18. Простое и точное изображеніе точекъ пространства 4-хъ измѣреній на плоскости посредствомъ векторовъ.

Е. С. Федорова.

(доложено 12 января 1909).

Чѣмъ дальше, тѣмъ все больше и сильнѣе ощущается потребность такого изображенія.

Конечно, только человѣкъ, неприкосновенный къ точнымъ наукамъ, можетъ счесть самое постановку такой задачи за какой то спекулятивный кунштюкъ, не имѣющій непосредственнаго практическаго приложенія къ потребностямъ науки и техники.

Человѣкъ, оріентированный въ элементарныхъ понятіяхъ точной науки, хорошо понимаетъ, что здѣсь идетъ рѣчь о построеніяхъ, соотвѣтствующихъ алгебрическимъ (или арифметическимъ) формуламъ съ четырьмя перемѣнными, или иначе, о величинахъ, составляющую функцію четырехъ независимыхъ перемѣнныхъ, и какъ разъ въ области физическихъ наукъ и техники мы имѣемъ особенно часто дѣло съ такими случаями.

Въ статьѣ „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“ [1]) я обстоятельно разсмотрѣлъ болѣе частную задачу, видную изъ заглавія и показалъ, сколь разнообразно можетъ быть ея рѣшеніе; напр. для этого мы можемъ воспользоваться системою обыкновенныхъ, системою векторіальныхъ круговъ или системою параллельныхъ векторовъ.

Въ общемъ случаѣ наиболѣе простое рѣшеніе задачи связано съ пользованіемъ свойствами послѣдней системы, и оказалось, что, благодаря ей, самыя сложныя и неправильныя подземныя горныя выработки получаютъ очень точное и наглядное графическое изображеніе, позволяющее на чертежѣ какъ бы насквозь видѣть всѣ производящіяся подземныя работы.

Въ руководствѣ „Новая Геометрія какъ основа черченія“ приведено нетолько это, но и нѣкоторыя другія приложенія. Да и въ большинствѣ случаевъ графическое рѣшеніе задачи посредствомъ системы параллельныхъ векторовъ является наиболѣе простымъ и наглядымъ то есть наиболѣе цѣлесообразнымъ.

Но напр. спеціально для изображенія структуры кристалловъ наиболѣе цѣлесообразною для примѣненія оказалась система векторіальныхъ круговъ, что и составило предметъ особой статьи [2]).

Въ упомянутой первой статьѣ кратко намѣчено и рѣшеніе задачи, поставленной теперь въ заголовкѣ посредствомъ двухъ проекцій по методу начертательной геометріи [3]). Но именно въ этомъ двойномъ изображеніи, какъ и вообще въ методѣ начертательной геометріи, и заключается наибольшее неудобство, и во всякомъ случаѣ нарушается возможная простота и наглядность.

Но если для рѣшенія болѣе частной задачи, относящейся къ пространству 3-хъ измѣреній, найдено нѣсколько различныхъ способовъ, то понятно, что для теперь поставленной задачи число рѣшеній возрастаетъ еще въ значительной степени, и тотъ способъ, о которомъ только-что упомянуто, есть лишь одинъ изъ многихъ возможныхъ, и притомъ далеко не изъ самыхъ простыхъ.

Поэтому въ этой статьѣ я въ высшей степени съуживаю свою задачу и даже не упоминаю о разнообразныхъ геометрическихъ системахъ и ихъ сочетаніяхъ, которыя даютъ возможность ее разрѣшить, останавливаюсь исключительно на разсмотрѣніи одной единственной системы 4-ой ступени на плоскости, которая прямѣе всего отвѣчаетъ сущности дѣла,

[1]) Записки Горнаго Института I 52.

[2]) Тамъ же стр. 279.

[3]) Тамъ же стр. 77 и сл.

и повидимому для обыкновенныхъ приложеній (построенію кривыхъ въ пространствѣ 4-хъ измѣреній) является незамѣнимой по простотѣ и наглядности.

Эта система есть непосредственное расширеніе системы параллельныхъ векторовъ, а именно расширеніе въ томъ отношеніи, что векторы, какъ элементы системы, могутъ быть взяты и не параллельными. Ясно, что черезъ это условіе система возрастаетъ на ступень то есть становится именно системою 4-ой ступени (соотвѣтственно геометріи пространства 4-хъ измѣреній).

Элементы этой системы есть векторы на плоскости. Каждый векторъ опредѣляется начальною точкою, направленіемъ и длиною, а такъ какъ начальная точка, въ свою очередь, опредѣляется двумя координатами на плоскости, то слѣдовательно всего каждый векторъ опредѣляется четырьмя независимыми данными или перемѣнными.

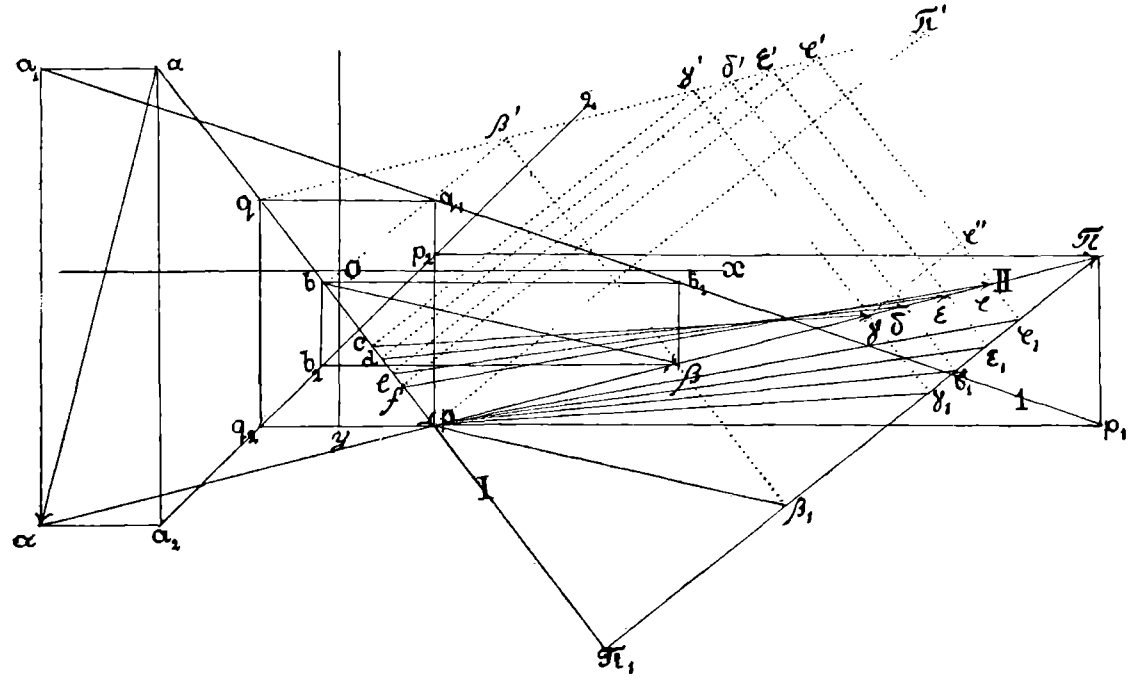
Каждый векторъ мы можемъ разсматривать какъ равнодѣйствующій двухъ другихъ, имѣющихъ каждый свое опредѣленное направленіе. Пусть эти два постоянныя направленія даны прямыми Ox и Oy, какъ постоянными для всей системы (фиг. 1). Тогда легко по каждому данному вектору получить оба слагающихъ. Такъ векторъ $a\alpha$ разложится на два aa_1 и aa_2, а векторъ $b\beta$ на два вектора bb_1 и bb_2. Такимъ образомъ для опредѣленія элемента системы получимъ четыре данныя, за которыя можемъ принять координаты начальной и конечной точекъ вектора на плоскости.

Для того, чтобы доказать существованіе этой системы, необходимо и достаточно доказать, что два произвольные ея элемента однозначно опредѣляютъ линейную приму. Но если соединимъ прямыми съ одной стороны начальныя, а съ другой конечныя точки обоихъ векторовъ, то, какъ сейчасъ увидимъ, этимъ мы дѣйствительно однозначно опредѣляемъ приму векторовъ. Очевидно, что каждой точкѣ первой прямой ab однозначно соотвѣтствуетъ (гомологична) опредѣленная точка второй прямой $\alpha\beta$. Но сразу не видно, какъ устанавливается это соотвѣтствіе. Это станетъ виднымъ, если замѣтимъ, что оба слагающіе вектора какой-нибудь точки есть величины, совершенно независимыя другъ отъ друга и могутъ быть приняты равными нулю.

Если примемъ равными нулю слагающіе, параллельные оси Oy, то конечныя точки обоихъ векторовъ будутъ a_1 и b_1, а потому вообще всѣ конечныя точки векторовъ такой линейной примы будутъ находиться на прямой $a_1\ b_1$. Также ясно, что если другіе слагающіе примемъ равными нулю, то получимъ другую слагающую линейную приму съ конечными точками $a_2\ b_2$.

Отсюда заключаемъ, что если возьмемъ произ-

Фиг. 1.



вольный векторъ равнодѣйствующей примы, начальная точка c котораго находится на прямой ab, то должны провести изъ нея двѣ прямыхъ cc_1 и cc_2 соотвѣтственно параллельно Ox и Oy до пересѣченія съ $a_1\ b_1$ и $a_2\ b_2$ и такимъ образомъ получаемъ двѣ стороны параллелограмма какъ слагающія искомаго вектора c линейной примы; начальная и конечная его точки α,a и есть точки, гомологичныя на обѣихъ прямыхъ ab и $\alpha\beta$.

Такъ какъ прямыя, на которыхъ находятся векторы линейной примы, есть прямыя, соединяющія гомологичныя точки прямыхъ ab и $\alpha\beta$, какъ линейныхъ примъ точекъ, то, на основаніи извѣстной теоремы Новой Геометріи [1]) заключаемъ, что прямыя векторовъ линейной примы огибаютъ нѣкоторую кривую 2-го порядка, и въ частности эти самыя прямыя есть двѣ касательныя къ этой кривой.

Легко найти даже точки касанія кривой къ этимъ двумъ прямымъ, такъ какъ эти двѣ точки есть точки, гомологочныя общей ихъ точкѣ пересѣченія p.

Принявъ p за начальную точку вектора, найдемъ слагающія pp_1 и pp_2, а по нимъ и самъ векторъ $p\pi$, а конечная точка какъ гомологичная ей, есть искомая точка касанія на $\alpha\beta$. Принявъ же p за конечную точку вектора, найдемъ слагающія pq_1 и pq_2, а по нимъ и самъ векторъ qp, и начальная точка q, какъ гомологичная точкѣ p на прямой ab, есть искомая точка касанія на этой прямой.

Такимъ образомъ въ каждой линейной примѣ этой системы имѣются нетолько особыя прямыя ab и $\alpha\beta$, но и особыя точки, а именно точка p пересѣченія этихъ прямыхъ и гомологичныя ей точки q и π.

Но также гомологичны точки линейныхъ примъ ab и a_1b_1, также ab и a_2b_2. Однако въ этомъ случаѣ всѣ прямыя слагающихъ векторовъ параллельны то есть пересѣкаются въ точкѣ на безконечности, или иначе огибаемая кривая деградируется въ точку.

Но легко усмотрѣть и гомологичность точекъ a_1 съ a_2, b_1 съ b_2 на другихъ діагоналяхъ тѣхъ же прямоугольниковъ, откуда слѣдуетъ, что и эти діагонали огибаютъ нѣкоторую кривую 2-го порядка, въ числѣ касательныхъ которой находятся и прямыя a_1b_1 съ a_2b_2; также легко найти и точки касанія на этихъ двухъ прямыхъ.

Этимъ дается доказательство, что при поставленныхъ условіяхъ дѣйствительно линейная прима векторовъ можетъ быть однозначно опредѣлена по двумъ даннымъ, а слѣдовательно такая система дѣйствительно существуетъ и можетъ служить для такого графическаго изображенія точекъ пространства 4-го измѣренія на плоскости.

Однако при этомъ вводится условіе существованія двухъ постоянныхъ для системы направленій слагающихъ векторовъ.

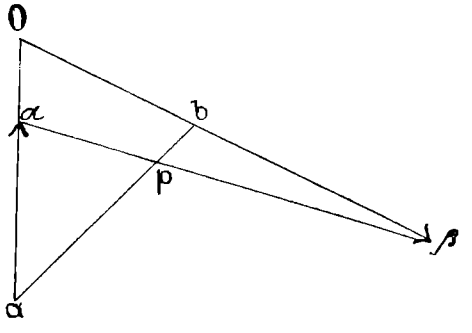
Это условіе аналогично условію, подразумѣваемому въ системѣ параллельныхъ векторовъ, а именно ихъ параллельности.

Это условіе мы можемъ обобщить, принимая во вниманіе, что всѣ построенія, которыя мы производимъ для полученія линейной примы, станутъ позиціонными, если условіе параллельности будемъ разсматривать какъ условіе прохожденія прямыхъ чрезъ данныя безконечно-удаленныя точки.

Благодаря позиціонности построеній, мы можемъ произвести произвольное коллинеарное преобразованіе въ обѣихъ системахъ, и построенія сохраняютъ свое значеніе.

Но, сдѣлавъ это, изъ системы параллельныхъ векторовъ получимъ систему векторіальныхъ лучей то есть прямыхъ, исходящихъ

Фиг. 2.



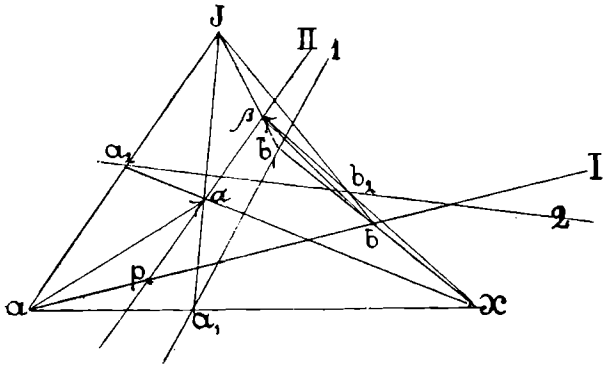
изъ одного центра O (фиг. 2). Въ этой системѣ, слѣдовательно, не могутъ быть даны два произвольные вектора, а только такіе, которые по своему направленію проходятъ чрезъ постоянную точку (центръ) O системы, напр. два вектора a^α и b^β, и тогда линейная прима дѣйствительно однозначно опредѣлена двумя прямыми: прямою начальныхъ точекъ ab, и прямою конечныхъ точекъ $\alpha\beta$ векторовъ; точка p пересѣченія обѣихъ прямыхъ есть точечный векторъ (такъ какъ въ ней совпадаютъ начальная и конечная точки вектора).

Система векторовъ, о которой сейчасъ идетъ рѣчь, требуетъ двухъ параметровъ въ видѣ постоянныхъ точекъ X и J (фиг. 3), и лишь при этомъ

[1]) Новая Геометрія какъ основа черченія V 3.

условіи два произвольные вектора $a\alpha$ и $b\beta$ дѣйствительно однозначно опредѣляютъ линейную приму съ прямыми начальныхъ точекъ ab и конечныхъ точекъ векторовъ $\alpha\beta$. Но теперь особая точка p

Фиг. 3.

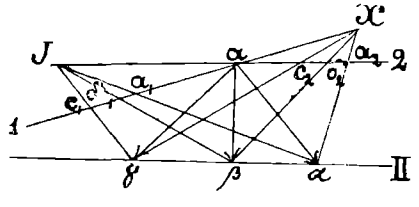


пересѣченія этихъ прямыхъ уже не есть точечный векторъ, котораго вообще въ примахъ этой системы не имѣется. Въ тѣхъ же частныхъ случаяхъ, когда таковой появляется, ясно, что точка p, какъ точечный векторъ, самогомологична, и потому примы векторовъ есть линейныя примы точекъ въ перспективномъ положеніи то есть всѣ онѣ пересѣкаются въ какой-нибудь одной точкѣ (точечная кривая).

Само построеніе какого-нибудь вектора этой примы сводится къ слѣдующему: если c есть начальная точка вектора на прямой ab, то проводимъ чрезъ нее лучи изъ X до пересѣченія c_1 съ a_1b_1 и изъ J до пересѣченія c_2 съ a_2b_2, и соединяемъ c_1 съ J, и c_2 съ X и получаемъ искомую конечную точку γ, которая, по доказанному, должна находиться на прямой $\alpha\beta$, почему построеніе можетъ быть сокращено.

Въ частномъ случаѣ, когда начальныя точки обоихъ векторовъ совпадаютъ, вся прямая $abc\ldots$ де-

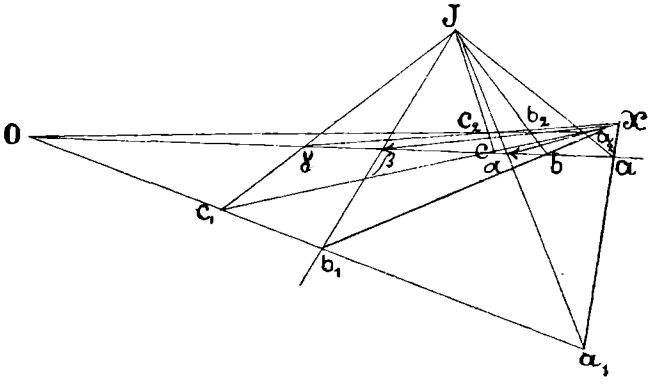
Фиг. 4.



градируется въ одну точку a (фиг. 4). Аналогичное получимъ, если и конечныя точки двухъ векторовъ совпадаютъ въ одну точку; тогда вся прямая $\alpha\beta\gamma\ldots$ деградируется въ одну точку.

Наконецъ, если оба данные вектора приходятся на одной прямой (фиг. 5), то и всѣ векторы линейной примы приходятся на той же прямой, а потому на ней получаемъ двѣ гомологичныя примы точекъ, и въ частности двѣ двойныя точки, и онѣ будутъ точечными векторами. Одна изъ нихъ есть точка O, въ которой прямая векторовъ пересѣкается

Фиг. 5.



напр. прямою $a_1b_1\ldots$ а слѣдовательно и $a_2b_2\ldots$ Въ самомъ дѣлѣ, слагающая вектора по XO равна нулю, а потому съ нею же совпадетъ и O_1; соединивъ ее съ J до пересѣченія съ тою же прямою, найдемъ, что и точка O_2, а слѣдовательно и весь элементарный четырехугольникъ изъ слагающихъ деградируется въ одну точку, что и требовалось доказать. Другая двойная точка есть точка пересѣченія съ тою же прямою прямой XJ.

