ш. Локшин. [1] Он нашел нужное нам асимптотическое выражение двумя способами. Первый принадлежит Горну (Horn) [2], второй основан на применении весьма остроумной замены переменных в дифференциальном уравнении (35). Именно сначала вводится новая переменная R, связанная с y соотношением:

$$y = (1 - z^2)^{\frac{1}{4}} R. \tag{36}$$

Дифференциальное уравнение (35) преобразуется следующим образом:

$$(1 - z^2)\frac{d^2 R}{dz^2} - z\frac{dR}{dz} + \left[k_1^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(-z^2)}\right]R = 0. \tag{37}$$

Далее при выполнении неравенства

$$z = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2 j \xi_0 + v_0^2}} < 1$$

можно всегда положить

$$z = \sin p. \tag{38}$$

Уравнение (37) принимает вид:

$$\frac{d^2 R}{dp^2} + \left(k_1^2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4\cos^2 p}\right)R = 0.$$

---

[1] А. Ш. Локшин, idem, §§ 61—63.

[2] Mathematische Annalen, 1899, Bd. 52, S. 271, 340.

При большом значении параметра k_1 неравенство $k_1^2 > \frac{3}{4\cos^2 p} - \frac{1}{4}$ имеет силу для значительного интервала времени при подъятии клети.

Представляем R бесконечным рядом:

$$R = R_0 + R_1 + R_2 +$$

и применяем метод последовательных приближений.

В дальнейшим мы ограничиваемся первым приближением

$$R = R_0,$$

дающим главную часть искомого асимптотического выражения для моментов времени, не слишком удаленных от начального. В первом приближении функция R определяется диференциальным уравнением

$$\frac{d^2R}{dp^2} + k_1^2 R = 0. \tag{40}$$

Отсюда

$$R = C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p. \tag{41}$$

Определяем произвольные постоянные C_2 и D_2:

$$C_2 = \frac{1}{k_1}(R_0 k_1 \cos k_1 p_0 - R_0' \sin k_1 p_0), \quad D_2 = \frac{1}{k_1}(R_0 k_1 \sin k_1 p_0 + R_0' \cos k_1 p_0), \tag{42}$$

где

$$R_0 = R|_{p=p_0}, \qquad R_0' = \left.\frac{dR}{dp}\right|_{p=p_0},$$

$$z = \sin p = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}},$$

$$z_0 = \sin p_0 = \left.\frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}\right|_{t=0} = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}.$$

При помощи равенств (34), (36) и (38) вычисляем значения R_0 и R_0', которые в дальнейшем будут считаться известными, так же как и значения постоянных C_2 и D_2:

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \varkappa_0' \left(1 + \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\ R_0' &= \frac{(2j\xi_0 + v_0^2)^{\frac{1}{4}}}{2(2j\xi_0)^{\frac{3}{4}}}(4\xi_0 \varkappa_0'' + \varkappa_0' v_0). \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Значения $\varkappa_0'$ и $\varkappa_0''$ находятся на основании равенства (31) из уравнений

$$\xi_0' = -v_0 + \varkappa_0', \quad \xi_0'' = -j_0 + \varkappa_0''.$$

Возвращаемся к функции y:

$$y = (C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p)\cos^{\frac{1}{2}} p = (1 - z^2)^{\frac{1}{4}}[C_2 \cos(k_1 \arcsin z) +$$

$$+ D_2 \sin(k_1 \arcsin z)] = \left[\frac{2j(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2)}{2j\xi_0 + v_0^2}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{44}$$

$$\left[C_2 \cos\left(k_1 \arcsin \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}\right) + D_2 \sin\left(k_1 \arcsin \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}\right)\right].$$

Теперь определение функции приводится к выполнению квадратуры, принимая во внимание, что x 0:

$$x = \int_0^t y\,dt = \frac{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}{j} \int_{\rho_0}^{p} (C_2 \cos k_1 p + D_2 \sin k_1 p) \cos^2 \rho\, d\rho. \qquad (45)$$

Мы не останавливаемся на дальнейшем изучении полученного интеграла, как не представляющем особенного практического интереса.

Переходим к определению усилия T каната из уравнения:

$$T = kf(t) = mg + mj - m\frac{dy}{dt} \qquad (46)$$

ы числяем значение входящей сюда производной

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{j\cos^{\frac{1}{2}} p \cos k_1 p}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \left[k_1 (C_2 \operatorname{tg} k_1 p - D_2) + \frac{1}{2}(C_2 + D_2 \operatorname{tg} k_1 \rho) \operatorname{tg} p \right]$$

Выражение для T получается иным, чем у проф. А. Ш. Локшина. Численный пример приложения формулы (46) будет указан в дальнейшем.

Равнозамедленное вращение. Сохраняем все прежние обозначения. Будем производить отсчет времени от начала равнозамедленного вращения. Имеем:

$$s(t) = -v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

Вводим новую неизвестную функцию по формуле

$$\xi = \xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 + x. \qquad (48)$$

Соответствующее диференциальное уравнение в первом приближении:

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \right) \frac{d^3 x}{dt^3} = -a_3 \frac{dx}{dt} \qquad (49)$$

где

$$a_3 = -j + g + \frac{k}{m}.$$

Ана логично предыдущему производим замену переменных, полагая $2j\xi_0 - v_0^2 > 0$

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}} \qquad y = \frac{dx}{dt}. \qquad (50)$$

Вводим обозначение

$$k_2^2 = \frac{2}{j}\left(-j + g + \frac{k}{m} \right).$$

Диференциальное уравнение (49) преобразуется следующим образом:

$$(1 + z^2)\frac{d^2 y}{dz^2} + k_2^2 y = 0. \qquad (51)$$

Благодаря большему значению параметра k_2 целесообразно искать асимптотическое выражение интеграла уравнения (51) при $k_2 \to \infty$.