Въ самомъ дѣлѣ, если проведемъ чрезъ эту точку d прямую изъ X до пересѣченія съ a_1b_1, получимъ точку d_1, а соединивъ d_1 съ J до пересѣченія съ прямою векторовъ найдемъ точку δ, тождественную съ d; діагональ $d\delta$ становится точечною, а самъ четырехугольникъ $dd_1\delta d_2$ деградируется въ отрѣзокъ d_1d_2.

Наконецъ, если два данные вектора нетолько придутся на одну прямую, но и совмѣстятся однимъ изъ своихъ соотвѣтственныхъ концовъ, то линейная прима вообще состоитъ изъ векторовъ съ тѣмъ же общимъ концомъ, а другіе концы образуютъ всѣ точки прямой.

Преслѣдуя здѣсь на первомъ мѣстѣ задачу графическаго изображенія кривой пространства 4-хъ измѣреній на плоскости и возможную простоту ея разрѣшенія, я снова возвращусь отъ общаго способа построенія линейныхъ примъ къ тому частному способу, который изображенъ на фиг. 1 и основанъ на принципѣ линейныхъ координатъ.

Легко доказать, что тѣ двѣ основныя прямыя I и II, на которыхъ находятся концевыя точки векторовъ представляютъ примы подобно расположенныхъ точекъ. Доказательство это по отношенію къ любымъ двумъ сосѣднимъ отрѣзкамъ основано на слѣдующихъ двухъ пропорціяхъ, вытекающихъ изъ свойства подобныхъ треугольниковъ:

$$aq : qb = a_2q_2 : q_2b_2 = {}^{\alpha}p : p\beta$$
$$\text{или } qb : bp = q_2b_2 : b_2p_2 = p\beta : {}^{\beta}\pi$$

Но, какъ было указано выше, совокупность векторовъ линейной примы есть совокупность касательныхъ къ кривой 2-го порядка, а сами основныя прямыя I и II есть также касательныя къ той же кривой съ точками касанія q и

Теперь видимъ, что для разсматриваемаго частнаго случая эта кривая есть парабола, по отношенію которой легко провести сколько-угодно касательныхъ то есть прямыхъ, опредѣляющихъ векторы линейной примы.

Ради простѣйшаго построенія мы подвергаемъ прямую II параллельному поступанію такъ, чтобы точка p пришла въ точку q, и тогда всѣ тѣ точки α', β', π', которыя представляютъ конечныя точки векторовъ соотвѣтственно съ начальными точками a, b, p, соединенныя съ этими соотвѣтственными точками, дадутъ параллельныя прямыя $a^{\alpha'}$, $b^{\beta'}$, $p^{\pi'}$, и такъ какъ, по только-что доказанному, это относится къ общимъ свойствамъ векторовъ, то беремъ произвольно точки c, d, e, f,... проводимъ параллельныя до пересѣченія съ $q^{\pi'}$ въ γ', δ' ε' φ'..., а чрезъ эти точки снова параллельныя соотвѣтственно до пересѣченія съ II въ точкахъ γ, δ, ε, φ..., и эти точки и есть искомыя соотвѣтственныя конечныя точки векторовъ.

Уже этими векторами обчерчивается часть огибаемой параболы, опредѣляющей линейную приму векторовъ; этимъ нахожденіе векторовъ и вообще вычерчиваніе линейной ихъ примы упрощается до крайней степени. Въ частномъ случаѣ вообще весьма легко опредѣлить, принадлежитъ ли данный векторъ къ данной линейной примѣ.

Простѣйшее выраженіе самой линейной примы, уже независящее отъ положенія осей координатъ, въ двухъ векторахъ qp и $p\pi$ или двухъ сторонахъ параллелограмма, служащаго для построенія остальныхъ векторовъ примы. Такимъ образомъ въ каждой линейной примѣ имѣется два особые вектора, связанные другъ съ другомъ непрерывностью направленія и дающіе простѣйшее средство вывода остальныхъ векторовъ примы; назовемъ эти векторы начальными.

Можно сказать, что задача построенія линейной примы по двумъ даннымъ сводится къ построенію начальныхъ векторовъ. Имѣя ихъ, мы легко построимъ параболу линейной примы, а вмѣстѣ съ тѣмъ и произвольную совокупность ея векторовъ. Въ каждой данной примѣ начальные векторы имѣютъ нетолько опредѣленное направленіе, но и опредѣленные длины, которыя мы и будемъ считать единичными для каждаго отдѣльно. Всякій векторъ, такъ составленный изъ частей начальнаго, чтобы сумма этихъ частей составила единицу, назовемъ единичнымъ, и тогда легко докажемъ теорему, по которой всѣ векторы линейной примы есть векторы единичные.

Въ самомъ дѣлѣ, если мы длину одного начальнаго вектора увеличимъ въ m, а другого въ n разъ и сложимъ ихъ (сумма есть замыкающая сторона треугольника), то получимъ не единичный векторъ, а векторъ измѣряемый числомъ $m+n$. Поэтому на одномъ возьмемъ $\frac{m}{m+n}$, а на другомъ $\frac{n}{m+n}$, тогда сложеніе ихъ даетъ $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$ то есть единичный векторъ, и этотъ векторъ дѣйствительно и есть векторъ примы, опредѣляемой обоими начальными векторами.

Въ частности, если одно изъ чиселъ напр. n отрицательно, то другой векторъ долженъ быть больше единицы, потому что $\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n} = 1$ то есть длина $\frac{m}{m-n} > 1$, если $m >, n$.

Такъ какъ обѣ прямыя данныхъ векторовъ, а также прямыя начальныхъ и конечныхъ точекъ векторовъ касательны вообще къ нѣкоторой кривой 2-го порядка, то всего имѣемъ четыре касательныхъ. Таковыми же вообще опредѣляется линейная прима кривыхъ (Kegelschnittschaar), въ составѣ которой въ общемъ случаѣ имѣется только одна единственная парабола [1]) (а если, въ особомъ частномъ случаѣ, имѣется таковыхъ двѣ, то всѣ кривыя примы есть параболы), которая, слѣдовательно и опредѣляется однозначно четырьмя касательными то есть двумя векторами.

Отсюда слѣдуетъ, что при томъ упрощеніи въ опредѣленіи векторовъ, которое мы сейчасъ имѣемъ въ виду и при которомъ огибаемая кривая есть парабола, другіе параметры системы теряютъ свое значеніе, и для опредѣленія линейной примы необходимы и достаточны два произвольные вектора.

И дѣйствительно, если даны два вектора напр.

[1]) *Steiner*. Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften. Leipzig 1867. S. 284, 286.

$c\gamma$ и $f\varphi$ (фиг. 1), получаемъ прямыя cf начальныхъ и $\gamma\varphi$ конечныхъ точекъ векторовъ: изъ γ и φ проводимъ прямыя, параллельныя первой ($\gamma\gamma'$ и $\varphi\varphi'$), а на второй изъ нихъ откладываемъ $\varphi\varphi'' = cf$ и проводимъ $c\gamma'$ и $f\varphi'$ параллельно $\gamma\varphi''$ до пересѣченія съ раньше проведенными прямыми въ точкахъ γ' и φ' Прямая $p\pi$, параллельная $\gamma\varphi''$ отмѣчаетъ на прямой $\gamma'\ \varphi'$ противоположную точкѣ p вершину исходнаго параллелограма, а этимъ послѣдній, а вмѣстѣ съ тѣмъ и вся прима векторовъ, вполнѣ опредѣляется.

Такъ какъ приведенное построеніе уже не зависитъ отъ осей координатъ, то для полученія слагающихъ векторовъ теперь безразлично, какія бы двѣ прямыя мы ни выбрали для этихъ осей.

Линейныя примы въ системахъ 4-ой (и даже 3-ей) ступени вообще не пересѣкаются. Но конечно могутъ быть особые частные случаи, когда это пересѣченіе имѣетъ мѣсто, а именно тогда, когда обѣ данныя находятся въ одной линейной секундѣ.

Въ системѣ векторовъ опредѣлить, не пересѣкаются или пересѣкаются двѣ данныя линейныя примы, а въ послѣднемъ случаѣ и построить общій векторъ пересѣченія вообще весьма легко, потому что этотъ общій векторъ долженъ имѣть начальную точку въ точкѣ пересѣченія прямыхъ начальныхъ точекъ, а конечную въ точкѣ пересѣченія прямыхъ конечныхъ точекъ обѣихъ примъ; остается, слѣдовательно, только узнать, будетъ ли принадлежать полученный такимъ образомъ векторъ обѣимъ линейнымъ примамъ, или нѣтъ.

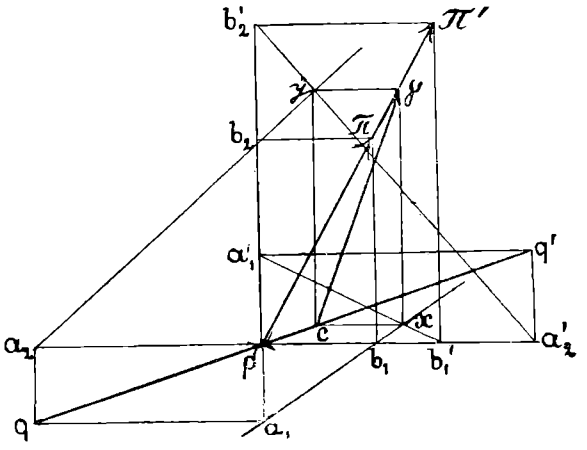
Если совпадаетъ въ одну пара прямыхъ начальныхъ или конечныхъ точекъ, а другая пара пересѣкается, то остается лишь принять точку пересѣченія соотвѣтственно за конечную или начальную точку вектора и для одной изъ примъ построить векторъ, имѣющій такую точку однимъ изъ своихъ концовъ и рѣшить, будетъ ли онъ также принадлежать другой примѣ.

Наиболѣе сложный случай тотъ, когда въ обѣихъ примахъ соотвѣтственно совпадаютъ прямыя какъ начальныхъ, такъ и конечныхъ точекъ, а слѣдовательно и особая точка p. Въ этомъ случаѣ прибѣгаемъ къ помощи осей координатъ, какъ видѣли выше, взятыхъ произвольно, и разлагаемъ векторы на слагающіе. Но конечно, хотя прямыя начальныхъ и конечныхъ точекъ и совпадаютъ, но сами начальные векторы на этихъ прямыхъ должны быть различны; иначе линейныя примы были бы тождественны то есть совпадали бы во всѣхъ своихъ точкахъ.

Построеніе для этого случая показано на фиг. 6.

Пусть qp и $p\pi$ начальные векторы одной, а $q'p$ и $p\pi'$ начальные векторы другой линейной примы.

Фиг. 6.



Разложивъ векторы на слагающіе и проведя для каждой примы прямыя горизонтальныхъ и вертикальныхъ слагающихъ, найдемъ двѣ пары прямыхъ $a_1\ b_1$ съ $a_1''\ b_1'$ и $a_2\ b_2$ съ $a_2'\ b_2'$, соотвѣтственно пересѣкающихся въ точкахъ x и y. Если обѣ примы дѣйствительно пересѣкаются въ одномъ общемъ векторѣ $c\gamma$, какъ въ данномъ случаѣ, то онъ будетъ другою діагональю параллелограма, имѣющаго первою діагональю отрѣзокъ xy, а стороны, соотвѣтственно параллельныя осямъ координатъ, причемъ обѣ концевыя точки полученнаго вектора соотвѣтственно должны находиться на данныхъ прямыхъ начальныхъ и конечныхъ точекъ примъ.

Въ каждомъ векторѣ мы отличаемъ начальную и конечную точку, и отмѣчаемъ это различіе стрѣлкой; но это различіе не есть различіе абсолютное, и мы съ одинаковымъ правомъ можемъ перемѣнить направленіе стрѣлки на противоположное.

Но если въ какой-нибудь совокупности мы сдѣлаемъ это измѣненіе для одного вектора, то должны это сдѣлать и для всѣхъ, потому что тѣ, за которыми будетъ оставлено прежнее обозначеніе, будутъ выражать совсѣмъ иные элементы, которые только въ частныхъ случаяхъ могутъ входить въ составъ той же совокупности.

Если напр. имѣется прима, опредѣляемая двумя векторами, съ совпадающими исходными или начальными точками, и мы въ примѣ перемѣнимъ направленіе во всѣхъ векторахъ, то прима отъ этого не измѣнится, но всѣ векторы будутъ имѣть общую конечную, а не начальную точку.

Если даны два вектора, совпадающіе своими

концами, но противоположныхъ направленій, то ими, какъ двумя различными, опредѣляется линейная прима, и притомъ эти оба вектора будутъ ея начальными векторами; эта прима будетъ состоять изъ векторовъ на одной прямой, и притомъ, или оба конца каждаго вектора будутъ внутри отрѣзка, образуемаго начальными векторами, или оба имѣютъ концами точки внѣ этого отрѣзка. Въ частности, точно на срединѣ отрѣзка находится точечный векторъ.

Построеніе линейной примы векторовъ даннаго направленія можно еще болѣе упростить, если принять во вниманіе, что нетолько начальныя и конечныя точки векторовъ этой примы есть точки гомологичныя на двухъ соотвѣтственныхъ прямыхъ, но и между ихъ длинами и направленіями существуетъ простѣйшее отношеніе однозначной связи. Прямыя векторовъ, какъ касательныя параболѣ, составляютъ прииу квадратичную; но если мы элементы этой примы приведемъ въ положеніе перспективное, перенеся поступательно всѣ начальныя точки въ одну общую для всѣхъ, то получимъ линейную приму лучей, и тогда всѣ конечныя точки векторовъ, какъ приведенныхъ въ перспективное положеніе, окажутся на одной прямой. Выберемъ за эту точку точку p (фиг. 1). Тогда ясно, что для какого нибудь вектора $b\beta$ получимъ новое положеніе $p\beta_1$; ясно, что трехугольники $p\pi_1\beta_1$ и $b\beta\beta'$ равны такъ какъ $p\beta_1$ равна и параллельна βb, а $p\ \pi_1$ равна и параллельна $\beta\beta'$ Слѣдовательно, $\beta_1\pi_1$ равна и параллельна $b\beta'$, то есть это прямыя, параллельныя діагонали $p\pi'$

Итакъ, всѣ векторы линейной примы, начальныя точки которыхъ перемѣщены въ точку p, имѣютъ конечными точками прямую $\pi\beta_1$, параллельную діагонали $p\pi'$

Чтобы въ примѣ, данной начальными векторами $qp\pi$, опредѣлить векторъ даннаго направленія, мы проводимъ въ этомъ направленіи изъ p прямую напр, $p\gamma_1$ до пересѣченія съ діагональю $\pi\pi_1$ въ точкѣ γ_1, изъ γ_1 прямую $\gamma_1\gamma$, параллельную qp до пересѣченія съ $p\pi$, и тогда точка γ и есть искомая конечная точка вектора даннаго направленія.

Приведеннымъ построеніемъ линейной примы векторовъ нетолько рѣшена главная часть поставленной задачи, но и показана чрезвычайная простота этого рѣшенія. Умѣя съ практическою простотою по каждымъ двумъ даннымъ векторамъ находить ихъ линейную приму, а слѣдовательно и по отношенію къ каждому данному вектору рѣшать вопросъ, принадлежитъ ли онъ этой примѣ или нѣтъ, мы уже легко построимъ и линейныя секупды, и линейныя терціи, и по отношеніи къ каждому данному вектору рѣшимъ вопросъ, принадлежитъ ли онъ данной секундѣ или терціи.

Если у насъ даны три вектора $A(aa)$,$B(b\beta)$ и $C(c\gamma)$, и мы находимъ что C не принадлежитъ къ примѣ двухъ первыхъ, то всѣ три, взятые вмѣстѣ, однозначно опредѣляютъ линейную секунду ABC. Если данъ еще четвертый векторъ D, то мы легко рѣшимъ вопросъ, принадлежитъ ли онъ секундѣ ABC.

Беремъ на примѣ AB произвольный векторъ B_1 и проводимъ чрезъ его начальную точку b_1 и начальную точку d прямую до пересѣченія съ прямою ac, положимъ въ точкѣ c_1 вектора C_1, Двумя векторами B_1 и C_1 вполнѣ опредѣлена линейная прима B_1C_1, прямая начальныхъ точекъ которой проходитъ чрезъ начальную точку d вектора D. Опредѣливъ въ этой примѣ векторъ, имѣющій эту точку своею начальною, мы сейчасъ увидимъ, тождественъ ли онъ съ векторомъ D или нѣтъ. Въ первомъ случаѣ D находится въ линейной секундѣ ABC, во второмъ нѣтъ.

Въ этомъ второмъ случаѣ четырьмя векторами A,B,C и D опредѣляется линейная терція, и если данъ пятый векторъ E, то легко рѣшить вопросъ, принадлежитъ ли онъ этой линейной терціи или нѣтъ. Для этого достаточно провести линейную приму AE и узнать, пересѣкается ли она съ линейною секундою BCD. Задача опредѣлять пересѣченія линейныхъ совокупностей будетъ разсмотрѣна ниже.

Если точка пересѣченія имѣется, то это означаетъ, что всѣ пять векторовъ принадлежатъ одной и той-же линейной терціи.

Если имѣть въ виду, что здѣсь предъ нами на первомъ мѣстѣ стоитъ задача проведенія кривыхъ въ пространствѣ 4-го измѣренія, то нельзя не обратить вниманіе, что только-что разсмотрѣнными построеніями рѣшаются важнѣйшіе вопросы о свойствахъ данной кривой, которая можетъ быть плоскою, двоякой и троякой кривизны.

Пусть упомянутыя 5 точекъ есть точки этой кривой. Ясно, что если всѣ 5 векторовъ, выражающихъ эти точки, принадлежатъ одной линейной секундѣ, то кривая есть плоская; если онѣ не находятся въ одной линейной секундѣ, но находятся въ одной линейной терціи, то она двоякой, а если онѣ не находятся даже въ одной терціи, то кривая троякой кривизны.

Теперь разсмотримъ построеніе линейныхъ секундъ, начиная, конечно, съ общаго случая.

Такъ какъ въ общемъ случаѣ для линейной примы характерны двѣ прямыя—начальныхъ и конечныхъ точекъ векторовъ, то для линейной секунды

всѣ точки плоскости служатъ какъ начальными, такъ и конечными точками векторовъ, а слѣдовательно каждая точка плоскости есть особая точка (p) нѣкоторой линейной примы, входящей въ составъ секунды.

И въ самомъ дѣлѣ, въ каждой линейной секундѣ, какъ и плоскости, столько же элементовъ то есть векторовъ, сколько и примъ, а каждая линейная прима имѣетъ характерную особую точку, представляющую одновременно начальную точку одного и конечную точку другого вектора. Назовемъ эту особую точку центромъ примы.

Такъ какъ съ каждою линейною примою сопряжена нѣкоторая парабола, по отношенію къ которой прямыя векторовъ составляютъ совокупность касательныхъ, то уже въ каждой примѣ представлены векторы всѣхъ направленій (но не параллельныхъ), и векторъ каждаго направленія представленъ въ единичномъ числѣ.

Слѣдовательно, въ линейной секундѣ представлены примы параллельныхъ векторовъ всѣхъ направленій, а каждая прима въ единичномъ числѣ.

Легко доказать, что примы параллельныхъ векторовъ, представленныхъ въ линейной секундѣ, есть примы линейныя. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ два произвольныхъ параллельныхъ вектора секунды $a_1\alpha_1$ и $a_2\alpha_2$. Ясно, что два такіе вектора опредѣляютъ собою линейную приму векторовъ съ прямою начальныхъ точекъ a_1a^2 и прямою конечныхъ точекъ $\alpha_1\alpha^2$. Какъ извѣстно, въ каждой такой примѣ необходимо имѣется точечный векторъ, и эта прима входитъ въ составъ линейной секунды. Иныхъ параллельныхъ векторовъ въ этой секундѣ не имѣется, такъ какъ при существованіи хотя одного такого вектора получимъ полную линейную секунду параллельныхъ векторовъ. Слѣдовательно необходимо имѣется въ каждой линейной секундѣ точечный векторъ O.

Легко доказать что такой векторъ имѣется въ линейной секундѣ въ единичномъ числѣ, почему его удобно назвать центромъ линейной секунды.

Въ самомъ дѣлѣ, разъ такая точка имѣется, то, какой бы векторъ мы ни взяли изъ секунды всегда имъ и этимъ точечнымъ векторомъ опредѣляется линейная прима векторовъ, имѣющихъ одно направленіе то есть параллельныхъ; слѣдовательно, эта точка является общимъ точечнымъ векторомъ для всѣхъ примъ параллельныхъ векторовъ, и значитъ, она присутствуетъ въ секундѣ въ единичномъ числѣ.

Поэтому линейную секунду мы можемъ опредѣлить нѣкоторою линейною примою и центромъ секунды какъ единственнымъ точечнымъ векторомъ.

Такъ какъ въ опредѣленной такимъ образомъ секундѣ, а именно во взятой для ея опредѣленія примѣ представлены векторы всѣхъ направленій прямыя которыхъ въ совокупности проходятъ чрезъ всѣ точки плоскости, то всегда можно найти и такіе векторы, прямыя которыхъ проходятъ чрезъ центръ O секунды.

Ясно, что это будутъ тѣ векторы примы, коихъ прямыя есть касательныя къ сопряженной параболѣ изъ центра секунды. Смотря потому, будетъ ли центръ секунды находиться внѣ или внутри параболы, такихъ касательныхъ будетъ двѣ или ни одной. Такія прямыя, если имѣются, назовемъ осями секунды.

Итакъ, чрезъ центръ линейной секунды проходятъ двѣ вещественныя или мнимыя оси. Въ вещественныхъ осяхъ представлены лишь векторы, находящіеся на самой оси то есть на этихъ осяхъ нѣтъ начальныхъ (или конечныхъ) точекъ векторовъ иного направленія, чѣмъ сами оси.

Подъ именемъ лучей секунды мы будемъ подразумѣвать прямыя, исходящія изъ ея центра.

Каждый лучъ секунды, согласно выведенному выше есть одновременно и прямая начальныхъ и прямая конечныхъ точекъ нѣкоторыхъ центральныхъ примъ секунды.

Совокупность лучей линейной секунды состоитъ изъ двухъ линейныхъ примъ — примы лучей начальныхъ и примы лучей конечныхъ точекъ центральныхъ примъ секунды.

Лучи начальныхъ и конечныхъ точекъ въ линейной секундѣ образуютъ двѣ концентричныя линейныя примы. Въ силу однозначной проективной связи между начальными и конечными точками векторовъ такая связь имѣется и между примами лучей то есть примы лучей начальныхъ и конечныхъ точекъ въ секундѣ гомологичны.

Отсюда, въ свою очередь, заключаемъ, что обѣ эти примы лучей имѣютъ два двойныхъ луча; если центръ лежитъ внѣ параболы, эти двойные лучи и составляютъ оси секунды.

Въ каждой изъ нихъ заключаются линейныя примы векторовъ. Начальныя и конечныя точки векторовъ каждой изъ этихъ примъ образуютъ двѣ гомологичныя примы точекъ съ одною двойною точкою—центромъ секунды, и она же есть центръ подобія этихъ примъ, какъ общій точечный векторъ.

Отсюда видимъ, что линейная секунда, имѣющая оси, можетъ быть опредѣлена двумя векторами на этихъ осяхъ, потому что въ такомъ случаѣ точка пересѣченія прямыхъ векторовъ есть

центръ секунды то есть третій векторъ, опредѣляющій секунду.

Особенно удобно для этого опредѣленія взять векторы съ начальными точками на разстояніи единицы длины отъ центра. Тогда длины такихъ векторовъ непосредственно выразятъ коефиціенты расширенія по направленію осей секунды, и по каждой данной точкѣ на этихъ осяхъ, какъ начальной точкѣ вектора, легко получимъ и конечную его точку.

Такимъ образомъ оси секунды можно принять за оси координатъ, по направленію которыхъ мы легко получимъ слагающія каждаго вектора секунды.

Въ силу однозначности начальныхъ и конечныхъ точекъ векторовъ секунды, мы всю линейную секунду векторовъ можемъ разсматривать какъ двѣ гомологичныя секунды точекъ, и такъ какъ каждой прямой одной системы, какъ прямой начальныхъ точекъ линейной примы векторовъ, гомологична прямая же какъ прямая конечныхъ точекъ, то значитъ гомологичность въ данномъ случаѣ относится къ коллинеарности.

Однако это не есть общій видъ коллинеарности, требующій установленія соотвѣтствіе между четырьмя точками той и другой системы, такъ какъ въ данномъ случаѣ дается только соотвѣтствіе между тремя точками той и другой системы.

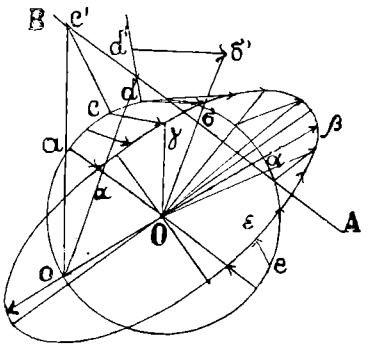
Изъ изложеннаго выше мы видимъ, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ тотъ частный видъ коллинеарности, который относится къ кристаллографической проективности (Affinität) и можетъ быть разсматриваемъ какъ совокупность двухъ сопряженныхъ косыхъ растяженій (или сжатій), причемъ изъ осей секунды одна служитъ осью, а другая направленіемъ растяженія.

Какъ особый видъ проективности двухъ плоскихъ системъ точекъ, его удобно назвать векторіальною проективностью [1]).

Какъ для опредѣленія векторіальной проективности необходимо и достаточно имѣть уголъ между осями и величины коефиціентовъ растяженія по каждой изъ осей, такъ тѣ же данныя вполнѣ однозначно опредѣляютъ линейную секунду векторовъ съ осями.

Можно придать нѣкоторую наглядность этому виду проективности, а вмѣстѣ съ тѣмъ и изображенію линейной секунды съ осями, если примемъ за начальныя точки векторовъ точки круга радіуса, равнаго единицѣ, и имѣющаго центромъ центръ

Фиг.



секунды (фиг. 7). Ясно, что такъ какъ тутъ мы имѣемъ дѣло съ однимъ видомъ кристаллографической проективности, то конечныя точки векторовъ образуютъ эллипсъ, и онъ то и придаетъ наглядность изображенію. Какъ сказано выше, для этого построенія достаточно имѣть два вектора, $a\alpha$ и $b\beta$ на вещественныхъ осяхъ секунды, имѣющей центръ въ центрѣ O круга начальныхъ точекъ.

Длины $O\alpha$ и $O\beta$ графически выражаютъ величины коефиціентовъ расширенія, причемъ первый меньше единицы (то есть соотвѣтствуетъ сжатію).

Чтобы показать значеніе этого эллипса для рѣшенія задачъ, относящихся къ линейной секундѣ векторовъ, покажемъ, какъ съ его помощью упрощается нахожденіе любого вектора секунды по данной его начальной точкѣ.

Предварительно однако покажемъ, какъ по данному лучу начальныхъ точекъ построить гомологичный лучъ конечныхъ точекъ. Такъ какъ обѣ примы лучей гомологичны и притомъ оси секунды есть вещественные двойные лучи этихъ примъ, то ясно, что если одну изъ этихъ примъ подвергнемъ поступательному движенію такъ, чтобы центръ примы двигался по одной изъ этихъ осей напр. Ob, то обѣ примы будутъ находиться въ перспективномъ положеніи то есть всѣ гомологичные лучи примъ будутъ попарно пересѣкаться на одной прямой—оси перспективы. Эта ось перспективы должна быть параллельна другой оси секунды Oa, потому что, если бы лучъ Oa пересѣкъ эту ось на конечномъ разстояніи,

[1]) Въ сочиненіяхъ автора этотъ видъ проективности нерѣдко служилъ предметомъ спеціальнаго изученія въ связи съ проблемами физической кристаллографіи. Такъ въ 3-мъ „Этюдѣ по аналитической кристаллографіи“ въ концѣ II главы разсмотрѣна совокупность нетолько двухъ, но и трехъ сопряженныхъ косыхъ растяженій. Въ связи съ термическими свойствами кристалловъ оси линейной секунды названы термическими осями и изучено ихъ значеніе въ „Versuch einer Theorie der Thermodynamik der Krystalle“ (Zeitschrift für Krystallographie **28** 483), а также въ 3-мъ изданіи Курса кристаллографіи глава XIII 18 и 19.

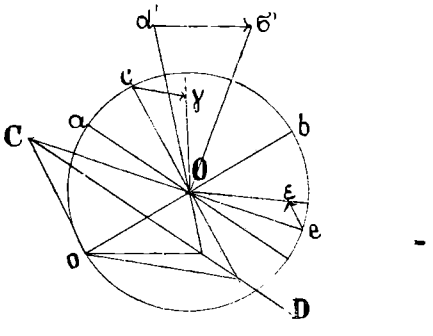
то прямая, соединяющая эту точку съ перемѣщеннымъ центромъ примы не могла быть параллельна этой оси.

Итакъ, если перемѣстимъ центръ примы конечныхъ лучей въ точку o на оси Ob, то легко найти ось перспективы AB, параллельную оси Oa, и тогда каждый лучъ Oc, проведенный чрезъ начальную точку нѣкотораго вектора $c\gamma$, отмѣтитъ на AB такую точку c', что прямая oc' будетъ параллельна лучу $O\gamma$, проходящему чрезъ конечную точку того же вектора.

Чтобы найти векторъ данной линейной секунды, имѣющій начальную точку d', мы проводимъ лучъ начальныхъ точекъ Od', пересѣкающій ось AB въ нѣкоторой точкѣ d_1, [1]) и по только-что описанному проводимъ еще гомологичный ему лучъ конечныхъ точекъ $O\delta'$ параллельный od_1. Чтобы найти конечную точку δ' этого вектора, теперь достаточно опредѣлить направленіе послѣдняго. Это направленіе дается параллельнымъ векторомъ $d\delta$, причемъ δ есть точка пересѣченія эллипса съ лучомъ $O\delta'$

Конечно можно обойтись и безъ эллипса, пользуясь для полученія направленій векторовъ пріемомъ, аналогичнымъ съ тѣмъ, который нами употребленъ для полученія направленій лучей конечныхъ точекъ. Въ этомъ мы основываемся на томъ, что и направленія векторовъ также образуютъ линейную приму, гомологичную примамъ лучей начальныхъ и конечныхъ точекъ и еще на томъ, что для вещественныхъ осей секунды направленія векторовъ также совпадаютъ съ направленіемъ лучей начальныхъ, а слѣдовательно и конечныхъ точекъ. По этой причинѣ,

Фиг. 8.

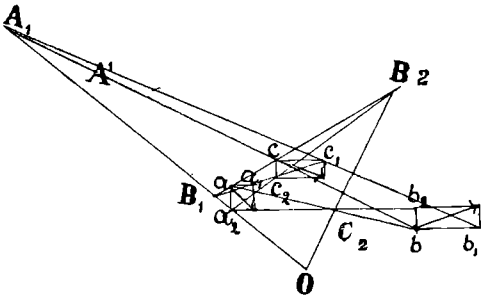


если мы построимъ при центрѣ O (фиг. 8) приму направленій векторовъ, перемѣстимъ эту приму поступательно такъ, чтобы центръ этой примы пришелъ въ положеніе точки o и еще проведемъ ось перспективы CD, параллельную оси секунды Od (напр. по двумъ векторамъ $c\gamma$ и $e\varepsilon$), то, проведя лучъ Od до пересѣченія съ осью CD и соединивъ эту точку съ точкою o, получимъ прямую, параллельную искомому вектору $d'\delta'$.

Мы видѣли выше, какъ по произвольной данной линейной примѣ и точечному вектору то есть центру секунды, если онъ находится внѣ параболы, сопряженной примѣ, найти вещественныя оси секунды.

Теперь мы покажемъ, какъ по тремъ произвольно даннымъ векторамъ $a\alpha$, $b\beta$ и $c\gamma$ опредѣлить центръ

Фиг. 9



примы (фиг. 9). Такъ какъ построеніе линейной секунды не зависитъ отъ принятыхъ осей координатъ, то таковыя мы можемъ взять произвольно и разложить каждый данный векторъ на два слагающіе, параллельные осямъ координатъ то есть получить пары векторовъ aa_1 съ aa_2, bb_1 съ bb_2 и cc_1 съ cc_2. Теперь получаемъ двѣ группы параллельныхъ векторовъ, въ каждой по три. Каждые три параллельные вектора опредѣляютъ секунду параллельныхъ векторовъ, а слѣдовательно и ось послѣдней.

Пусть центръ примы aa_1 съ cc_1 есть точка B_1, а центръ примы bb_1 съ cc_1 точка A_1; въ такомъ случаѣ прямая A_1B_1 и есть ось одной секунды. Также изъ aa_2 и bb_2 получимъ центръ C_2, а изъ aa_2 и cc_2 центръ B_2. Слѣдовательно, прямая B_2C_2 и есть ось второй секунды.

Легко видѣть, что точка O пересѣченія осей обѣихъ секундъ и есть искомый центръ линейной секунды данныхъ трехъ векторовъ.

Этотъ центръ есть важнѣйшій векторъ линейной секунды; имѣя его, мы высокой степени облегчаемъ рѣшенія задачъ, относящихся къ этой совокупности.

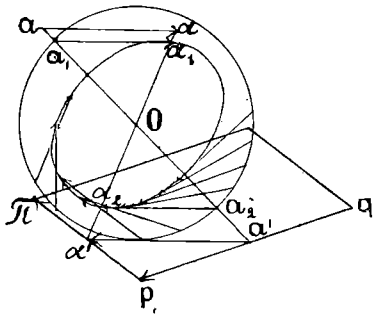
Пусть для опредѣленія линейной секунды даны ея центръ O и произвольная линейная прима $qp\pi$ (фиг. 10). По произвольно данной начальной точкѣ a требуется опредѣлить векторъ секунды.

Съ этою цѣлью проводимъ лучъ aO до пересѣченія съ прямою начальныхъ точекъ qp въ точкѣ a'; по извѣстнымъ уже намъ правиламъ легко найдемъ

[1]) не обозначенной на чертежѣ, но отмѣченной лучемъ изъ o.

векторъ $a'\alpha'$ данной примы. Если $O\alpha$ былъ лучомъ начальныхъ точекъ векторовъ центральной примы то есть параллельныхъ, то $O\alpha$ будетъ лучомъ конечныхъ точекъ той же примы. Поэтому искомый векторъ опредѣлится по конечной точкѣ α, являющейся точкою пересѣченія луча $O\alpha'$ съ прямою $a\alpha$, параллельною $a'\alpha'$

Фиг. 10.



Это построеніе является общимъ то есть не зависитъ отъ того, будетъ ли секунда имѣть вещественныя оси, или нѣтъ. Въ данномъ случаѣ, какъ усматривается непосредственно по положенію точки O относительно параболы сопряженной данной примѣ, мы имѣемъ именно секунду второго разряда, и все таки построеніе произвольнаго ея вектора отличается чрезвычайною простотою.

Подобно тому, какъ мы это сдѣлали для секунды перваго разряда, мы легко и теперь получимъ характеристичный эллипсъ секунды. Для этого принявъ центръ секунды за центръ круга радіуса, равнаго 1-цѣ, будемъ считать всѣ точки этого круга за начальныя точки векторовъ. Конечныя точки этихъ векторовъ въ совокупности и составятъ искомый эллипсъ. Точками этого эллипса, между прочимъ, будутъ и конечныя точки двухъ векторовъ $a_1\alpha_1$ и $a_2\alpha_2$, паралельныхъ вектору $a\alpha$.

Въ изображеніи линейныхъ секундъ обоихъ разрядовъ по совокупности векторовъ, имѣющихъ начальныя точки въ основномъ кругѣ секунды, мы сразу усматриваемъ различіе закона распредѣленія векторовъ для обоихъ разрядовъ.

Для секундъ второго разряда не можетъ существовать точекъ, общихъ основному кругу и характеристичному эллипсу.

То доказательство, которое приведено выше, что двѣ плоскія системы точекъ въ линейной секундѣ—система начальныхъ и система конечныхъ точекъ векторовъ—связаны тѣмъ особымъ видомъ коллинеарности, который относится къ кристаллографической проективности, не есть исчерпывающее оно относится только къ секундамъ, имѣющимъ оси.

Согласно опредѣленію кристаллографической проективности, оно станетъ исчерпывающимъ, если мы докажемъ, что во всякихъ, принадлежащихъ ей, линейныхъ примахъ съ параллельными прямыми начальныхъ точекъ, будутъ параллельны и прямыя конечныхъ точекъ тѣхъ же примъ.

Какъ видимъ, дѣло сводится къ тому, чтобы доказать постоянство направленій прямыхъ конечныхъ точекъ при постоянствѣ прямыхъ начальныхъ точекъ то есть къ доказательству гомологичности этихъ направленій, какъ двухъ линейныхъ примъ лучей. И какъ разъ такое доказательство только-что было дано, а оно привело къ понятію гомологичныхъ лучей начальныхъ и конечныхъ точекъ векторовъ, какъ представителей этихъ постоянныхъ направленій. Именно на этомъ основаніи мы можемъ заключить, что если начальныя точки составляютъ кругъ, то гомологичныя конечныя точки векторовъ составляютъ эллипсъ, и обратно.