Следуя прежнему методу [1], вводим вместо y новую переменную R по формуле:

$$y = (1+z^2)^{\frac{1}{4}} R. \tag{52}$$

Дифференциальное уравнение (51) заменяется следующим:

$$(1+z^2)\frac{d^2R}{dz^2} + z\frac{dR}{dz} + \left[k_2^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(1+z^2)}\right]R = 0. \tag{53}$$

Положим

$$z = \sinh p. \tag{54}$$

Уравнение (53) переписывается в виде:

$$\frac{d^2R}{dp^2} + \left(k_2^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4\cosh^2 p}\right)R = 0. \tag{55}$$

Если параметр k_2 достаточно велик, неравенство

$$k_2^2 > \left|\frac{1}{4} - \frac{3}{4\cosh^2 p}\right|$$

имеет место для всего периода равнозамедленного вращения барабана.

Применяем метод последовательных приближений, представляя R бесконечным рядом:

$$R = R_0 + R_1 + R_2 +$$

Дифференциальное уравнение, определяющее функцию R в первом приближении ($R = R_0$), имеет вид:

$$\frac{d^2R}{dp^2} + k_2^2 R = 0. \tag{56}$$

Интегрирование дает:

$$R = C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p. \tag{57}$$

Произвольные постоянные C_3 и D_3 определяются выражениями:

$$C_3 = \frac{1}{k_2}(R_0 k_2 \cos k_2 p_0 - R_0' \sin k_2 p_0), \tag{58}$$

$$D_3 = \frac{1}{k_2}(R_0 k_2 \sin k_2 p_0 + R_0' \cos k_2 p_0).$$

Здесь

$$R_0 = R \qquad R_0' = \left.\frac{dR}{dp}\right|_{=p_0},$$

$$z = \sinh p = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}},$$

$$z_0 = \sinh p_0 = \left.\frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}\right|_{t=0} = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}.$$

---

[1] А. Ш. Локшин, idem, § 67.

Равенства (50), (52) и (54) позволяют найти значения R_0 и R_0':

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \varkappa_0'\left(1-\frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}} \\ R_0' &= -\frac{(2j\xi_0 - v_0^2)^{\frac{1}{4}}}{2(2j\xi_0)^{\frac{3}{4}}}(4\xi_0 \cdot \quad + \varkappa_0' v_0). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

При помощи равенства (48) определяем значения $\varkappa_0'$, $\varkappa_0''$ из уравнений:

$$\xi_0' = -v_0 + \varkappa_0', \quad \xi_0'' = j + \varkappa_0''$$

В дальнейшем значения R_0 и R_θ', а следовательно и значения постоянных C_3 и D_3 считаются известными.

Возвращаемся к функции y:

$$y = (C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p)\cos \mathrm{h}^{\frac{1}{2}} p = (1+z^2)^{\frac{1}{4}}\left[C_3 \cos(k_2 \operatorname{arc\,sin\,h} z) + \right.$$

$$\left. + D_3 \sin(k_2 \operatorname{arc\,sin\,h} z)\right] = \left[\frac{2j(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2}jt^2)}{2j\xi_0 - v_0^2}\right]^{\frac{1}{4}} \tag{60}$$

$$\left[C_3 \cos k_2 \operatorname{arc\,sin\,h}\frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}} + D_3 \sin\left(k_2 \operatorname{arc\,sin\,h}\frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}\right)\right].$$

Определение функции требует выполнения квадратуры:

$$\int_0 y\,dt = -\frac{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}{j}\int_{p_0}^{p}(C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p)\cos \mathrm{h}^{\frac{3}{2}} p\,dp. \tag{61}$$

Полученные результаты позволяют найти усилие T каната:

$$T = kf(t) = mg - mj - m\frac{dy}{dt}, \tag{62}$$

где

$$\frac{dy}{dt} = \frac{j\cos \mathrm{h}^{-\frac{1}{2}} p \cos k_2 p}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}\left[k_2(C_3 \operatorname{tg} k_2 p - D_3) - \frac{1}{2}(C_3 + D_3 \operatorname{tg} k_2 p)\operatorname{tg\,h} p\right]. \tag{63}$$

Таким образом в случае, если диаграмма окружной скорости барабана состоит из участков, соответствующих равномерному или равнопеременному вращению, можно аналитически, на основании вышеприведенных формул, найти изменение натяжения каната за весь период поднятия клети.

§ 5. Учет влияния пружины

На практике клеть может подвешиваться к канату не непосредственно, а при помощи пружины, работающей на сжатие.