Но если въ общемъ случаѣ начальныя (и конéчныя) точки векторовъ линейной секунды есть всѣ точки плоскости, то въ частныхъ случаяхъ совокупность начальныхъ (или конечныхъ) точекъ составитъ линію, а именно прямую или даже точку. Ради краткости, секунды перваго рода назовемъ прямолинейною, а во второмъ случаѣ точечною. Что касается вторыхъ, то ясно, что таковыхъ для каждой точки, какъ центра, существуетъ одна единственная, а именно полная совокупность векторовъ, имѣющихъ общую начальную (или конечную) точку. Одною такою точкою уже однозначно опредѣляется вся линейная секунда.

Какъ извѣстно, въ системахъ четвертой ступени двѣ линейныя секунды пересѣкаются въ одномъ единственномъ элементѣ. Для точечныхъ секундъ векторовъ это особенно наглядно, если центръ есть общая начальная, а центръ другой общая конечная точка векторовъ. Ясно, что векторъ имѣющій начальною точкою первый, а конечною второй центръ, и есть этотъ единственный векторъ пересѣченія секундъ.

Но если обѣ точечныя секунды имѣютъ центромъ начальную (или конечную) точку векторовъ, то очевидность прекращается, а ближайшее разсмотрѣніе показываетъ, что въ этомъ случаѣ общій векторъ есть безконечно-большой, имѣющій безразлично начальною (или конечною) точкою тотъ или другой центръ. Другими словами, въ системѣ векторовъ нельзя считать различными элементами безконечно-большіе векторы одного направленія и на одной

прямой, гдѣ бы ни находилась ихъ начальная (или конечная) точка.

Чтобы доказать это, нужно доказать, что всякая линейная прима, опредѣленная безразлично однимъ изъ такихъ векторовъ и какимъ-угодно еще однимъ векторомъ всегда тождественна, или же примы вовсе нельзя составить.

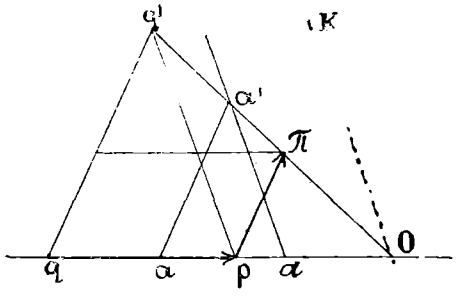
Если второй векторъ B конечной длины мы возьмемъ на той же прямой, то въ этой линейной примѣ не можетъ находиться точечнаго вектора на конечномъ разстояніи, потому что онъ съ векторомъ B далъ бы только конечные векторы, а безконечно большой имѣлъ бы оба конца безконечно удаленными. Если же самъ точечный векторъ безконечно удаленъ, то всѣ векторы примы были бы той же длины, что и B. Итакъ, изъ безконечно большого и конечнаго вектора на одной прямой линейной примы составить нельзя, въ которой присутствовали бы конечные векторы.

Если возьмемъ векторъ B произвольнаго положенія въ плоскости и допустимъ, что мы составили линейную прямую $qp\pi$, гдѣ удалена безконечна (ибо иначе всѣ векторы, имѣющіе начальныя точки на конечномъ разстояніи, таковыми имѣли бы и конечныя точки), то по этимъ тремъ точкамъ составить параллелограма нельзя, и обѣ діагонали послѣдняго не отличались бы отъ параллельныхъ сторонъ $q\pi$ и $p\pi$, а потому всѣ векторы примы были бы безконечно-велики, а векторъ qp не имѣлъ бы съ ними конструктивной связи.

Переходя къ прямолинейнымъ секундамъ, замѣтимъ, что теперь одною прямою начальныхъ (или конечныхъ) точекъ она не опредѣляется.

Для ея опредѣленія нужно взять три вектора съ начальными (или конечными) точками на одной прямой. Ясно, что два изъ нихъ можемъ замѣнить на-

Фиг.



чальными точками $qp\pi$ (фиг. 11) нѣкоторой линейной примы, а за третій принять точечный векторъ O на той же прямой qp начальныхъ точекъ; онъ и будетъ центръ секунды.

Ясно, что на послѣдней мы получаемъ приму векторовъ на прямой или прямолинейную и легко найдемъ сколько угодно ея векторовъ напр. $a\alpha$, причемъ $Oq : Op = Oa : O\alpha$.

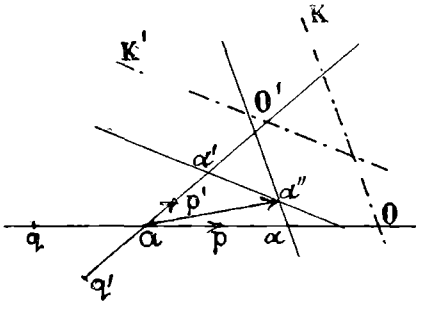
Такъ какъ O есть центръ секунды, то по одному вектору p^π опредѣляется линейная прима параллельныхъ векторовъ, въ составъ которой войдетъ и векторъ qq' Въ свою очередь, два вектора qp и qq', имѣющіе общую начальную точку, опредѣлятъ линейную приму векторовъ съ тою же общею начальною точкою и прямою pq' конечныхъ точекъ. Также изъ векторовъ $a\alpha$ и aa', имѣющихъ общую начальную точку a, опредѣлится линейная прима, имѣющая ту же общую начальную точку и прямую $a'\alpha$ конечныхъ точекъ векторовъ.

Но такъ какъ $Oa : O\alpha = Oq \quad Op = Oq' : O^\pi = k$
и $Oa \quad Oa' = Oq : Oq' = Op : O^\pi = l$
то $Oq' \quad Op = k : l = Oa' : O\alpha$ то есть прямыя pq' $\alpha a'$ параллельны. Итакъ, въ прямолинейной секундѣ векторовъ каждая начальная (или конечная) точка есть центръ точечной примы, прямая конечныхъ (соотв. начальныхъ) точекъ которыхъ проходитъ чрезъ конечную (соотв. начальную) точку ея вектора на централи секунды, и всѣ такія прямыя въ секундѣ параллельны.

Ясно, что въ этомъ случаѣ централь секунды есть ея вещественная ось, которая имѣется въ единичномъ числѣ, а для полнаго опредѣленія секунды, нужно имѣть еще одинъ векторъ на централи и сопряженную ось, если мы такъ означимъ прямую Ok, проходящую чрезъ центръ секунды и параллельную всѣмъ прямымъ конечныхъ точе точечныхъ примъ.

Если таковыхъ секундъ дано двѣ, то весьма легко найти векторъ ихъ пересѣченія.

Фиг.



Пусть (фиг. 12) qp векторъ на централи, Ok сопряженная ось одной, $q'p'$ векторъ на централи, а $O'k$ сопряженная ось другой прямолинейной се-

кунды. Точка a пересѣченія централей есть начальная, а точка пересѣченія a'' соотвѣтственныхъ прямыхъ конечныхъ точекъ, есть конечная точка искомаго вектора пересѣченія.

Но если въ общемъ случаѣ двѣ линейныя секунды пересѣкаются въ одномъ элементѣ, то въ частныхъ случаяхъ, онѣ могутъ пересѣкаться и въ линейной примѣ. Это имѣетъ мѣсто, когда обѣ секунды принадлежатъ одной и той же линейной терціи. Хотя терціи мы разсмотримъ ниже, но и сейчасъ можемъ привести наглядный примѣръ: прямолинейную секунду и точечную секунду съ центромъ на централи первой. Ясно, что всѣ векторы линейной точечной примы, которыя имѣютъ центромъ центръ второй секунды, и выведутся для первой, будутъ одновременно общими и для второй секунды.

Если же центръ второй линейной секунды не находится на централи первой, то для того, чтобы получить векторъ пересѣченія обѣихъ секундъ, нужно чрезъ этотъ центръ провести прямую, параллельную сопряженной оси первой то есть прямолинейной секунды, и тогда именно на этой прямой находится общій безконечно большой векторъ, хотя опять видимо имѣются два съ разными начальными точками.

Наконецъ, существуетъ еще, какъ исключительная разность линейныхъ секундъ, секунда параллельныхъ векторовъ, когда кромѣ централи, состоящей изъ точечныхъ векторовъ, она можетъ быть опредѣлена еще векторомъ, не имѣющимъ въ этой централи ни одной концевой точки. Всѣ векторы такой секунды параллельны, и ни одинъ изъ нихъ не имѣетъ на централи концевыхъ точекъ.

Совершенно особый случай представляетъ секунда точечныхъ векторовъ или обыкновенная плоскость. Всѣ точки есть ея центры.

Теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію линейныхъ терцій векторовъ.

Если въ общемъ случаѣ начальными (и конечными) точками векторовъ линейной секунды являются всѣ точки плоскости, то это тѣмъ болѣе имѣетъ мѣсто для линейной терціи. Но для послѣдней каждой точкѣ плоскости принадлежитъ не одинъ, а цѣлая линейная прима векторовъ то есть для нея точки плоскости не гомологичны точкамъ той же плоскости какъ концевыя точки векторовъ, но съ ними коррелятивны прямыя, представляющія конечныя точки линейныхъ точечныхъ примъ этой терціи.

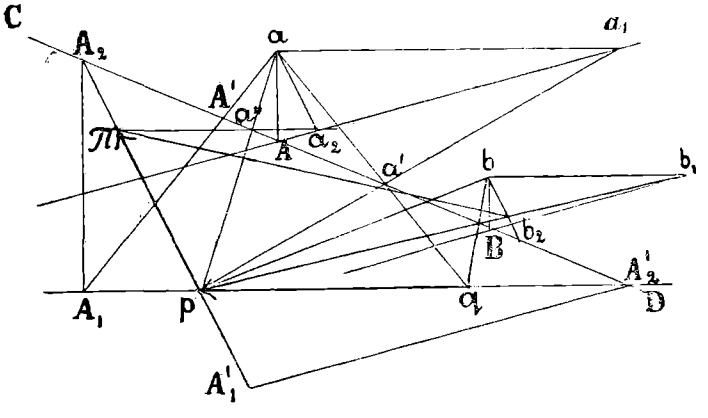
Линейная терція опредѣляется четырьмя произвольно взятыми векторами A, B, C, D. Ясно, что изъ ABC и ABD мы можемъ составить двѣ линейныя секунды, имѣющія общую линейную приму AB; а такъ какъ въ каждой линейной секундѣ необходимо имѣются точечные векторы, представляющіе центры этихъ секундъ, то ясно, что мы именно ихъ можемъ взять для опредѣленія терціи то есть считать за таковые векторы C и D; въ такомъ случаѣ та же линейная терція опредѣлится линейною примою AB и двумя точечными векторами C и D.

Но такъ какъ два точечныхъ вектора опредѣляютъ собою линейную приму таковыхъ, то всѣ точки прямой CD есть также точечные векторы. Назовемъ прямую CD централью линейной терціи.

Линейная терція векторовъ можетъ быть опредѣлена какою-нибудь линейною примою и централью терціи, которая представляетъ геометрическое мѣсто точечныхъ векторовъ.

Пусть $qp^{\rightarrow}$ есть линейная прима (фиг. 13), а CD

Фиг. 13.



централь нѣкоторой линейной терціи. По этимъ даннымъ легко опредѣлимъ линейную приму съ произвольно даннымъ центромъ a.

Соединяемъ прямою точки a и q, а чрезъ точку a' ея пересѣченія съ централью CD и точку p проводимъ лучъ до пересѣченія въ точкѣ a_1 съ прямою aa_1, параллельною начальному вектору pq. Такъ какъ a' и векторъ pq принадлежатъ данной терціи, то ей же принадлежитъ и прима параллельныхъ векторовъ съ прямою начальныхъ точекъ aq и прямою конечныхъ точекъ a_1p, слѣдовательно векторъ aa_1 также принадлежитъ данной терціи.

Такъ же по вектору $p^{\rightarrow}$ и точечному вектору a'' выведемъ приму, въ составѣ которой будетъ находиться векторъ aa_2, параллельный $p^{\rightarrow}$ (точка a' есть точка пересѣченія ap съ CD).

Отсюда заключаемъ, что точкѣ a плоскости въ этой линейной терціи коррелятивна прямая a_1a_2,

причемъ между параллельными векторами точечной примы a и данной примы существуетъ связь гомологичности, и, въ частности, вектору aA, гдѣ A точка пересѣченія прямой a_1a_2 съ CD, гомологиченъ параллельный ему векторъ A_1A_2 данной примы. Какъ таковой, онъ долженъ имѣть конечную точку A_2 на прямой AA', гдѣ A' есть точка пересѣченія A_1a съ CD и слѣдовательно находится на централи терціи, также какъ и точка A, значитъ на той же централи находится и точка A_2 то есть это есть точка пересѣченія централи съ начальнымъ векторомъ p^{π}.

Отсюда заключаемъ, что направленіе вектора A_1A_2, а слѣдовательно и aA не зависитъ отъ положенія точки a; иначе, прямая aA, соединяющая всякую данную точку a, какъ центръ точечной примы съ точкою A пересѣченія коррелятивной прямой a_1a_2 имѣетъ постоянное направленіе для всѣхъ точекъ плоскости.

Но нетрудно видѣть, что нетолько прямая aA, но прямая Aa_1 имѣетъ постоянное для всѣхъ точечныхъ примъ терціи направленіе.

Въ самомъ дѣлѣ, каждая точка централи терціи есть центръ нѣкоторой секунды, принадлежащей терціи, а всѣ вообще линейныя секунды мы можемъ вывести изъ данной примы и точекъ централи, принявъ каждую изъ нихъ отдѣльно за центръ подобія подвергая данную приму преобразованію подобія и при этомъ послѣдовательно придавая отношеніямъ подобія всѣ возможныя значенія. При этомъ подобно преобразуются нетолько сами примы, выведеныя изъ примы qp^{π}, но и точечныя примы, выведенныя изъ примы a.

Отсюда видимъ, что каждая данная линейная терція въ общемъ случаѣ можетъ опредѣляться централью CD и двумя постоянными направленіями A_1A_2 и a_1a_2.

Назовемъ первое направленіе опредѣляющимъ (положеніе точечныхъ векторовъ прямыхъ конечныхъ точекъ векторовъ), а второе направленіемъ прямыхъ конечныхъ точекъ векторовъ (точечныхъ примъ).

Изъ этого усматриваемъ всю простоту построенія векторовъ линейной терціи, опредѣленной этими данными. Чтобы найти прямую, коррелятивную точкѣ b, и значитъ положеніе соотвѣтственной прямой концевыхъ точекъ, нужно только изъ b провести bB параллельно опредѣляющему направленію A_1A_2 до пересѣченія въ точкѣ B съ централью CD терціи, а изъ B провести прямую Bb_1 въ направленіи конечныхъ точекъ, и вотъ точечная прима, имѣющая центръ въ точкѣ b опредѣлена.

Теперь замѣтимъ, что различіе между направленіями направляющимъ и конечныхъ точекъ есть различіе относительное.

Въ самомъ дѣлѣ, если перемѣнимъ направленіе векторовъ на прямо противоположное, то перемѣнится на противоположное и значеніе этихъ направленій, а именно опредѣляющее станетъ направленіемъ конечныхъ точекъ, а направленіе конечныхъ точекъ станетъ направляющимъ.

Чтобы доказать это, достаточно замѣтить, что оба эти направленія есть направленія тѣхъ двухъ векторовъ опредѣляющей линейной примы, которыя принадлежатъ точкамъ пересѣченія начальныхъ векторовъ примы съ централью терціи. Одно изъ нихъ (направляющее) имѣетъ конечною точкою A_2, а другое (конечныхъ точекъ) начальною точкою точку A'_2. Перемѣнивъ направленія векторовъ на противоположныя, найдемъ, что A_2' есть конечная точка вектора $A_1'A_2'$ примы, а потому станетъ направленіемъ опредѣляющимъ, а A_2 есть начальная точка вектора A_2A_1 примы, а потому направленіе станетъ направленіемъ конечныхъ точекъ.

Перемѣнивъ значеніе этихъ направленій, но сохраняя прежнія направленія самихъ векторовъ терціи, мы этимъ самымъ измѣняемъ построеніе въ той же терціи, соотвѣтствующее каждой данной точкѣ a, въ томъ смыслѣ, что теперь эта точка будетъ уже не начальною, а конечною точкою всѣхъ векторовъ точечной примы, начальныя точки которой составитъ коррелятивную съ нею прямую. При этой концепціи направленіе конечныхъ точекъ станетъ направленіемъ опредѣляющимъ, а опредѣляющее направленіе—направленіемъ начальныхъ точекъ.

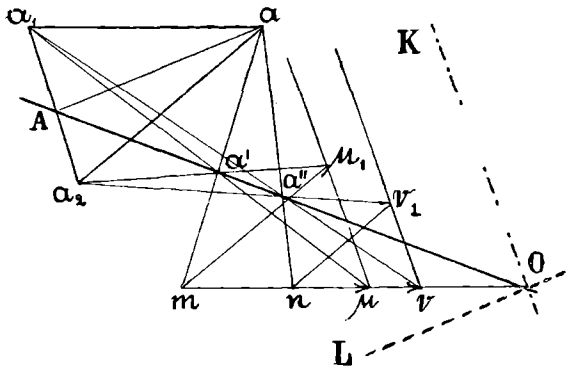
Чтобы узнать, не получится ли терція иныхъ свойствъ, если въ ея составѣ находятся прямолинейныя секунды, мы можемъ одну такую принять за опредѣляющую терціи, для чего достаточно взять еще одинъ какой-нибудь векторъ, за каковой очевидно мы можемъ избрать и точечный, такъ какъ линейная терція есть во всякомъ случаѣ линейная прима линейныхъ секундъ, а слѣдовательно во всякомъ случаѣ имѣетъ централь то есть приму точечныхъ векторовъ.

Итакъ, беремъ для опредѣленія терціи прямолинейную секунду съ центромъ O (фиг. 14) и нѣкоторымъ векторомъ $m\mu$ на централи, а также принимаемъ OK за сопряженную ось и еще какую-нибудь точку на прямой AO за точечный векторъ то есть эту прямую за централь терціи.

Теперь легко опредѣлить прямую (конечныхъ точекъ), коррелятивную съ какою либо произвольно-

взятою точкою a какъ начальною точкою векторовъ примы.

Фиг. 14.



Если OK есть сопряженная ось, то прямая $\mu\mu_1$, ей параллельная и проходящая чрезъ конечную точку вектора $m\mu$ есть прямая (конечныхъ точекъ), коррелятивная начальной точкѣ m векторовъ нѣкоторой примы, принадлежащей данной секундѣ, а слѣдовательно и терціи.

Соединивъ a и m прямою и проведя чрезъ точку a' пересѣченія этой прямой съ централью OA терціи прямыя μa_1 и $\mu_1 a_2$, а также проведя векторы aa_1 и aa_2, соотвѣтственно параллельные двумъ векторамъ данной секунды, получимъ въ качествѣ прямой (конечныхъ точекъ), коррелятивной точкѣ a въ терціи, прямую a_1a_2 параллельную $\mu\mu_1$, а слѣдовательно сопряженной оси OK. Если пересѣченіе этой прямой съ централью терціи есть точка A, то прямая aA есть извѣстное уже намъ постоянное направленіе, характеристичное для терціи.

Ясно, что направленіе этой прямой есть именно опредѣляющее, почему оно показано особымъ пунктиромъ въ видѣ прямой OL.

Есл возьмемъ другой векторъ $n\nu$ на той же централи прямолинейной секунды и кромѣ него еще векторъ $n\nu_1$, параллельный $m\mu_1$, то прямая na въ пересѣченіи съ централью терціи опредѣлитъ центръ a'' нѣкоторой секунды, и соотвѣтственно обоимъ взятымъ векторамъ при точкѣ a, какъ начальной, построимъ тѣ же два вектора aa_1 и aa_2 терціи, и значитъ прямыя $a_1\nu$ и $a_2\nu_1$ пересѣкутся въ томъ же центрѣ a''

Итакъ въ результатѣ получилась линейная тер- опредѣляемая такими же элементами, какъ тер- вообще, а именно централью OA и направле- опредѣляющимъ OL и конечныхъ точекъ OK то есть во всякой линейной терціи вообще имѣется и совокупность прямолинейныхъ секундъ, и сопряженныя оси этихъ секундъ параллельны направленію конечныхъ точекъ терціи.

Такъ какъ точечныхъ линейныхъ терцій существовать не можетъ (полная совокупность векторовъ, исходящихъ изъ одной точки, есть линейная секунда), то остается еще возможность лишь прямолинейныхъ терцій. Въ такихъ терціяхъ имѣется централь, всѣ точки которой есть центры точечныхъ секундъ то есть такія терціи есть полныя совокупности всѣхъ векторовъ, исходящихъ изъ точекъ централи. Какъ полныя совокупности, такія терціи не требуютъ спеціальнаго изученія, и всѣ ихъ свойства непосредственно вытекаютъ изъ опредѣленія. Между прочимъ ясно, что двѣ прямолинейныя терціи пересѣкаются въ точечной секундѣ, имѣющей своимъ центромъ точку пересѣченія централей обѣихъ терцій.

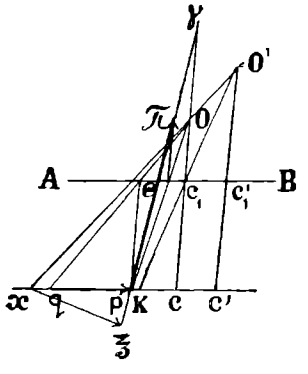
Остается еще отмѣтить существованіе терціи параллельныхъ векторовъ, въ составѣ которой находится секунда точечныхъ векторовъ; это единственная терція, въ которой не одна централь, централями служатъ всѣ прямыя плоскости.

Теперь обратимся къ проблемѣ пересѣченія линейныхъ совокупностей вообще.

Если даны линейная терція и линейная прима, то или послѣдняя цѣликомъ принадлежитъ этой терціи, или она пересѣкаетъ ее въ одномъ единственномъ векторѣ. Достаточно двухъ общихъ векторовъ, чтобы доказать, что имѣетъ мѣсто первый случай.

Отсюда видимъ, что проблема пересѣченія разрѣшается построеніемъ коррелятивныхъ прямыхъ для двухъ произвольно взятыхъ точекъ примы, принятыхъ напр. же начальныя.

Фиг. 15.



Пусть дана линейная прима qp (ф 15) и нѣкоторая линейная терція, въ которой направленіе конечныхъ точекъ параллельно $O'c'$.

Если представимъ себѣ прямолинейную терцію, имѣющую централью прямую начальныхъ точекъ qp данной примы, то конечно эта прима цѣликомъ входитъ въ составъ этой терціи. Но эта терція пересѣкается съ данною въ нѣкоторой прямолинейной секундѣ, имѣющей своею централью ту же прямую qp. Слѣдовательно, если данная прима имѣетъ общіе векторы съ данною линейною терціею, то тѣ же векторы будутъ общими для нея съ прямолинейною секундою пересѣченія, потому что и данная прима, и эта прямолинейная секунда входятъ въ составъ прямолинейной терціи. Вообще же въ такомъ случаѣ прима съ секундою пересѣкаются въ единственномъ элементѣ, а этотъ то элементъ есть элементъ пересѣченія данныхъ примы и терціи.

Въ прямолинейной секундѣ централью будетъ та же прямая qp, а сопряженною осью прямая, параллельная $c'O'$; чтобы ее опредѣлить вполнѣ, достаточно въ данной терціи по двумъ начальнымъ точкамъ на централи найти соотвѣтственные векторы на этой прямой, а тогда по двумъ векторамъ опредѣлится и центръ секунды c'; пусть одинъ изъ этихъ векторовъ есть Kc, гдѣ c есть начальная точка того вектора данной примы cr, который имѣетъ направленіе, параллельное $c'O$

Примемъ послѣднее направленіе и нѣкоторую прямую AB, параллельную qp, за оси координатъ, и въ послѣдней за начала точки c_1 и c_1'; отложимъ $c_1e = cp$ и проведемъ прямую чрезъ q и e до пересѣченія въ O съ прямою cc_1; также проведемъ прямую Kc_1 до пересѣченія съ $c'O'$ въ точкѣ O; тогда обѣ прямыя Oq и $O'k$ даютъ непосредственную возможность по любой начальной точкѣ находить прямую, проходящую чрезъ конечную точку того же вектора, параллельною Oc. Въ частности, прямая OO' пересѣкая qp, отмѣчаетъ на ней точку x, которая и есть начальная точка искомаго общаго вектора примы прямолинейной секунды, а слѣдовательно и данной терціи; по этой начальной точкѣ находимъ конечную точку вектора xx_1, и этимъ задача разрѣшена.

Въ частности, если дана прима параллельныхъ векторовъ, то находимъ секунду пересѣченія данной терціи съ терціей параллельныхъ векторовъ и задача сводится къ простой задачѣ опредѣленія вектора пересѣченія примы и секунды параллельныхъ векторовъ.

Разрѣшеніе этой коренной задачи въ самомъ общемъ видѣ даетъ въ руки средство въ самомъ общемъ видѣ разрѣшать задачи по пересѣченію линейныхъ совокупностей.

Чтобы опредѣлить пересѣченіе линейной секунды съ линейною терціей, достаточно найти два вектора пересѣченія съ этою терціею какихъ либо двухъ линейныхъ примъ, входящихъ въ составъ данной секунды. Въ частности, если векторы секунды параллельны, то непосредственно получаемъ точечный векторъ пересѣченія ея оси съ централью терціи и остается найти еще только одинъ векторъ пересѣченія.

При рѣшеніи задачи пересѣченія двухъ линейныхъ терцій, мы непосредственно получаемъ общій точечный векторъ пересѣченія обѣихъ централей терціи, и эта точка есть центръ искомой секунды пересѣченія.

Остается еще избрать двѣ примы одной терціи и найти ихъ векторы пересѣченія съ другою терціей, и тогда имѣемъ три вектора, опредѣляющіе искомую секунду.

Въ частности, если обѣ терціи прямолинейны, то секунда ихъ пересѣченія, есть точечная, имѣющая центромъ точку пересѣченія централей терцій.

Наконецъ если нужно опредѣлить пересѣченіе двухъ линейныхъ секундъ, то стоитъ къ одной изъ нихъ произвольно присоединить векторъ напр. центръ другой секунды, чтобы опредѣлить терцію, которая съ этою второю секундою пересѣчется въ примѣ, и въ этой примѣ будетъ заключаться искомый векторъ пересѣченія.

Тоже можемъ сдѣлать и съ другою секундою, присоединивъ къ ней напр. центръ первой секунды и тогда найдемъ другую приму пересѣченія, въ которой также заключается искомый векторъ пересѣченія, который и найдется какъ векторъ пересѣченія обѣихъ примъ, а этотъ вопросъ уже разсмотрѣнъ выше въ самомъ общемъ видѣ.

Какъ примѣръ приложенія объясненныхъ здѣсь построеній разсмотримъ построеніе геометрической сѣти въ пространствѣ 4-хъ измѣреній.

Такая сѣть для плоскости впервые было выведена Мебіусомъ въ его „Barycentrischer Calcül, а затѣмъ авторомъ въ 1-ой части труда „ Beiträge zur zonalen Krystallographie“ [1]) и выражаетъ собою послѣдовательный выводъ граней кристаллографическаго комплекса въ гномонической проекціи по періодамъ.

Основою такой сѣти служитъ трехугольникъ, вершинамъ котораго придаются символы (100) (010), (001), а нѣкоторой точкѣ внутри трехугольника— символъ (111). Этимъ уже сѣть вполнѣ опредѣлена, и можно вывести точку, представляющую гномоническую проекцію грани, выражаемой произвольнымъ символомъ изъ трехъ цѣлыхъ чиселъ.

---

[1]) Zeitschrift für Krystallographie XXXII 453.

Можно взглянуть на дѣло шире и принять эти три числа за координаты, опредѣляющія любую точку плоскости, и конечно величины этихъ координатъ можно брать и ирраціональныя. Это и есть координаты, названныя Мебіусомъ барицентрическими; построеніе посредствомъ нихъ точекъ сводится къ тому, какъ будто числа выражаютъ вѣса, приложенныя къ соотвѣтственнымъ вершинамъ трехугольника, а точка, ими опредѣляемая, есть центръ тяжести системы.

Конечно можно обойтись и безъ этого механическаго толкованія, но и отъ всякаго другого, чисто геометрическаго, толкованія сущность дѣла не измѣнится, почему я на этомъ и не останавливаюсь, такъ какъ и эта концепція достаточно элементарна вполнѣ точна.

Развитіе самой геометрической сѣти получится, если, придавъ каждой изъ вершинъ трехугольника свой особый единичный вѣсъ, мы послѣдовательно будемъ опредѣлять центръ тяжести приложенныхъ вѣсовъ на сторонахъ и внутри трехугольника, отмѣчая слагающія въ видѣ цифръ. Тогда на сторонахъ трехугольника получимъ (110), (101), (011), а внутри него (111). Это будутъ точки I періода причемъ данный трехугольникъ раздѣлится на 6 другихъ и совокупность полученныхъ центровъ тяжести составитъ вершины всѣхъ этихъ трехугольниковъ.

Имѣя въ каждой изъ этихъ точекъ опредѣленный приложенный вѣсъ, мы можемъ находить центры тяжести на сторонахъ и въ центрѣ трехугольниковъ по этимъ вѣсамъ и такимъ образомъ каждый изъ трехъугольниковъ I періода, раздѣлить на 6 трехугольниковъ II періода, къ вершинамъ котораго приложены уже большіе вѣса. Понятно, что съ повышеніемъ періода числа будутъ послѣдовательно возрастать, всегда оставаясь цѣлыми, такъ какъ всегда получаются сложеніемъ изъ цѣлыхъ же чиселъ. Но въ полученной такимъ образомъ совокупности комбинацій различныхъ цѣлыхъ чиселъ будутъ представлены всѣ вообще возможныя комбинаціи то есть каждая комбинація изъ трехъ цѣлыхъ чиселъ войдетъ въ составъ чиселъ какого-нибудь періода и будетъ относиться къ одной опредѣленной точкѣ геометрической сѣти.

Какъ сѣть, относящаяся къ простѣйшей замкнутый фигурѣ—трехугольнику—на плоскости, она можетъ быть обобщена на линейныя системы высшей ступени, и прежде всего на обыкновенное пространство, въ которомъ такою простѣйшею фигурою является тетраэдръ (точнѣе сфеноидъ).

Это обобщеніе оказалось въ высшей степени важнымъ для приложеній къ петрографической химіи, въ которой эта фигура получила названіе химическаго тетраэдра [1]). Систематическое обобщеніе геометрическихъ сѣтей на системы высшей степени указано въ одной замѣткѣ автора [2]), между прочимъ нѣкоторыя, болѣе детальныя указанія сдѣланы и для системы четвертой ступени то есть, въ частности, для пространства 4-хъ измѣреній.

Теперь же мы имѣемъ возможность эту связь численныхъ законовъ и геометрическихъ соотношеній воспроизвести графически на простомъ чертежѣ на плоскости, что и исполнено на фиг. 16.

Также и здѣсь основою геометрической сѣти является простѣйшая фигура, а именно пентантопъ [3]) Въ самомъ дѣлѣ, въ системѣ 4-ой ступени имѣется безконечное множество линейныхъ терцій, и только четыре такія терціи пересѣкаются въ одномъ элементѣ. Поэтому для простѣйшей замкнутой фигуры требуется еще одна таковая, и она окажется ограниченною пятью линейными терціями, что и должно выражаться приведеннымъ названіемъ. Каждые четыре изъ этихъ терцій пересѣкаются въ одномъ элементѣ, а потому всего у этой фигуры 5 вершинъ, и ту изъ нихъ, въ которой пересѣкаются 4 терціи, мы можемъ считать противолежащею той терціи, которая не заключаетъ этого элемента. Три линейныя терціи пересѣкаются въ линейной примѣ, и послѣднюю мы можемъ считать противолежащею той линейной секундѣ, въ которой пересѣкаются двѣ остальныя терціи.

Итакъ, въ основу пентатопа кладется 5 его вершинъ, представленныхъ на чертежѣ 5-ю векторами, въ начальныхъ точкахъ которыхъ выставлены символы изъ одной 1-цы и 4-хъ нулей.

Ясно, что изъ этихъ 5 векторовъ 3 мы можемъ взять точечными, если расположимъ политопъ такъ, чтобы три его вершины пришлись въ плоскость чертежа. Пусть эти три вершины будутъ отмѣчены

---

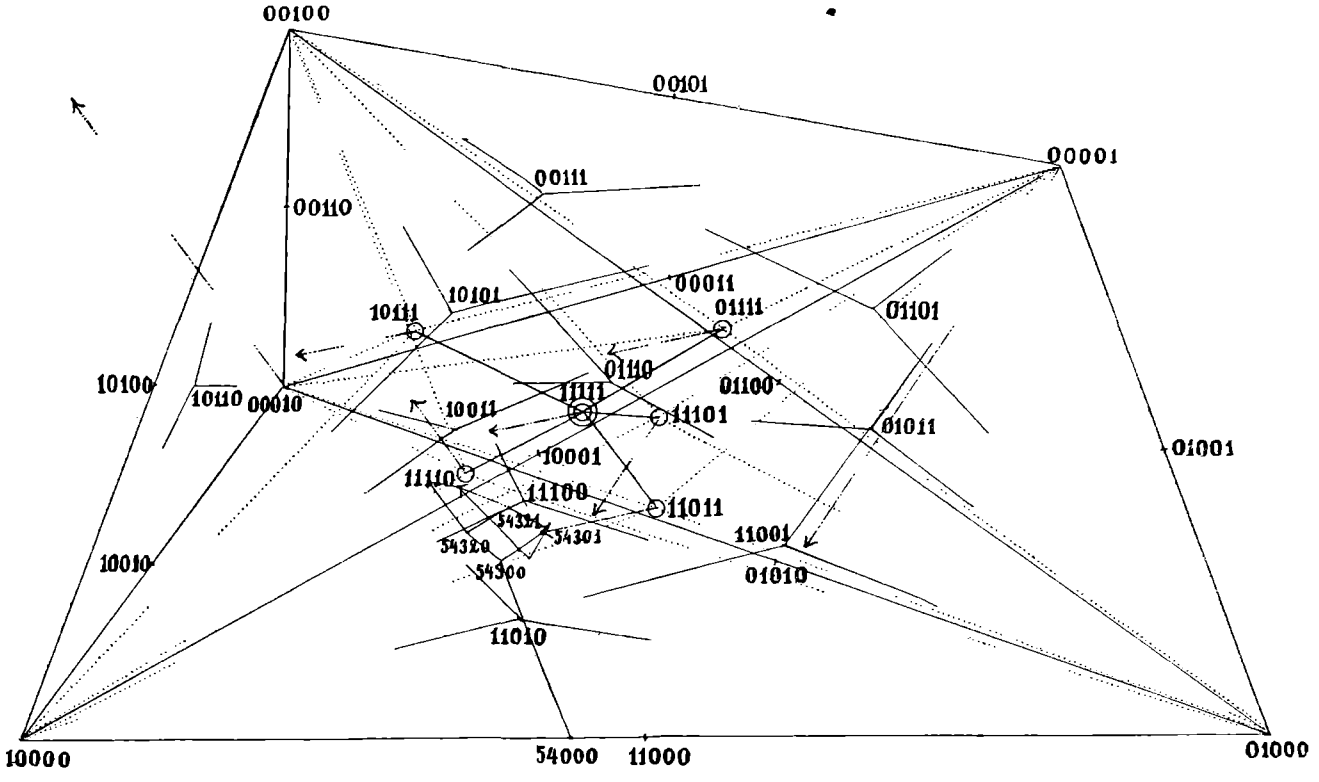
[1]) Ср. Записки Горнаго Института I 4.

[2]) Тамъ же II 80.

[3]) Названіе заимствуется мою изъ статьи Гесса „Ueber reguläreп Polytope höherer Art“ въ Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der ges. Naturwis. zu Marburg 1885 № 3 s. 31. Здѣсь приведена математическая литература, къ изслѣдованію такихъ фигуръ въ пространствѣ 4-хъ и высшихъ измѣреній, начиная со статьи Stringham „Regular figures in n-dimensional space“ въ Americ. Jour of Math. III. Преимущественно подвергались изслѣдованію и опредѣлены „правильные политопы“. Эти изслѣдованія не относятся къ области Новой Геометріи, такъ какъ она не знаетъ правильныхъ тѣлъ, какъ не знаетъ прямыхъ угловъ равныхъ отрѣзковъ и угловъ и пр. Это все свойства непозиціонныя.

символами (10000), (01000) и (00100); тогда остальныя двѣ вершины (00010) и (00001) по необходимости должны быть представлены разными векторами, какъ и показано на чертежѣ.

Фиг. 16.



Подобно тому, какъ въ трехугольникѣ, для опредѣленія сѣти, вмѣсто внутренней точки мы можемъ взять два отрѣзка на сторонахъ, пересѣкающихся въ одной вершинѣ, въ тетраэдрѣ три отрѣзка, пересѣкающіеся на ребрахъ тетраэдра, пересѣкающихся въ одной вершинѣ (считая начало отрѣзка отъ этой вершины), такъ въ пентатопѣ мы можемъ такимъ же образомъ взять произвольно четыре отрѣзка, считая ихъ начала отъ одной и той же вершины.