Обозначим коэфициент пропорциональности для пружины в законе Гука через k_1, через l_1 ее нормальную (при отсутствии сил) длину и через η величину абсолютного сжатия. Таким образом усилие T в пружине будет равно:

$$T = k_1 \eta.$$

Сохраним все обозначения § 1, положение начала координат в точке C и направление координатной оси (вертикально вниз). Абсцисса произвольной точки M каната (рис. 1)

$$X = \xi - x - u(x, t).$$

Как и раньше, деформация части MB каната имеет вид:

$$u(x, t) = x f(t).$$

Поэтому

$$X = \xi - x[1 + f(t)].$$

Полагая $X = 0$, находим нормальную длину l каната BC:

$$x = l = \frac{\xi}{1 + f(t)}.$$

Далее вычисляем скорость точки M каната:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - x\frac{df(t)}{dt}$$

Применяем последнее уравнение к точке C:

$$v(t) = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi \frac{df(t)}{dt}}{1 + f(t)}. \tag{64}$$

Составляем диференциальное уравнение движения клети:

$$m\frac{d^2(\xi - l_1 + \eta)}{dt^2} = mg - T$$

или

$$m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = mg - T. \tag{65}$$

Так как натяжение пружины и каната одно и то же, то

$$T = k_1\eta = kf(t). \tag{66}$$

Исключение из уравнений (64), (65), (66) функций $f(t)$ и η дает диференциальное уравнение движения клети с учетом влияния пружины:

$$\frac{d}{dt}\frac{\xi^2\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + v^2(t) - \frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = \frac{\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right]}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + v^2(t) - \frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}}, \tag{67}$$

где

$$a = mg + k.$$

При $k_1 \to \infty$, т. е. при бесконечно жесткой пружине, полученное нами уравнение переходит в уравнение (8) § 1.

Для преобразования уравнения (67) переписываем его в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\xi^2\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + v^2(t) - \frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = \frac{\frac{d\xi}{dt} - v(t)}{\frac{\xi^2\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)}{\xi^2 + \frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2} + v^2(t) - \frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}}}$$

и затем интегрируем от нуля до t:

$$\log \frac{\xi\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a\right)}{\xi^2+\frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+v^2(t)-\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = \int_0^t v(t)\,dt \tag{68}$$

Далее имеем:

$$\frac{\xi\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a\right)}{\xi^2+\frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+v^2(t)-\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}}_{=0} = -\frac{k}{l_0}$$

Поэтому уравнение (68) переписывается следующим образом:

$$\log \frac{-\frac{l_0}{k}\xi\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a\right)}{\xi^2+\frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+v^2(t)-\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = -\int_0^t v(t)\,dt$$

или

$$\frac{\xi\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a\right)}{\xi^2+\frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+v^2(t)-\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = -\frac{k}{l_0}\,e^{\int_0^t \frac{v(t)dt}{\xi}} \tag{69}$$

В дальнейшем мы ограничимся только начальным периодом движения клети, когда ξ имеет наибольшее значение и, повторяя рассуждения § 2, заменим показательную функцию правой части уравнения ее приближенным значением:

$$e^{\int_0^t \frac{v(t)\,dt}{\xi}} = 1-\frac{s(t)}{\xi}.$$

При этом дробь $\frac{s(t)}{\xi}$ предполагается малой по абсолютному значению.

Приведенное выше равенство позволяет заменить точное дифференциальное уравнение движения клети (69) следующим приближенным:

$$\frac{\xi\left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a\right)}{\xi^2+\frac{m}{k_1}\left\{\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}+v^2(t)-\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right\}} = -\frac{k}{l_0}\left[1-\frac{s(t)}{\xi}\right]$$

или

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}-a = -\frac{k}{l_0}\left[1-\frac{s(t)}{\xi}\right]\left\{\xi+\frac{m}{k_1}\left[\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{v^2(t)}{\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{d[\xi v(t)]}{dt}\right]\right\}$$

Так как по предположению ξ велико, то, производя указанные выше действия в правой части последнего уравнения, отбрасываем члены, содержащие ξ делителем. Имеем:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k}{m l_0\left(1+\frac{k}{l_0 k_1}\right)} \cdot \frac{mg+k}{m\left(1+\frac{k}{l_0 k_1}\right)} + \frac{k}{m l_0\left(1+\frac{k}{l_0 k_1}\right)}\left[s(t) - \frac{m\,dv(t)}{k_1\,dt}\right]. \tag{70}$$

Мы получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэфициентами. Исследуем частный случай равноускоренного вращения барабана из состояния покоя, когда

$$s(t) = -\frac{1}{2} j t^2.$$

В этом случае интеграл уравнения (70) имеет вид:

$$\xi = l_0 + \frac{m l_0}{k}(g+j) - \frac{1}{2} j t^2 - \frac{m l_0 j}{k} \cos\left[t\sqrt{\frac{k}{m l_0\left(1+\frac{k}{l_0 k_1}\right)}}\right]. \tag{71}$$

Предыдущее уравнение позволяет найти натяжение T каната:

$$T = mg + mj - \frac{mj}{1+\frac{k}{l_0 k_1}} \cos\left[t\sqrt{\frac{k}{m l_0\left(1+\frac{k}{l_0 k_1}\right)}}\right].$$

Максимальное значение T:

$$T_{\max} = mg + mj\left(1+\frac{1}{1+\frac{k}{l_0 k_1}}\right). \tag{72}$$

48366

Сравнивая полученный результат с результатом § 2, мы видим, что присутствие пружины уменьшает $T_{\max}$. При $k_1 \to \infty$ (бесконечно жесткая пружина) имеем результат Штёра.

§ 6. Общий случай

Выше (§ 1) было выведено дифференциальное уравнение движения клети в следующей форме ($a = mg + k$):

$$m\xi\frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right] \tag{73}$$

В общем случае функция $v(t)$ может быть произвольной. Мы будем считать ее голоморфной. Если это условие не выполняется для всей диаграммы окружной скорости на барабане, то предположим, что диаграмма может быть разбита на конечное число таких частей, где предыдущее условие выполнено. Наши дальнейшие рассуждения будут относиться к любой из этих частей.