Всѣ остальныя ребра пентатона, въ количествѣ 10, мы получимъ, просто соединяя прямыми каждую вершину со всѣми четырьмя остальными.

Каждыя три вершины пентатопа опредѣляютъ одну изъ его граней въ видѣ трехугольника, а имѣя въ такомъ трехугольникѣ на двухъ сторонахъ внутреннія точки, мы легко разобьемъ площадь трехугольника на шесть трехугольниковъ I періода, въ составѣ которыхъ всегда находится и внутренняя точка трехугольника, какъ общая вершина этихъ меньшихъ трехугольниковъ.

Такимъ образомъ, кромѣ упомянутыхъ пяти основныхъ начальныхъ точекъ политопа, мы получимъ совокупности изъ 10 точекъ на ребрахъ, символы коихъ представляются двумя 1-цами и 3-му нулями и 10 внутреннихъ точекъ, символы коихъ представляется тремя 1-цами и 2-мя нулями.

Чтобы не загромождать чертежа и все-таки сдѣлать ясною связь этихъ внутреннихъ точекъ съ вершинами соотвѣтственныхъ трехугольниковъ, мы изъ этихъ точекъ по направленію къ соотвѣтственнымъ вершинамъ проводимъ лучи небольшой длины, ясно отмѣчающіе соотвѣтственныя вершины. Поэтому всѣ такія точки отмѣчены символами изъ трехъ 1-цъ съ 2-мя нулями.

Каждыя четыре вершины пентатопа есть въ то же время и четыре вершины тетраэдра, въ которомъ, по только что объясненному, мы имѣемъ всѣ трехугольныя грани раздѣленными на 6 трехугольниковъ I періода. Соединяя въ каждомъ тетраэдрѣ (а число ихъ 5) двѣ среднія точки граней съ противолежащими вершинами, мы легко найдемъ, что эти двѣ

прямыя находятся въ одной плоскости и слѣдовательно пересѣкаются въ одной точкѣ—внутренней точкѣ тетраэдра.

Ради наглядности мы отмѣтили такія внутреннія точки простыми кружками. Ихъ символы, получающіеся суммированіемъ, будутъ заключать 4 единицы и одинъ нуль. Каждый же тетраэдръ однозначно опредѣляетъ линейную терцію.

Въ свою очередь, каждыя двѣ прямыя, соединяющія внутреннія точки линейной терціи (опредѣляемой самимъ тетраэдромъ) съ противолежащею вершиною пентатопа, находятся въ одной плоскости и пересѣкаются въ общей внутренней точкѣ пентатопа, одной единственной и наиболѣе замѣчательной точкѣ этой фигурѣ, выражаемой единственнымъ символомъ (11111). Ради наглядности, эта точка отмѣчена двумя концентрическими кругами.

Ея замѣчательныя свойства усматриваются изъ слѣдующаго.

Всего мы получили совокупность изъ 31 точки: 5 вершинъ, 10 точекъ на ребрахъ, 10 точекъ внутреннихъ относительно трехугольныхъ граней, 5 внутреннихъ точекъ тетраэдровъ (терцій) и наконецъ эта особая точка. Она всегда находится на одной прямой съ двумя точками той же совокупности, а именно точками противолежащими, а изъ послѣднихъ или 1) одна есть вершина, а другая—внутренняя точка тетраэдра, а сумма соотвѣтственныхъ чиселъ символовъ обѣихъ всегда равна 1-цѣ или 2) одна есть точка на ребрѣ, а другая на противолежащей грани, и опять сумма соотвѣтственныхъ чиселъ символовъ всегда равна 1-цѣ.

Такимъ образомъ о противоположеніи элементовъ пентатопа мы можемъ заключить какъ по числамъ, напр. (10000) а (01111), (11000) и (00111), такъ и по чертежу, проводя прямую чрезъ данную точку и внутреннюю точку пентатопа. Убѣдиться же, что эти три точки дѣйствительно находятся на одной прямой (линейной примѣ), мы можемъ посредствомъ векторовъ, что особенно просто, когда одинъ изъ векторовъ точечный.

Первую часть построенія мы можемъ произвести посредствомъ проведенія прямыхъ чрезъ начальныя точки, совершенно игнорируя конечныя точки векторовъ.

Но такъ какъ различіе между концевыми точками векторовъ не имѣетъ абсолютнаго характера, то совершенно аналогично мы можемъ произвести и второе построеніе, игнорируя начальные точки и проводя нужныя прямыя только чрезъ конечныя точки векторовъ. Это второе построеніе даетъ намъ совокупность (въ общемъ случаѣ также изъ 31) точекъ тѣхъ же символовъ.

Такимъ образомъ для каждаго вектора съ однимъ и тѣмъ же символомъ мы получимъ и начальную, и конечную точку, а этимъ всѣ векторы системы вполнѣ и опредѣлятся, что и требовалось.

Въ частности, для тѣхъ двухъ тетраэдровъ, которыя имѣютъ общее основаніе изъ трехъ точечныхъ векторовъ, а вершины выражаются векторами (00010) и (00001), всѣ элементы ихъ линейныхъ терцій есть векторы, соотвѣтственно параллельные упомянутымъ двумъ векторамъ.

Любопытно отмѣтить, что, производя построенія центровъ тяжести въ системѣ 4-ой (и высшихъ) ступени, мы вводимъ въ эту область начало механики, а слѣдовательно и физическія свойства вообще.

Въ заключеніе о пентатопѣ замѣтимъ, что при взятыхъ условіяхъ его построенія посредствомъ векторовъ существуютъ простыя соотношенія между направленіями и величинами векторовъ тѣхъ точекъ, для которыхъ они выставлены на чертежѣ.

Какъ уже отмѣчено, въ тѣхъ двухъ тетраэдрахъ, а слѣдовательно и ихъ среднихъ точкахъ (11110) и (11101), которые имѣютъ общимъ трехугольникъ изъ точечныхъ векторовъ, всѣ векторы соотвѣтственно параллельны, а именно въ первомъ параллельны вектору (00010), а во второмъ вектору (00001) Въ остальныхъ трехъ тетраэдрахъ ихъ среднія точки, съ противоположными вершинами, представляющими точечные векторы, составляютъ линейныя примы, въ составѣ которыхъ находится и средняя точка пентатопа (11111); поэтому во всѣхъ этихъ четырехъ точкахъ векторы параллельны, а конечныя, также какъ и начальныя, точки, соединенныя прямыми, сойдутся въ точкахъ, какъ точечныхъ векторахъ вершинъ общаго основного трехугольника двухъ первыхъ тетраэдровъ.

Имѣя пентатопъ, также можно построить векторъ по способу барицентрическихъ координатъ и символу этого вектора, какъ въ пространствѣ 3-хъ измѣреній это можно сдѣлать по данному тетраэдру и символу точки.

Теперь мы этимъ и займемся. Прежде всего замѣтимъ, что четырьмя векторами опредѣляется линейная терція, которая тоже можетъ быть выражена неполнымъ детерминантомъ съ рядами, представляющими числа символовъ данныхъ векторовъ

то есть $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}$ или проще (a_1, e_4).

Если векторъ $(a\ b\ c\ d\ e)$ принадлежитъ этой линейной терціи, то полный детерминантъ $\Delta'=(a, e_4)=0$.

Но этотъ детерминантъ мы можемъ представить въ формѣ $\Delta' = a\ (b_1,\ e_4) + b\ (c_1,\ a_4) + c\ (d_1,\ b_4) + + d\ (e_1,\ c_4) + e\ (a_1,\ d_4)$.

Детерминанты, выражаемые сокращенно въ этомъ равенствѣ, есть детерминанты полные, и ихъ численныя значенія легко опредѣляются; вотъ совокупность то такихъ чиселъ и можетъ быть принята за символъ линейной терціи. Напр. если возьмемъ линейную терцію, опредѣляемую четырьмя векторами

$$\begin{vmatrix} 10000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \end{vmatrix}$$

то получимъ въ качествѣ символа этой терціи (00001), и легко убѣдиться, что каждый изъ четырехъ взятыхъ векторовъ принадлежитъ этой терціи; напр. для перваго имѣемъ: $1.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 0.1 = 0$. Въ частности, каждый векторъ, имѣющій символъ $(a,\ b,\ c,\ d,\ 0)$ принадлежитъ этой терціи, потому что $a.0 + b.0 + c.0 + d.0 \pm 0.1 = 0$. Съ другой стороны это очевидно изъ того, что такой векторъ можетъ быть алгебраически выведенъ изъ упомянутыхъ четырехъ, а именно онъ получится, если числа первой строчки помножить на a, числа второй на b, числа третьей на c и числа четвертой на d а затѣмъ сложимъ ихъ соотвѣтственно.

Въ общемъ случаѣ, слѣдовательно, всякую линейную терцію мы можемъ выразить символомъ $\{A\ B\ C\ D\ E\}$ и если какой-нибудь векторъ $(a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1)$ входитъ въ ея составъ, то необходимо $Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 + Dd_1 + Ee_1 = 0$. Также если другой векторъ $(a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ e_2)$ входитъ въ ея составъ, то имѣемъ $Aa_2 + Bb_2 + Cc_2 + Dd_2 + Ee_2 = 0$ и т. д.; но ясно, что въ такомъ случаѣ, умноживъ первое равенство на произвольное число k, а на второе на число l и сложивъ въ суммѣ также получимъ нуль то есть $A\ (ka_1 + la_2) + B\ (kb_1 + lb_2) + C\ (kc_1 + lc_2) + D\ (kd_1 + ld_2) + E\ (ke_1 + le_2) = 0$ то есть что въ составъ этой терціи входятъ и всѣ векторы линейной примы, опредѣляемой двумя данными.

Составивъ аналогическое тождество изъ трехъ равенства, также получимъ, что въ составъ той же линейной терціи входятъ всѣ векторы линейной секунды, опредѣляемой тремя данными векторами.

При этихъ условіяхъ для символовъ тѣхъ пяти линейныхъ терцій, которыя ограничиваютъ пентатопъ, получимъ слѣдующіе символы:

$$\begin{vmatrix} 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00001 \end{vmatrix} = (10000); \quad \begin{vmatrix} 00100 \\ 00010 \\ 00001 \\ 10000 \end{vmatrix} = (01000); \quad \begin{vmatrix} 00010 \\ 00001 \\ 10000 \\ 01000 \end{vmatrix} = (00100)$$

и т. д.

Про всякій векторъ, характеризуемый символомъ $(a\ b\ c\ d\ e)$, гдѣ числа могутъ быть и отрицательными, мы можемъ сказать, что онъ принадлежитъ линейной примѣ, въ составъ которой, между прочимъ, входитъ два вектора: $(a\ b\ c\ d\ 0)$ и (00001), потому что числа даннаго вектора мы можемъ алгебраически воспроизвести изъ соотвѣтственныхъ чиселъ этихъ двухъ. Отсюда слѣдуетъ, что если мы построимъ векторъ $(a\ b\ c\ d\ 0)$ въ предѣлахъ терціи, имѣющей среднею точкою (11110) и соединимъ этотъ векторъ линейною примою съ векторомъ (00001), то данный принадлежитъ этой примѣ. Также, если въ предѣлахъ терціи, имѣющей среднюю точку (11101) мы построимъ векторъ $(abc\,0\,d)$ и соединимъ его линейною примою съ векторомъ (00010), то тотъ же векторъ принадлежитъ и этой примѣ. Слѣдовательно, искомый векторъ получится какъ пересѣченіе этихъ двухъ примъ.

Возьмемъ за примѣръ построенія вектора по даннымъ его произвольнымъ барицентрическимъ координатамъ векторъ (54321). Сначала замѣтимъ, что будетъ совершенно понятно (по символамъ), какія вершины пентатопа мы будемъ называть первою, второю и т. д.

Для рѣшенія задачи сначала найдемъ векторъ (54000) на ребрѣ 12 то есть проходящемъ чрезъ первую и вторую вершины. Эта точка найдется по отношенію ея разстояній къ этимъ точкамъ какъ 4:5; изъ нея проведемъ лучъ къ 3-ей вершинѣ и на немъ найдемъ точку (54300), отложивъ на лучѣ $^1/_4$ отрѣзка то есть такъ, чтобы разстоянія этой точки отъ двухъ другихъ были какъ $3:9\ (5+4) = 1\ 3$. Изъ полученной точки проведемъ прямыя начальныхъ точекъ къ 4-ой 5-ой вершинамъ. На первой найдемъ начальную точку (54320), отложивъ въ отношеніи разстояній $2:12\ (5+4+3) = 1:6$. На второй найдемъ начальную точку (54301), отложивъ въ отношеніи разстояній $1\ 12\ (5+4+3)$. Затѣмъ изъ первой точки проводимъ лучъ къ 5-ой, а изъ второй къ 4-ой вершинѣ, и точка ихъ пересѣченія есть начальная точка искомаго вектора.

Чтобы найти конечныя точки этого вектора, находимъ векторъ (54320), параллельный вектору (00010) и соединяемъ его конечную точку съ конечною точкою вектора 5-ой вершины; получаемъ одну прямую конечныхъ точекъ. Наконецъ находимъ векторъ (54301), параллельный вектору (00001), и его конечную точку соединяемъ прямою съ конечною точкою вектора 4-ой вершины; получаемъ вторую прямую конечныхъ точекъ векторовъ примъ, пересѣкающихся въ искомомъ векторѣ; точкою ихъ пересѣченія и опредѣляется его искомая конечная

точка, чѣмъ задача и завершается со всею своею простотою.

Принявъ единицы вѣса, приложенные въ вершинахъ пентатопа равными, мы такимъ же образомъ получимъ векторъ средней точки этой фигуры (11111). Въ той же послѣдовательности получимъ сначала посреди̇нѣ ребра (11000), затѣмъ по направленію къ (00100) отложимъ треть и найдемъ точку (11100), далѣе соединяемъ эту точку съ начальною точкою вектора (00010) и откладываемъ одну четверть, и получаемъ начальную точку (11110); наконецъ изъ этой точки проводимъ прямую къ начальной точкѣ вектора (00001) и откладываемъ одну пятую часть, и тогда получимъ начальную точку средняго вектора пентатопа.

Если, начиная съ точки (11100) будемъ поступать такъ же, принимая во вниманіе конечныя точки векторовъ двухъ послѣднихъ вершинъ пентатопа, то получимъ конечную точку средняго вектора пентатопа.

Этими построеніями раскрывается вся простота опредѣленія векторовъ по заданію.

Согласно только-что изложенному, операція построенія вектора по символу понятна и обратная операція нахожденія символа по данному вектору.

Пусть напр. данъ векторъ, отмѣченный символомъ (54321). Чтобы найти этотъ символъ, проведемъ чрезъ этотъ векторъ и векторъ (00001) линейную приму и опредѣлимъ въ ней начальную точку вектора, параллельную вектору (00010) то есть опредѣлимъ векторъ пересѣченія данной линейной примы съ терціей, имѣющій средній векторъ (11110). Найдя эту точку, опредѣлимъ отношеніе разстояній до нея данной начальной точки и точки вектора (00001). Такъ какъ это отношеніе равно 1 : 15, то если поставимъ въ символѣ на послѣднемъ мѣстѣ 1-цу, то сумма значеній первыхъ четырехъ чиселъ должна быть равна 14.

Затѣмъ составляемъ линейную приму изъ полученнаго вектора и параллельнаго ему вектора (00010); именно вслѣдствіе параллельности векторовъ въ этой примѣ окажется точечный векторъ то есть точка, находящаяся въ плоскости трехугольника съ первыми тремя вершинами политопа (плоскость чертежа). Отношеніе разстояній найденной начальной точки и точки (00010) отъ точечнаго вектора окажется какъ $1:7=2:14$. Наконецъ символъ точечнаго вектора получится непосредственно по правиламъ гномонической проекціи въ кристаллографіи какъ (54300). Отсюда уже легко опредѣлить, что послѣднія два числа должны быть 2 и 1.

Совершенно ясно, что примѣняемый здѣсь принципъ барицентрическихъ координатъ одинаково допускаетъ и примѣненіе отрицательныхъ чиселъ придаетъ имъ въ построеніи совершенно опредѣленное значеніе, извѣстное изъ элементарной теоріи центровъ тяжести. Напр. точка ($1\bar{1}000$) есть точка на той же прямой, что и (11000), но находится въ безконечности, потому что должно быть равно отношеніе разстояній къ ней изъ первой и второй вершинъ пентатопа, но дѣйствующія силы тяжести предполагаются обратными (пара силъ). Именно, благодаря извѣстности этого предмета изъ элементарныхъ курсовъ физики (и механики), дальше объ этомъ не распространяюсь.

Разсмотрѣніе этихъ примѣровъ показало намъ, что для конструктивныхъ цѣлей изложенныхъ выше теоремъ и соотношеній совершенно достаточно.

Однако я позволю себѣ остановиться еще на нѣкоторыхъ элементарныхъ свойствахъ этой системы, чтобы лучше оттѣнить связь проявляемыхъ здѣсь соотношеній съ тѣми, которыя разсматриваются въ элементахъ Новой Геометріи. Я спеціально остановлюсь на свойствахъ линейной секунды, совокупность векторовъ которыхъ можно разсматривать какъ двѣ плоскія гомологическія системы точекъ.

Въ каждой секундѣ какъ мы видѣли, имѣется центръ какъ, вообще, единственный точечный векторъ; имѣя его, намъ легко всю секунду разсматривать какъ линейную приму линейныхъ же примъ параллельныхъ точекъ гомологиченъ лучъ конечныхъ векторовъ, причемъ каждому лучу начальныхъ точекъ, составляющій съ нимъ опредѣленный уголъ.

Поэтому, въ частности, лучи линейной секунды составляютъ двѣ гомологичныя концентричныя линейныя примы лучей.

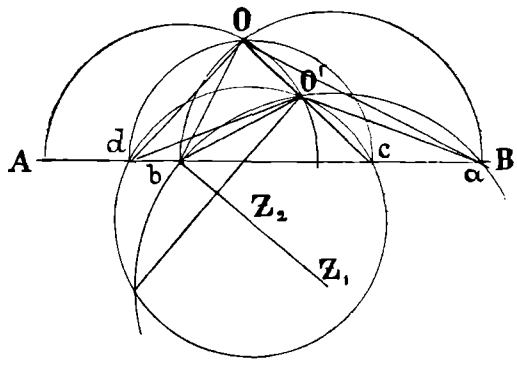
Если повернемъ одну изъ этихъ примъ напр. лучей конечныхъ точекъ такъ, чтобы два гомологичныхъ луча совпали другъ съ другомъ, а затѣмъ подвергнемъ ту же приму поступанію съ движеніемъ центра по этому совмѣщенному лучу, то обѣ примы придутъ въ перспективное положеніе то есть всѣ вообще гомологичные лучи пересѣкутся въ точкахъ на одной прямой—оси перспективы.