Заметим прежде всего, что прежний способ интегрирования уравнения (73), основанный на подстановке

$$\xi = \xi_0 + s(t) + \varkappa,$$

где

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt,$$

в общем случае, т. е. при произвольном виде функции $v(t)$, не приводит к цели, так как частный интеграл $\varkappa = 0$ теперь уже не будет иметь места.

ереходя к интегрированию диференциального уравнения движения клети в общем случае, вводим вместо переменных t, новые τ, η по формулам:

$$t = \lambda\tau, \quad \xi = \xi_0(1+\eta), \tag{74}$$

где λ обозначает пока неопределенную положительную постоянную. Уравнение (73) переписывается в виде:

$$\frac{m\xi_0^2}{\lambda^3}(1+\eta)\frac{d^3\eta}{d\tau^3} = \left(\frac{m\xi_0}{\lambda^2}\frac{d^2\eta}{d\tau^2} - a\right)\left[\frac{\xi_0}{\lambda}\frac{d\eta}{d\tau} - v(\lambda\tau)\right]. \tag{75}$$

Вводим новые неизвестные функции γ и по формулам:

$$\frac{d\eta}{d\tau}; \quad \delta = \frac{d^2\eta}{d\tau^2}. \tag{76}$$

Тогда диференциальное уравнение (75) третьего порядка с одной неизвестной функцией η будет эквивалентно системе трех диференциальных уравнений первого порядка с тремя неизвестными функциями η, γ, δ;

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \gamma, \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \delta, \quad \frac{d\delta}{d\tau} = \frac{\left[\gamma - \frac{\lambda}{\xi_0}v(\lambda\tau)\right]\left(\delta - \frac{a\lambda^2}{m\xi_0}\right)}{1+\eta} \tag{77}$$

Новые начальные данные:

$$\eta|_{\tau=0} = 0, \qquad \gamma|_{\tau=0} = \frac{\lambda\xi_0'}{\xi_0} \qquad \delta|_{\tau=0} = \frac{\lambda^2\xi_0''}{\xi_0}.$$

Пусть функция $v(t)$ будет голоморфна при $t < \sigma$ и, следовательно, при $< \frac{\sigma}{\lambda}$ Рассмотрим значения правых частей уравнений (77) в области, смежной с системой начальных значений переменных τ, η, γ, δ и ограниченной неравенствами:

$$< \frac{\sigma}{\lambda}, \quad |v(\lambda\tau) - v(0)| < \chi, \quad |\eta| < \alpha, \quad \left|\gamma - \frac{\lambda\xi_0'}{\xi_0}\right| < \alpha, \quad \left|\delta - \frac{\lambda^2\xi_0''}{\xi_0}\right| < \alpha,$$

где $\sigma\chi$ обозначают известные положительные постоянные, а значение α, остающееся неопределенным, ограничено неравенствами $0 < \alpha < 1$.

В упомянутой выше области правые части уравнений (77) являются голоморфными функциями переменных τ, η, γ, δ и абсолютные значения этих частей ограничены неравенствами:

$$\left|\frac{d\eta}{d\tau}\right| < \alpha + \lambda\frac{|\xi_0'|}{\xi_0} \quad \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right| < \alpha + \lambda^2\frac{|\xi_0''|}{\xi_0},$$
$$\left|\frac{d\delta}{d\tau}\right| < \frac{\left(\alpha + \lambda\frac{|\xi_0'| + |v(0)| + \chi}{\xi_0}\right)\left(\alpha + \lambda^2\frac{m|\xi_0''| + a}{m\xi_0}\right)}{1-\alpha} \tag{78}$$

Вводим обозначения:

$$p = \frac{|\xi_0'| + |v(0)| + \chi}{\xi_0}, \quad q = \frac{m\xi_0'' + a}{m\xi_0}.$$

Систему неравенства (78) можно заменить следующей:

$$\frac{d\eta}{d\tau} < \alpha + p\lambda, \quad \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right| < \alpha + q\lambda^2,$$
$$\left|\frac{d\delta}{d\tau}\right| < \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1-\alpha}.$$

Обозначим через M значение наибольшей из правых частей последних неравенств:

$$M \geqslant \alpha + p\lambda, \quad M \geqslant \alpha + q\lambda^2, \quad M \geqslant \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1-\alpha}. \tag{79}$$

Очевидно, величина M будет функцией α и λ.

Дифференциальные уравнения (77) допускают единственную систему интегралов, голоморфных в области, смежной с системой начальных значений переменных τ, η, γ, δ.[1]

Целые относительно ряды, которыми выражаются интегралы этих уравнений, будут сходиться при $|\tau| < \rho$, где

$$\rho = \frac{\sigma}{2}\left(1 - e^{-\frac{\alpha\lambda}{4\sigma M}}\right)$$

Через e здесь обозначено основание натуральных логарифмов. Возвращаясь к первоначальному дифференциальному уравнению (73), можно подставить его интеграл в виде целого ряда:

$$\xi = \xi_0 + \xi_0^{(1)} t + \frac{\xi_0^{(2)}}{1\ 2} t^2 + \frac{\xi_0^{(3)}}{1\ 2\ 3} t^3 + \tag{80}$$

где производные $\xi_0^{(3)}$, $\xi_0^{(4)}$, . ., вычисленные при $t = 0$, находятся: первая непосредственно из уравнения (73), а остальные — путем его последовательных дифференцирований. Ряд (80) будет сходиться при $|t| < r$, где

$$r = \sigma\left(1 - e^{-\frac{\alpha\lambda}{4\sigma M}}\right).$$

Вводим обозначение:

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \frac{M}{\alpha\lambda}$$

Тогда

$$r = \sigma\left(1 - e^{-\frac{1}{4\sigma\varphi(\alpha,\lambda)}}\right).$$

Пользуясь неопределенностью α и λ, будем искать систему их значений, доставляющую минимум функций $\varphi(\alpha, \lambda)$, который будет соответствовать максимуму r. Чтобы найти этот максимум, нужно последовательно разобрать три возможных варианта, когда величина M определяется первым, вторым или третьим из неравенства (79), и при числовом решении задачи выбрать наивыгоднейший из вариантов.