Пусть O центръ одной, O' центръ другой примы, сдвинутой по направленію совмѣщеннаго луча OO' (фиг. 17), а AB ось перспективы. Понятно, что углы между гомологичными лучами въ обѣихъ примахъ различны, и, въ частности лучамъ, образующимъ въ первой примѣ прямые углы, во второй будутъ гомологичны лучи, образующіе разные углы, но будетъ имѣться и пара такихъ лучей, образую-

щихъ прямой уголъ въ первой примѣ, которымъ гомологичны лучи, также образующіе прямой уголъ.

Легко найти такія пары особыхъ лучей.

Фиг.

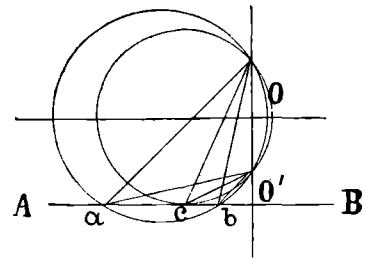


Пусть лучу Oa гомологиченъ $O'a$, а перпендикулярному лучу Ob гомологиченъ лучъ $O'b$, также лучу Oc гомологиченъ лучъ $O'c$, а перпендикулярному лучу Od гомологиченъ лучъ $O'd$; углы первой примы можно разсматривать какъ вписанные въ кругѣ и опирающіеся на діаметръ, а потому полная совокупность ихъ паръ опредѣляетъ приму круговъ, проходящихъ чрезъ пару постоянныхъ точекъ (O и ей симметричную по отношенію къ AB); соотвѣтственные углы другой примы также можно разсматривать какъ вписанные въ кругѣ, но не опирающіеся на діаметръ, и опять совокупность этихъ круговъ должна образовать линейную приму круговъ, для которыхъ O' одна изъ общихъ точекъ пересѣченія. Если Z_1 центръ перваго, а Z_2 центръ второго такого круга, то прямая Z_1Z_2 есть централь этой второй примы, а точка b пересѣченія ея съ централью AB первой примы и есть центръ общаго круга обѣихъ примъ, и значитъ этотъ общій кругъ проходитъ и чрезъ O, и чрезъ O', а концы его діаметра на AB даютъ точки, опредѣляющія тѣ двѣ искомыя пары лучей, въ которыхъ лучи образуютъ прямой уголъ.

Этимъ способомъ легко найти пары такихъ лучей; но разъ мы ихъ нашли, то можемъ измѣнить уголъ поворота второй примы такъ, чтобы OO', то есть совмѣщенный лучъ, сталъ однимъ изъ этихъ особыхъ лучей (фиг. 18); и тогда ось перспективы AB необходимо должна быть къ нему перпендикулярна, такъ какъ лучу изъ O, проведенному въ этомъ направленіи, гомологиченъ лучъ изъ O' ему параллельный, и значитъ оба пересѣкутся въ безконечно удаленной точкѣ того же направленія, которая должна принадлежать оси перспективы.

Пусть эта ось перспективы AB. Проведя чрезъ точки O и O' какой-нибудь кругъ, пересѣкающій ось перспективы въ двухъ точкахъ a и b, найдемъ двѣ пары гомологичныхъ лучей, причемъ оба гомологичные луча пары образуютъ равные углы, потому что $OaO' = ObO'$

Фиг. 18.



Если принять во вниманіе, что какъ въ направленіе OO', такъ и въ перпендикулярномъ, гомологичные лучи образуютъ уголъ, равный нулю, то значитъ есть еще особыя направленія, въ которыхъ разница въ углахъ гомологичныхъ лучей достигаетъ максимальной величины.

Нетрудно видѣть, что это направленіе Oc получится, если проведемъ кругъ примы, касательный оси перспективы въ точкѣ c; эта абсолютная наибольшая разница въ величинѣ гомологичныхъ угловъ выражается угломъ OcO' Конечно, тоже имѣетъ мѣсто и для направленія, симметричнаго съ Oc по отношенію къ OO'

Эти построенія раскрываютъ намъ связь между гомологичными лучами и образуемыми ими углами.

Прежде всего мы различаемъ два случая, смотря по тому, идутъ ли лучи въ согласной или противоположной послѣдовательности. Во второмъ случаѣ, на какой бы уголъ мы ни поворачивали одну изъ примъ, всегда найдутся два совпадающіе то есть двойные луча. Этотъ случай станетъ ясенъ изъ фиг. 18, если въ ней лучъ гомологичный съ даннымъ, напр. $O'a$ гомологичный съ Oa, замѣнимъ ему симметричнымъ по отношенію OO', и примемъ гомологичнымъ именно послѣдній. Въ этомъ случаѣ углы между гомологичными лучами измѣняются на всѣ возможные величины, начиная отъ нуля (для OO') до 180^0 (для перпендикулярныхъ), и если данъ уголъ между ними, то мы легко найдемъ оба луча, образующіе этотъ уголъ, также какъ наоборотъ, по данному лучу найдемъ уголъ, образуемый имъ съ гомологичнымъ лучомъ.

Поэтому, вообще, на какой бы мы уголъ ни повернули одну изъ примъ, мы этимъ всегда совмѣстимъ

одинъ изъ лучей съ лучомъ, ему гомологичнымъ, образующимъ тотъ же уголъ; но такъ какъ такихъ лучей два, то вообще всегда при этомъ совмѣстятся двѣ пары лучей, которые и образуютъ двойные лучи; при этомъ уголъ между двойными лучами, смотря по величинѣ угла поворота, можетъ имѣть всѣ значенія отъ нуля до прямого (тупые углы не считаемъ, такъ какъ, если углы не прямыя, то изъ двухъ одинъ острый, а другой тупой). Эти двойные лучи въ линейной секундѣ и названы ея вещественными осями. Поэтому эта гомологичность лучей относится именно къ секундамъ перваго разряда.

Въ частности, прямой уголъ между осями получится именно при положеніи примъ, показанномъ на фигурѣ. Если отъ этого положенія одну изъ примъ повернемъ на прямой уголъ, то, какъ извѣстно изъ элементовъ Новой Геометріи, обѣ примы окажутся въ положеніи инволюціи, то есть всѣ лучи примы раздѣлятся на пары, вдвойнѣ гомологичныя другъ другу то есть и какъ лучи, принадлежащіе одной, и какъ лучи, принадлежащіе другой примѣ. Въ этомъ замѣчательномъ случаѣ, какъ извѣстно, два двойные луча расположены симметрично относительно этихъ взаимно перпендикулярныхъ лучей, а уголъ между ними можетъ смотря по системамъ, измѣняться отъ 45^0 до нуля (точечная, по Штейнеру параболическая инволюція, когда всѣ лучи оной примы гомологичны одному и тому же лучу другой).

При всѣхъ остальныхъ относительныхъ положеніяхъ инволюціи не имѣется, а уголь между двойными лучами также можетъ сократиться до нуля, когда мы совмѣстимъ лучъ Oc съ лучомъ, симметричнымъ лучу $O'c$. Въ этомъ случаѣ также имѣемъ только одинъ двойной лучъ, а слѣдовательно, въ секундѣ, одну вещественную ось.

Теперь разсмотримъ первый случай то есть когда направленіе лучей согласно.

Въ томъ исходномъ положеніи, какое изображено на фигурѣ, мы также имѣемъ прямой уголъ между двойными лучами, и если будемъ поворачивать одну изъ примъ на разные углы вплоть до угла максимальнаго расхожденія лучей (все равно, въ ту или другую сторону), мы всегда получимъ два вещественныхъ двойныхъ луча, уголъ между которыми будетъ уменьшаться вплоть до нуля въ послѣднемъ предѣльномъ случаѣ, а потому въ этомъ особомъ случаѣ опять получимъ одну единственную вещественную ось секунды то есть двойной лучъ.

Но при поворотѣ одной изъ примъ на уголъ, большій, чѣмъ этотъ максимальный, какъ легко понять, уже ни одинъ изъ лучей одной примы не совмѣстится ни съ какимъ лучомъ другой то есть вещественныхъ двойныхъ лучей, а слѣдовательно и вещественныхъ осей секунды не имѣется.

Чтобы приложить на реальномъ примѣрѣ выводы, сдѣланные по отношенію къ линейнымъ секундамъ векторовъ то есть гомологичности двухъ системъ точекъ, разсмотримъ термическое расширеніе кристалловъ.

Законъ термическаго расширенія кристалловъ въ общемъ видѣ и самомъ сложномъ случаѣ разсмотрѣнъ въ „Курсѣ кристаллографій (XIII 18). Теперь же ограничимся расширеніемъ въ извѣстной плоскости напр. особой плоскости моноклиннаго кристалла.

Сначала выяснимъ себѣ сущность задачи.

Во первыхъ, термическое расширеніе относится къ тому случаю, когда направленіе лучей согласно. Въ этомъ случаѣ, смотря по относительной оріентировкѣ примъ лучей или 1) совпадаютъ два луча (при двухъ температурахъ), или 2) совпадаетъ только одинъ лучъ, или 3) не совпадаетъ ни одинъ лучъ. Но такъ какъ оріентировка этихъ примъ находится въ нашемъ усмотрѣніи, то эти случаи для характеристики явленія не играютъ роли. Единственный существенный признакъ, характеризующій явленіе есть уголъ между тѣми двумя лучами, которые послѣ расширенія образуютъ максимальный уголъ.

Какъ мы видѣли, для опредѣленія этихъ направленій слѣдуетъ предварительно опредѣлить тѣ два перпендикулярные луча, которымъ и послѣ расширенія гомологичны лучи перпендикулярные; зная ихъ, легко перейти и къ рѣшенію поставленной задачи.

Сначала зададимся выводомъ этихъ соотношеній въ самой общей формѣ.

Для этого вывода въ III этюдѣ по аналитической кристаллографіи даны соотвѣтственныя формулы. Первая формула (а именно 1-й главы I) выражаетъ связь координатъ обѣихъ системъ вообще:

$$\begin{aligned} f_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ f_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \qquad 1)$$

Вторая формула (8а главы I) выражаетъ измѣненіе угла луча, дѣлающаго съ осью абсциссъ первоначально уголъ φ, а послѣ расширенія уголъ φ':

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{a_{21} + a_{22}\operatorname{tang}\varphi}{a_{11} + a_{12}\operatorname{tang}\varphi} \qquad 2)$$

Пусть уголъ φ относится именно къ тому лучу, къ которому перпендикулярный лучъ гомологиченъ тоже лучу, перпендикулярному къ лучу, гомоло-

гичному данному, то есть характеризующемся угломъ φ'

Означивъ, для краткости, прямой уголъ чрезъ d, найдены:

$$tang\ (\varphi' + d) = \frac{a_{21} + a_{22}\ tang\ (\varphi + d)}{a_{11} + a_{12}\ tang\ (\varphi + d)}$$ то есть

$$cotg\ \varphi'_0 = -\frac{a_{21} - a_{22}\ cotg\ \varphi_0}{a_{11} - a_{12}\ cotg\ \varphi_0} \qquad 3)$$

Какъ два особые луча мы выдѣлили соотвѣтствующіе имъ углы особыми значками.

Теперь, если мы мысленно совмѣстимъ оба гомологичные перпендикулярные луча и примемъ ихъ направленія за оси координатъ, то достаточно имѣть еще одно соотвѣтствіе, чтобы окончательно рѣшить поставленную задачу.

Пусть при новой системѣ координатъ лучу, опредѣляемому угломъ α, гомологиченъ лучъ съ характернымъ угломъ α'. Тогда по свойству гомологичности примъ, совмѣщенныхъ въ прямоугольныхъ лучахъ, имѣемъ $tang\ \alpha' = k\ tang\ \alpha$ 4)
гдѣ k постоянное число.

Въ частности, при приведеніи примъ въ это положеніе, лучъ, совпадавшій съ осью абсциссъ для первоначальной системы придетъ въ положеніе, опредѣляемое угломъ $(-\varphi_0)$, а для измѣненной системы, въ положеніе, опредѣляемое угломъ $(-\varphi'_0)$.

Поэтому $k = \frac{tang\ \varphi_0'}{tang\ \varphi_0}$ 5)

Если теперь возьмемъ произвольный уголъ между двумя гомологичными лучами, то получимъ.

$$tang\ (\alpha' - \alpha) = \frac{tang\ \alpha' - tang\ \alpha}{1 + tang\ \alpha'\ tang\ \alpha} = \frac{tang\ \alpha\ (k-1)}{1 + k\ tang^2\ \alpha}. \qquad 6)$$

Чтобы получить максимальный уголъ отклоненія, нужно производную этого выраженія приравнять нулю,

и тогда найдемъ $tang^2\ \alpha = \frac{1}{k} = \frac{tang\ \varphi_0}{tang\ \varphi_0'}$ 7)

и этимъ все вычисленіе заканчивается. Какъ видимъ, вычисленія весьма просты, если даны коефиціенты уравненій проэктивности. Поэтому нужно показать еще, какъ найти эти коэфиціенты.

Когда изслѣдуютъ какой-нибудь кристаллъ на термическое расширеніе, то дѣло сводится къ опредѣленію его геометрическихъ константъ при разныхъ температурахъ. Согласно прежде принимавшимся константамъ, слѣдовательно опредѣляютъ для моноклинныхъ кристалловъ для каждой температуры величины осей a, c и уголъ β, принимая величину оси b за 1-цу. Если мы примемъ за совмѣщенный лучъ обѣихъ примъ и въ то же время за абсциссу ось a, то по этимъ даннымъ легко получимъ искомые коэфиціенты на основаніи равенствъ:

при $x_2 = 0$ также $x_2' = 0$, а потому $a_{21} = 0$ 8)
при этомъ, если $x_1 = a$, $x_1' = a'$, а потому

$$a_{11} = \frac{a'}{a} \qquad 9)$$

Если возьмемъ $x_1 = c\ cos\beta$, $x_2 = c\ sin\beta$, то $x_1' = c'cos\beta'$, $x_2' = c'sin\beta'$; поэтому $c'cos\beta' = a_{11}\ c\ cos\beta + a_{12}\ c\ sin\beta$

и $c'sin\beta' = a_{22}\ c\ sin\beta$;

слѣдовательно $a_{22} = \frac{c'\ sin\ \beta'}{c\ sin\ \beta}$

и $a_{12} = \frac{c'\ cos\ \beta'}{c\ sin\ \beta} - \frac{a'}{a}\ cotg\ \beta$ 10)

Эти формулы невполнѣ отвѣчаютъ дѣйствительности, такъ какъ по нимъ какъ бы предполагается, что по оси b никакого расширенія не происходитъ то есть длина ея отрѣзка при всѣхъ температурахъ сохраняется постоянною.

Однако эти данныя даютъ возможность опредѣлить положеніе особыхъ плоскостей изотропнаго расширенія кристалловъ (круговыхъ сѣченій термическаго эллипсоида), если мы въ особой плоскости опредѣлимъ тѣ два луча, по которымъ расширеніе одинаково съ особою осью b.

Такъ какъ по приводимымъ константамъ (при разныхъ температурахъ), величина отрѣзка по этой оси всегда предполагается равною 1-цѣ то есть какъ будто расширенія не происходитъ, то и въ самой особой плоскости нужно опредѣлить два такія направленія. Очевидно, что это возможно не для всѣхъ кристалловъ; и конечно, для тѣхъ, для которыхъ это невозможно, мы должны получить мнимыя рѣшенія.

Во всякомъ случаѣ выведемъ формулы для этого случая. Въ упомянутомъ III этюдѣ (глава I) дается формула 8b)

$$\frac{r'}{r} = \sqrt{(a_{11}\ cos\varphi + a_{12}\ sin\varphi)^2 + (a_{21}\ cos\varphi + a_{22}\ sin\varphi)^2}\ 11)$$

Для разсматриваемаго случая отношеніе первой части равенства должно равняться 1-цѣ, такимъ образомъ непосредственно получается квадратное уравненіе для опредѣленія угла φ по коэфиціентамъ уравненій проективности:

$tang^2\mu\ (a_{12}^2 + a_{22}^2 - 1) + 2\ tang\varphi\ (a_{11}\ a_{12} + a_{21}\ a_{22}) + a_{11}^2 + a_{21}^2 - 1 = 0$, и значитъ

$$tang\varphi = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - lm}}{m} \qquad 12)$$

гдѣ $k = (a_{11}\ a_{12} + a_{21}\ a_{22})$; $l = (a_{11}^2 + a_{21}^2 - 1)$; $m = (a_{12}^2 + a_{22}^2 - 1)$.

Произведемъ вычисленіе по этимъ формуламъ для ортоклаза (адуляра) по даннымъ Бекенкампа *), который даетъ слѣдующую табличку для этого минерала:

$t=20°$	$t=80°$	$t=140°$	$t=200°$
$a=0{,}658398$	0,658888	0,659367	0,659912
$c=0{,}555486$	0,555596	0,555657	0,555729
$\beta=63°59'4{,}5''$	$63°59'30{,}7''$	$64°0'3{,}6''$	$64°0'39{,}5''$

Принявъ за основаніе для вычисленій числа, относящіяся къ 20° и 200°, найдемъ: $a_{11}=0{,}0009975$, $a_{21}=0$, $a_{12}=0{,}510295$, $a_{22}=1{,}00066$, а отсюда вычисляемъ:

$k=0{,}511468$, $l=0{,}00460$, $m=0{,}26172$, почему

$$k^2-l\,.\,m=+0{,}260396,$$

и значитъ для даннаго случая получаемъ рѣшеніе не мнимое, а вещественное.

Окончательно получаемъ для μ два вещественныя значенія: 1)—0°15'30" и 2)—54°16'32½"

Сравнивая эти значенія съ діаграммою ортоклаза, видимъ, что первое рѣшеніе довольно близко (если принять его ровно за 0°0'0", то точно) къ той плоскости, которая чаще извѣстна подъ именемъ 3-го пинакоида, а при правильной установкѣ получаетъ символъ {110}.

Замѣчательно, что и второе рѣшеніе, хотя и весьма грубо, приближается къ одному изъ важныхъ раціональныхъ, и именно той грани x, которая иногда представляется какъ бы симметричною съ предъидущею гранью по отношенію къ вертикальной плоскости симметріи; эта форма при прежней установкѣ получала символъ $\{10\bar{1}\}$, но при правильной имѣетъ символъ {112}. Однако нельзя не отмѣтить, что это можетъ быть выражено лишь какъ продуктъ перваго, самого грубаго, приближенія, такъ какъ между этими гранями на кристаллѣ не 54°, а только около 50° Полученный результатъ при этомъ выраженіи получаетъ лишь нѣкоторую степень наглядности.