Сделаем еще замечание, касающееся ряда (80). Если мы удерживаем только n его первых членов, то получающаяся при этом ошибка будет меньше, чем аналогичная ошибка при удержании только n первых членов разложения функции

$$\left[1 + \alpha - \alpha\sqrt[4]{1 + 4\sigma\varphi(\alpha,\lambda)\log\left(1 - \frac{t}{\sigma}\right)}\right]$$

в ряд по степеням отношения $\frac{t}{\sigma}$.

Переходим к рассмотрению упомянутых выше вариантов.

---

[1] Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, 1929, t. II, n° 383.
Goursat, idem, n° 383.

1-й вариант. Пусть величина M определяется первым из неравенств (79), т. е.

$$M = \alpha + p\lambda,$$

что требует выполнения неравенств:

$$\alpha + p\lambda \geqslant \alpha + q\lambda^2, \quad \alpha + p\lambda \geqslant \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1 - \alpha};$$

отсюда

$$\lambda \leqslant \frac{p}{q}, \quad 2\alpha + q\lambda^2 \leqslant 1. \tag{81}$$

Находим функцию $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \frac{\alpha + p\lambda}{\alpha\lambda} \tag{82}$$

Нужно отыскать минимум этой функции в области изменения переменных α и λ, ограниченной неравенствами (81). Присоединяем сюда неравенства

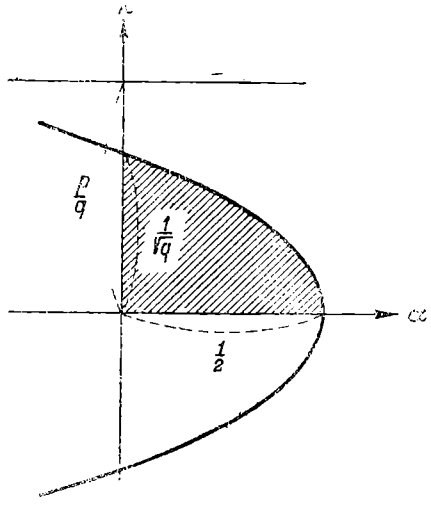


Рис. 2.

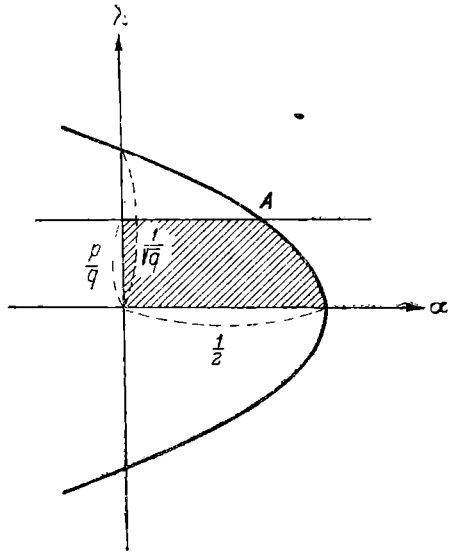


Рис. 3.

$\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$. На рис. 2 и 3 эта область заштрихована. Рис. 2 соответствует случаю $\frac{p^2}{q} > 1$, а рис. 3—случаю $\frac{p^2}{q} < 1$.

Уравнения границ области в первом случае:

$$\alpha = 0, \ \lambda = 0, \ 2\alpha + q\lambda^2 = 1.$$

Во втором случае сюда нужно присоединить уравнение

$$\lambda = \frac{p}{q}.$$

В обоих случаях минимума внутри области не существует. Он имеет место только на контуре параболы

$$2\alpha + q\lambda^2 = 1.$$

Отсюда

$$\lambda = \lambda' = \sqrt{\frac{1-2\alpha}{q}}.$$

Подставляем найденное значение λ в выражение (82) функции $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$\varphi(\alpha, \lambda') = \frac{\alpha\sqrt{q} + p\sqrt{1-2\alpha}}{\alpha\sqrt{1-2\alpha}}$$

Значение $\alpha = \alpha_1$, соответствующее минимуму функции $\varphi(\alpha, \lambda')$, находится, как корень уравнения

$$\alpha^4 = \frac{p^2}{q}(1-2\alpha)^3.$$

Последнее уравнение всегда имеет в интересующей нас области единственный положительный корень, заключающийся в интервале $0 < \alpha_1 < \frac{1}{2}$.

Если $\frac{p^2}{q} > 1$, то минимум функции $\varphi(\alpha, \lambda)$ определяется равенством

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_1, \lambda_1), \tag{83}$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{1-2\alpha_1}{q}}$$

Если же $\frac{p^2}{q} < 1$, то сначала вычисляем координаты α_A, λ_A точки A (рис. 3):

$$\alpha_A = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{q}\right), \quad \lambda_A = \frac{p}{q}$$

При соблюдении неравенства

$$\alpha_A < \alpha_1$$

или

$$\frac{p^2}{q} > \frac{1}{3}$$

минимум функции $\varphi(\alpha, \lambda)$ находится из равенства (83).

Если $\frac{p^2}{p} < \frac{1}{3}$, то

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_A, \lambda_A) = \frac{q(q+p^2)}{p(q-p^2)}.$$

2-й вариант. Пусть величина M находится при помощи второго из неравенств (79), т. е.

$$M = \alpha + q\lambda^2.$$

Следовательно, предполагается выполнение неравенств:

$$\alpha + q\lambda^2 \geqslant \alpha + p\lambda, \quad \alpha + q\lambda^2 \geqslant \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1-\alpha}$$

Отсюда

$$\lambda \geqslant \frac{p}{q}, \quad 2\alpha + p\lambda \leqslant 1. \tag{84}$$

Функция $\varphi(\alpha, \lambda)$ имеет вид:

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \frac{\alpha + q\lambda^2}{\alpha\lambda}.$$

Ищем минимум этой функции в области, ограниченной неравенствами (84), к которым присоединяем неравенства

$$\lambda > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

Рассматриваемая область существует только при условии $\frac{p^2}{q} < 1$, которое в дальнейшем будем считать выполненным (рис. 4).

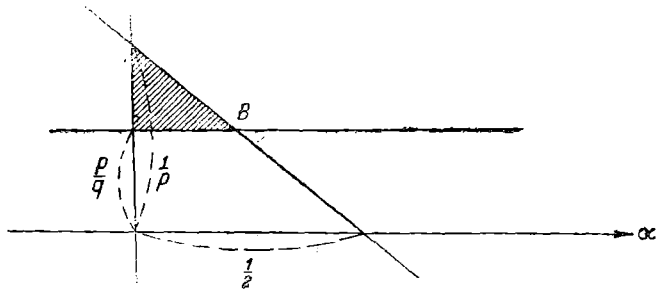


Рис. 4.

Уравнения границ:

$$\alpha = 0,\ \lambda = \frac{p}{q},\quad 2\alpha + p\lambda = 1.$$

Вычисляем координаты точки B (α_B, λ_B):

$$\alpha_B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{q}\right),\ \lambda_B = \frac{p}{q}$$

Как и раньше, внутри области минимума не существует. Он имеет место только на прямой

$$2\alpha + p\lambda = 1.$$

Отсюда

$$\lambda = \lambda'' = \frac{1}{p}(1 - 2\alpha).$$

Вносим найденное значение $\lambda = \lambda''$ в выражение (85) для $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$\varphi(\alpha, \lambda'') = \frac{p^2\alpha + q(1-2\alpha)^2}{p\alpha(1-2\alpha)}$$

Находим значение $\alpha = \alpha_2$, соответствующее минимуму, как корень следующего уравнения:

$$2\frac{p^2}{p}\alpha^2 = (1-2\alpha)^2.$$

Имеем:

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}q}{2(p + \sqrt{2}q)}$$

Таким образом минимум функции $\varphi(\alpha, \lambda)$ оказывается равным:

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_2, \lambda_2) = p + 2\sqrt{2}q,$$

где

$$\lambda_2 = \frac{1}{p}(1 - 2\rho_2) = \frac{1}{p + \sqrt{2}q}$$

Предыдущие рассуждения предполагают выполнение неравенства

$$\alpha_2 < \alpha_B$$

или

$$\frac{p^2}{q} < 2 - \sqrt{3}.$$

В противном случае при $\frac{p^2}{q} > 2 - \sqrt{3}$

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_B, \lambda_B) = \frac{q(q+p^2)}{p(q-p^2)}.$$

3-й вариант. Величина M определяется третьим из неравенств (79), именно

$$M = \frac{(\alpha + p\lambda)(\alpha + q\lambda^2)}{1-\alpha}$$

В данном случае имеют место неравенства:

$$\frac{(\alpha+p\lambda)(\alpha+q\lambda^2)}{1-\alpha} \geqslant \alpha + p\lambda, \quad \frac{(\alpha+p\lambda)(\alpha+q\lambda^2)}{1-\alpha} \geqslant \alpha + q\lambda^2$$

Отсюда

$$2\alpha + q\lambda^2 \geqslant 1, \qquad 2\alpha + p\lambda \geqslant 1. \tag{86}$$

Присоединяем сюда неравенства $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Выражение для функции $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$\varphi(\alpha, \lambda) = \frac{(\alpha+p\lambda)(\alpha+q\lambda^2)}{\alpha\lambda(1-\alpha)} \tag{87}$$

В нашем случае уравнения границ области:

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \quad \lambda = 0, \quad 2\alpha + q\lambda^2 = 1, \quad 2\alpha + p\lambda = 1.$$

В рассматриваемом варианте нужно исследовать возможность минимума внутри области и затем сравнить полученный результат с минимумом на границе.

Значения $\alpha = \alpha_3$, $\lambda = \lambda_3$, соответствующие минимуму внутри области, находятся из системы уравнений:

$$\alpha^2(1 + p\lambda + q\lambda^2) + 2pq\alpha\lambda^3 - pq\alpha\lambda^3 = 0,$$

$$\alpha^2 - q\alpha\lambda^2 - 2pq\lambda^3 = 0.$$

Исключая α, получим для определения $\lambda = \lambda_3$ кубическое уравнение:

$$(p\lambda)^3 + \frac{\mu(3-4\mu)}{1+4\mu}(p\lambda)^2 + \frac{\mu(1-4\mu)}{1+4\mu}p\lambda - \frac{\mu^2}{1+4\mu} = 0,$$

где

$$\mu = \frac{p^2}{q}$$

Если точка с координатами α_3, λ_3 лежит внутри области, то

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_3, \lambda_3).$$

Переходим к рассмотрению минимума на границе области и сначала разберем случай $\frac{p^2}{q} > 1$ (рис. 5), когда минимум может иметь место только на параболе

$$2\alpha + q\lambda^2 = 1.$$

Отсюда

$$\alpha = \alpha' = \frac{1}{2}(1 - q\lambda^2).$$

Подстановка найденного значения $\alpha = \alpha'$ в выражение (87) для $\varphi(\alpha, \lambda)$ дает

$$\varphi(\alpha', \lambda) = \frac{1 + 2p\lambda - q\lambda^2}{\lambda(1 - q\lambda^2)}.$$

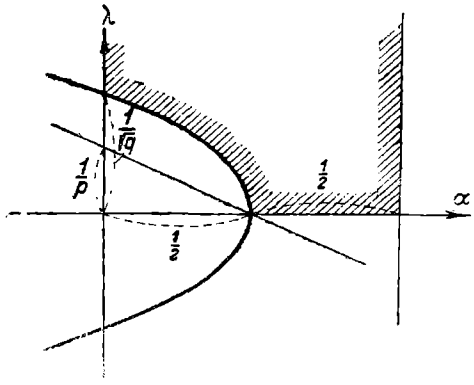


Рис. 5.

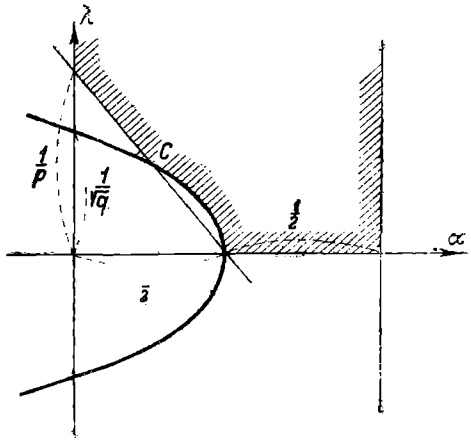


Рис. 6.

Составляем уравнение для определения значения $\lambda = \lambda_4$, соответствующего минимуму:

$$(1 - q\lambda^2)^2 = 4pq\lambda^3.$$

Из двух вещественных корней этого уравнения для нас имеет значение корень, заключающийся в интервале

$$0 < \lambda_4 < \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Находим:

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_4, \lambda_4), \tag{88}$$

где

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - q\lambda_4^2).$$

Наконец остается рассмотреть случай $\frac{p^2}{q} < 1$ (рис. 6). Вычисляем координаты точки $C(\alpha_C, \lambda_C)$:

$$\alpha_C = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{q}\right), \quad \lambda_C = \frac{p}{q}$$

Если

$$\alpha_C < \alpha_4 \quad (\lambda_C > \lambda_4)$$

или

$$\frac{p^2}{q} > \frac{1}{4}$$

минимум на параболе, наверное, имеет место и $\varphi_{\min}(\alpha, \lambda)$ определяется равенством (88). В противном случае, если $\alpha_C > \alpha_4$ или $\frac{p^2}{q} < \frac{1}{4}$, нужно искать минимум на прямой

$$2\alpha + p\lambda = 1.$$

Отсюда

$$\alpha = \alpha'' \qquad \frac{1}{2}\left(1 - p\lambda\right).$$

Подставляем найденное значение $\alpha = \alpha''$ в выражение (87) для $\varphi(\alpha, \lambda)$:

$$\varphi(\alpha'', \lambda) = \frac{1 - p\lambda + 2q\lambda^2}{\lambda(1 - p\lambda)}.$$

Минимуму будет соответствовать корень $\lambda = \lambda_5$ уравнения

$$2q\lambda^2 = (1 - p\lambda)^2.$$

Имеем

$$\lambda_5 = \frac{1}{p + \sqrt{2q}} = \lambda_2.$$

Следовательно

$$\varphi_{\min}(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha_5, \lambda_5), = p + 2\sqrt{2q}, \tag{89}$$

где

$$\alpha_5 = \frac{\sqrt{2q}}{2(p + \sqrt{2q})} = \alpha_2.$$

Равенство (89) имеет силу только при выполнении условия

$$\alpha_5 < \alpha_C$$

или

$$\frac{p^2}{q} < 2 - \sqrt{3},$$

что является следствием неравенства $\frac{p^2}{q} < \frac{1}{4}$.

Вообще при нахождении $\varphi_{\min}(\alpha, \lambda)$ на границах области третьего варианта при условии $\frac{p^2}{q} < 1$ нужно исследовать возможность следующих случаев.

Если одновременно выполнены неравенства

$$\alpha_4 > \alpha_C > \alpha_5$$

или

$$\frac{1}{4} < \frac{p^2}{q} < 2 - \sqrt{3},$$

минимум имеет место как на прямой, так и на параболе. Для вычислений нужно пользоваться равенствами (88) и (89). Если

$$\alpha_4 > \alpha_C, \qquad \alpha_C < \alpha_5 \qquad (\lambda_4 < \lambda_C, \qquad \lambda_C > \lambda_5)$$

или

$$\frac{p^2}{q} < 2 - \sqrt{3},$$

минимум имеет место только на параболе, и $\varphi_{\min}(\alpha, \lambda)$ вычисляется по формуле (88).

Если

$$\alpha_4 < \alpha_C, \qquad \alpha_C > \alpha_5 \qquad (\lambda_4 > \lambda_C, \qquad \lambda_C < \lambda_5),$$

или

$$\frac{p^2}{q} < \frac{1}{4}$$

минимум имеет место только на прямой. Вычисления производятся по формуле (89).

Résumé

Les résultats obtenus dans cet articlé permettent de déterminer la tension du câble pendant l'ascension de la cage de puits de mine. On résout le problème approximativemant en négligeant la masse du câble, sans grande importance en comparaison de la masse de la cage, la hauteur de l'ascension étant supposée petite (100 — 150 m). Enfin on considère le câble comme un fil élastique.

Un solide A est suspendu en un de ses points B au fil élastique enroulé sur la poulie tournanan autour de l'axe horizontal immobile O (fig. 1). Supposons l'absence de glissement du fil sur la poulie. La vitesse du fil au point C de son contact avec la poulie est dirigée verticalement vers le haut et sa valeur peut être considérée comme une fonction donnée $v(t)$ du temps t.

La distance d'un point M du fil à son extrémité B — est égale à la somme de deux quantités, dont la première x exprime la longueur naturelle (correspondant à l'absence de forces) de la partie considérée MB du fil, et la seconde $u(x, t)$ — sa déformation (dilatation) dépendant des variables x et t.

En vertu de la loi de Hooke on peut écrire l'expression (1) pour la tension T du fil au point M.

En negligeant la masse du fil nous obtenons la dépendance linéaire (2) de la fonction $u(x, t)$ par rapport à x.

L'équation différentielle (du troisième ordre[1]) du mouvement du solide A se prosente sous la forme ($a = mg + k$):

$$m\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(m\frac{d^2\xi}{dt^2} - a\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right],$$

où m désigne la masse du solide A, ξ — son abscisse (l'axe de est dirigé verticalement vers le bas), g — l'accélération due à la pesanteur, k — le coefficient figurant dans la loi de Hooke. L'origine des coordonnées est placée au point C.

Les conditions initiales sont celles-ci: $\xi_{t=0} = \xi_0$, $\left.\frac{d\xi}{dt}\right|_{t=0}$ La constante ξ_0'' peut être déterminée de l'équation (10), où l_0 désigne la longueur naturelle du fil BC à l'instant initial.

Dans le cas général, l'intégrale de notre équation s'exprime par une série entière en t (le théorème d'existence de Cauchy), la fonction $v(t)$ étant supposée holomorphe.

Passons à l'examen des cas particuliers suivants qui présentent quelque intérêt pratique quand la rotation de la poulie est uniforme ou uniformément accélérée (retardée). Introduisons une fonction inconnue nouvelle $\varkappa$ en faisant la substitution $\xi = \xi_0 + s(t) + \varkappa$, où $s(t) = -v_0 t \pm \frac{jt^2}{2}$, les notations étent évidentes.

Alors notre équation aura la solution particulière: $\varkappa = 0$. Cherchons une solution de cette équation voisine de la solution $\varkappa = 0$, en présentant sous la

[1] Le prof. H. Lokchine dans son intéressante monographie (Supplément du „Journal des Mines", 1929, Nr 12, p. 89, en russe) emploie une équation différentielle approximative du deuxième ordre. Nous corrigeons cette inexactitude.

forme d'une série infinie $x = x_2 + x_2 + x_3 + \ldots$ et en employant la méthode des approximations successives. Dans la première apporoximation $x \quad x_1$.

1. Le premier cas (la poulie tourne uniformément et $j = 0$, $v(t) = \text{const} = v_0 = v$). Dans la première approximation la fonction x est déterminée par l'équation différentielle (21), où $a_1 = \frac{a}{m}$ A l'aide des subtitutions (22) et (24) cette dernière équation peut être réduite à l'équation de Bessel (25). Donc s'exprime par les fonctions de Bessel (28), où $w_0 = \frac{2\sqrt{a_1 \xi_0}}{v}$ et C_1, D_1 désignent des constantes arbitraires déterminées par le système des équations (29).

2. Le deuxième cas (la rotation de la poulie est uniformément accélérée et $v(t) = -v_0 - jt$). L'équation différentielle déterminant la fonction x dans la première approximation à la forme (33), où $a_2 = j + a_1$. Le changement des variables (34) permet de remplacer l'équation (33) par l'équation (35), où $k_1^2 = \frac{2a_2}{j}$. Le paramétre k_1 étant pratiquement assez grande, trouvons, à la suite de A. Lokchine, l'expression asymptotique (44) de l'intégrale de l'équation (35) quand $k_1 \to \infty$. Les constantes arbitraires C_2 et D_2 sont déterminées par les équations (42).

3. Le troisiéme cas (la rotation de la poulie est uniformément retardée et $v(t) = -v_0 + jt$). Nous obtenons l'équation différentielle déterminant la fonction dans la forme (49), où $a_3 = -j + a_1$. Faisons le changement des variables (50) et remplaçons l'équation (49) par l'équation (51), où $k_2^2 = \frac{2a_3}{j}$ A cause de la grande valeur du paramètre k_2 il est utile d'avoir l'expression asymptotique (60) de intégrale de l'équation (51) quand $k_2 \to \infty$. Les valeurs des constantes arbitraires C_3 et D_3 peuvent étre trouvées par les équations (58). Enfin la tension T du fil se trouve de l'équation

$$T = mg \pm mj - \frac{d^2x}{dt^2}.$$