Теоретическая неполнота этого труда бросилась бы въ глаза, если бы пропущено было указаніе на то, что разсмотрѣнная система векторовъ допускаетъ расширеніе и на пространство. Однако при этомъ расширеніи мы встрѣчаемъ нѣкоторое усложненіе, а именно, что по двумъ даннымъ въ пространствѣ векторамъ и безъ всякихъ другихъ данныхъ мы дѣйствительно не въ состояніи опредѣлить линейной примы, какъ это имѣло мѣсто для плоскости.

*) Zeitschrift für Krystallographie V, 457.

Въ данномъ случаѣ не можетъ существовать такой кривой поверхности 2-го порядка (аналогично параболѣ для линейной примы на плоскости), которая однозначно опредѣляла бы всѣ векторы примы. Въ самомъ дѣлѣ, если бы такая существовала, и къ ней были бы касательны нетолько два данныя вектора, но обѣ прямыя—начальныхъ и конечныхъ точекъ, то оставалось бы изъ начальной точки провести касательную къ поверхности до пересѣченія съ прямою конечныхъ точекъ, чтобы получить искомый векторъ. Но такое опредѣленіе не было бы однозначнымъ; такая касательная прямая, совмѣстно съ прямою начальныхъ точекъ опредѣляла бы плоскость, которая вообще пересѣкла бы поверхность въ кривой 2-го порядка, и мы вообще получили бы не одну, а двѣ касательныхъ.

Поэтому для системы векторовъ въ пространствѣ необходимъ еще постоянный параметръ, и конечно проще всего за такой параметръ принять нѣкоторую постоянную точку Z или центръ системы.

Имѣя ее, мы дѣйствительно по каждому данному вектору однозначно опредѣляемъ плоскость, проходящую чрезъ эту точку, а такія двѣ плоскости пересѣкутся въ прямой ZA, проходящей чрезъ Z. Эта прямая и будетъ осью линейной примы плоскостей, которая перспективно установитъ гомологичность точекъ на обѣихъ прямыхъ—начальныхъ и конечныхъ точекъ, а совокупность прямыхъ (векторовъ) составитъ поверхность однополаго гиперболоида, принадлежа одной системѣ производящихъ, тогда какъ обѣ упомянутыя прямыя будутъ принадлежать другой системѣ производящихъ. Гиперболоидъ же безъ другихъ данныхъ, кромѣ двухъ векторовъ, опредѣленъ быть не можетъ.

Итакъ, пространственная система векторовъ имѣетъ постоянный центръ Z, который въ частномъ случаѣ можетъ находиться и въ безконечности.

Въ частномъ случаѣ мы можемъ опредѣлить линейную приму векторовъ, разлагая ихъ на слагающіе по тремъ осямъ координатъ. Тогда система произвольныхъ векторовъ раздѣлится на три системы параллельныхъ, а, задавшись нѣкоторою точкою на прямой начальныхъ точекъ, легко найдемъ всѣ три слагающіе вектора въ этой точкѣ, а слѣдовательно и искомый равнодѣйствующій векторъ.

Чтобы показать, что такое опредѣленіе линейной примы не отличается по существу отъ сдѣланнаго выше, болѣе общаго опредѣленія, и есть только частное его видоизмѣненіе, разсмотримъ сначала линейную приму векторовъ, опредѣляемую двумя векторами съ общею начальною точкою, и примемъ для построенія три опредѣленныя оси координатъ.

Если общая начальная точка O, а двѣ конечныя точки данныхъ векторовъ α и β, то прямая конечныхъ точекъ есть $\alpha\beta$, а ею и точкою O опредѣляется плоскость $O\alpha\beta$.

Это построеніе въ предѣлахъ данной примы мы можемъ повторить при любой начальной точкѣ, и всѣ полученные векторы будутъ равны и параллельны, и такимъ образомъ легко получимъ для двухъ векторовъ двѣ плоскости, параллельныя $O\alpha\beta$ то есть пересѣкающіяся въ безконечно удаленной прямой.

Съ этой точки зрѣнія линейная прима опредѣляется обѣими прямыми—начальныхъ и конечныхъ точекъ, и еще безконечно удаленною прямою.

Если въ примѣ двухъ независимыхъ векторовъ $a\alpha$ и $b\beta$ мы возьмемъ еще третій $c\gamma$, то для пары векторовъ $a\alpha$ и $c\gamma$ получимъ линейную приму, опредѣляемую прямою ac начальныхъ и прямою a_γ конечныхъ точекъ, и еще безконечно удаленную прямую. Эти двѣ безконечно удаленныя прямыя, какъ таковыя, пересѣкутся въ одной безконечно удаленной точкѣ; а если подвергнемъ всю систему коллинеарному преобразованію, то эта точка получитъ опредѣленное положеніе въ пространствѣ, и ея значеніе и есть какъ разъ значеніе центра системы Z, которымъ, по выше сказанному, опредѣлялась вся система векторовъ.

Итакъ, опредѣленіе системы векторовъ въ пространствѣ при посредствѣ нѣкоторыхъ осей координатъ и разложенія по нимъ векторовъ на слагающіе дѣйствительно лишь частный и простой случай болѣе общаго опредѣленія съ допущеніемъ въ системѣ существованія особаго центра, а именно тотъ, когда этотъ центръ находится въ безконечности.

Въ изложеніи, приведенномъ выше, заключается построеніе всѣхъ линейныхъ совокупностей системы векторовъ.

Для того, чтобы вполнѣ обосновать какую-нибудь геометрическую систему, необходимо, какъ извѣстно [1]), дать еще построенія коллинеаціи и сферическихъ совокупностей. Тогда непосредственно выводятся всѣ квадратичныя, а слѣдовательно и всѣ совокупности третьяго и высшаго порядка.

Для построеній коллинеаціи достаточно на любой линейной примѣ вывести четыре гармоническіе элемента то есть рѣшить задачу, опредѣлить по произвольно даннымъ на примѣ тремъ элементамъ четвертый гармоническій.

Въ данной системѣ эта задача рѣшается почти непосредственно.

Въ самомъ дѣлѣ, въ линейной примѣ векторовъ, какъ мы видѣли выше, точки на прямой начальныхъ гомологичны съ точками на прямой конечныхъ точекъ векторовъ. Если бы тѣ же прямыя мы приняли за линейныя примы точекъ обыкновенной геометріи точекъ (геометріи древнихъ), то могли бы установить согласіе [2]) между тѣми и другими элементами то есть между точками и векторами, а потому четыре гармоническія точки прямой начальныхъ (или конечныхъ) точекъ были бы въ то же время начальными точками четырехъ гармоническихъ векторовъ, и все равно, взяли ли бы мы три произвольныя начальныя, или соотвѣтственныя три конечныя точки нѣкоторыхъ трехъ произвольныхъ векторовъ на линейной примѣ, всегда получился бы въ качествѣ четвертаго гармоническаго одинъ и тотъ же векторъ этой примы.

Такимъ образомъ, для коллинеарнаго преобразованія въ этой системѣ намъ достаточно взять линейную терцію, которую мы назовемъ терціей коллинеаціи (перспективы) и еще одинъ векторъ O, не принадлежащей этой терціи. Тогда всякій векторъ A коллинеарно преобразуется въ векторъ A' если проведемъ линейную приму OA, найдемъ векторъ O' пересѣченія этой примы съ терціей коллинеаціи, а въ этой примѣ опредѣлимъ четвертый гармоническій векторъ A', сопряженный съ векторомъ A.

При такомъ преобразованіи линейныя совокупности преобразуются въ линейныя же, а совокупности сферическія—въ квадратичныя, какъ и вообще всякія нетолько сферическія, но и квадратичныя совокупности. Также совокупности третьяго порядка преобразуются также въ совокупности третьяго же порядка и т. д.

Только-что упомянутое согласіе между точками начальныхъ (или конечныхъ) прямыхъ линейной примы векторовъ и самими векторами этой примы даетъ въ руки простое средство опредѣлить и сферическія совокупности этой системы.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ три точки одной плоскости однозначно опредѣляютъ въ ней кругъ то есть простѣйшую сферическую совокупности, такъ три начальныя точки векторовъ одной линейной секунды опредѣляютъ сфероприму (раньше я называлъ циклъ) векторовъ въ этой секундѣ; этою сферопримою будетъ именно совокупность векторовъ этой секунды, начальныя точки которой составляютъ кругъ.

Я здѣсь подчеркиваю слово „начальныя„ точки.

---

[1]) Записки Горнаго Института I, 147.

[2]) Новая геометрія какъ основа черченія IV, 23.

Конечно, та совокупность векторовъ секунды, коей конечныя точки образуютъ кругъ, есть также сфероприма, но эта будетъ именно та, для которой за начальныя приняты прежнія конечныя точки векторовъ то есть циклъ совсѣмъ другихъ векторовъ и совсѣмъ другой линейной секунды, а именно той, у которой всѣ вообще начальныя точки есть тѣ, которыя были конечными, а конечныя—начальными точками прежней линейной секунды.

Что это именно есть сфероприма, видно изъ того, что 1) совокупность векторовъ принадлежитъ одной линейной секундѣ, 2) тремя произвольно взятыми изъ нихъ дѣйствительно однозначно опредѣляется вся совокупность.

Такъ какъ вообще совокупность начальныхъ (и конечныхъ) точекъ векторовъ линейной секунды обнимаетъ всѣ точки плоскости, и по характеристичнымъ для секунды даннымъ, легко найдемъ конечную точку всякаго вектора съ данною начальною точкою, то этимъ вполнѣ опредѣляется и совокупность конечныхъ точекъ векторовъ сферопримы; эта совокупность есть, какъ мы видѣли, эллипсъ, такъ какъ для самой характеристики линейной секунды мы пользовались (стр. 221) особою сферопримою.

Но можно взглянуть и съ другой точки зрѣнія. Совокупность векторовъ линейной секунды мы разсматривали какъ двѣ гомологичныя системы точекъ на плоскости. Но, какъ извѣстно [1]), гомологичность между двумя системами точекъ на плоскости устанавливается четырьмя гомологичными парами точекъ.

Съ перваго раза представляется, что тремя данными векторами дается гомологичность лишь трехъ паръ точекъ, а именно начальныхъ и конечныхъ точекъ векторовъ. Но если припять во вниманіе, что именно тремя векторами опредѣляется линейная секунда, а слѣдовательно и ея центръ (стр. 222), а этотъ центръ есть точечный векторъ то есть само гомологичная точка обѣихъ системъ, то ясно, что для опредѣленія этой гомологичности мы дѣйствительно имѣемъ четыре пары точекъ.

Но можно взглянуть на дѣло еще съ одной точки зрѣнія, допускающей широкое обобщеніе и приводящей насъ къ построенію сферическихъ образованій высшей ступени—сферотерцій.

Возьмемъ въ линейной секундѣ какую-нибудь сфероприму напр. ту, которою мы характеризовали самое секунду, опредѣляемую тѣми тремя векторами, по которымъ мы желаемъ составить сфероприму, и примемъ ее за приму реципрочнаго преобразованія всѣхъ векторовъ данной секунды. Это значитъ, что по данному произвольному вектору и центру сферопримы какъ точечному вектору секунды (беремъ для простоты частный случай) сначала составимъ линейную приму (конечно, въ этомъ частномъ случаѣ это будетъ прима параллельныхъ векторовъ) и найдемъ два вектора ея пересѣченія со взятою сферопримою, (что необходимо должно имѣть мѣсто, такъ какъ и преобразуемый векторъ и всѣ векторы сферопримы принадлежатъ одной и той же линейной секундѣ), затѣмъ опредѣляемъ четвертый гармоническій векторъ, сопряженный данному; это и будетъ реципрочно преобразованный векторъ.

Ясно, что если подвергнемъ такому преобразованію какую-угодно линейную приму, входящую въ составъ данной линейной секунды, то получимъ, какъ результатъ преобразованія, сфероприму, принадлежащую той же секундѣ. Въ частности, преобразованіе начальныхъ точекъ векторовъ въ этомъ случаѣ есть обыкновенное реципрочное преобразованіе элементовъ Новой Геометріи, и значитъ во всякой, полученной такимъ образомъ, сферопримѣ, совокупность начальныхъ точекъ есть кругъ (а конечныхъ точекъ—эллипсъ).

Какъ упомянуто, это разсужденіе мы можемъ обобщить въ высокой мѣрѣ и получитъ изъ линейной терціи сферосекунду (прежде я называлъ сферою) векторовъ. Для этого достаточно взять произвольную сферосекунду, входящую вообще въ составъ системы векторовъ, и конечно проще всего сферосекунду параллельныхъ векторовъ, свойства которой уже изучены съ достаточною подробностью [1]).

Такъ какъ разсматриваемая теперь система есть система на плоскости, то сферосекунду нужно взять того вида, который отмѣченъ терминомъ мегациклъ [2]).

Тогда по вектору, составляющему центръ этой сферосекунды и любому данному вектору составимъ линейную приму и найдемъ два вектора пересѣченія этой примы, а четвертый гармоническій векторъ этой примы, сопряженный данному вектору и есть викторъ реципрочно преобразованный. При этомъ любая линейная прима реципрочно преобразуется въ сфероприму а линейная секунда въ сферосекунду.

Наивысшимъ обобщеніемъ въ данномъ случаѣ будетъ преобразованіе линейныхъ терцій въ сферотерціи (прежде я называлъ мегасферами). Для

---

[1]) Новая геометрія II 24.

[1]) Записки Горнаго Института I. 137.

[2]) Тамъ же 112.

этого преобразованія необходимо взять какую-нибудь сферотерцію же и принять ее за преобразующую совокупность.

Проще всего было бы взять сферотерцію параллельныхъ векторовъ; но такъ какъ таковой на плоскости взять нельзя, такъ какъ для нея сферотерція параллельныхъ векторовъ есть полная совокупность, то возьмемъ ту особую сферотерцію, которая получится изъ мегацикла [1]), если въ немъ при каждой начальной точкѣ данный векторъ одного направленія замѣнимъ совокупностью равныхъ ему векторовъ всѣхъ направленій (и значитъ совокупность конечныхъ точекъ, соотвѣтствующихъ каждой начальной, образуетъ кругъ).

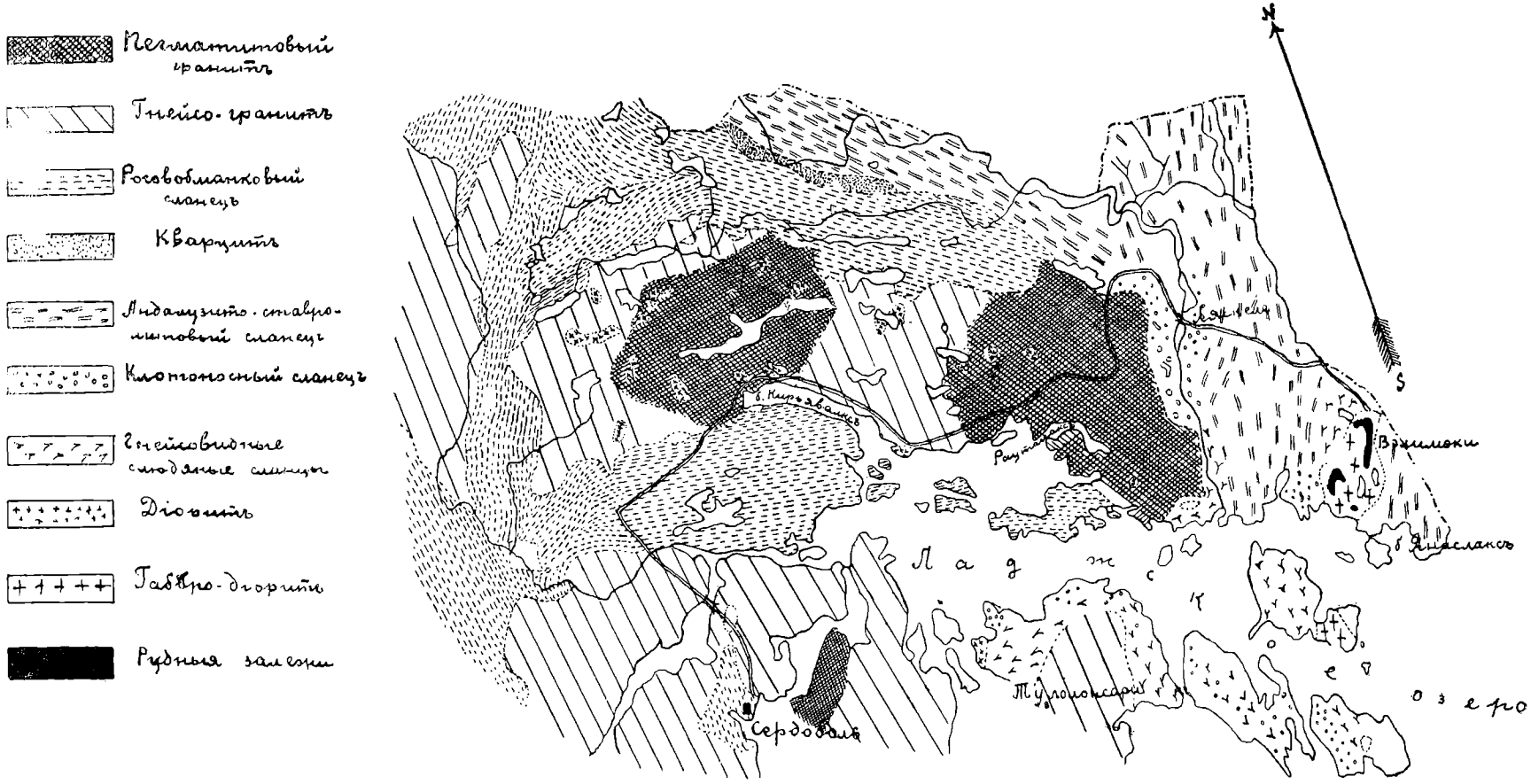
Что взятая совокупность есть дѣйствительно сферотерція, видно изъ того, что сѣченія ея всѣми терціями параллельныхъ векторовъ дѣйствительно есть сферосекунды (мегациклы).

1) Зап. Г. И. I 137.

Итакъ, по одной сферотерціи реципрочнымъ преобразованіемъ получаемъ изъ каждой данной линейной терціи сферотерцію, также какъ изъ линейной секунды сферосекунду, а изъ линейной примы сфероприму.

Каждая сферотерція (также какъ, общнѣе, и всякая конотерція, получаемая изъ нея коллинеарнымъ преобразованіемъ) можетъ служить для установленія особыхъ коррелятивныхъ соотношеній между векторами и ихъ полярными терціями (линейными), также какъ между линейными примами и полярными секундами (линейными); но объ этомъ не распространяюсь, такъ какъ это одинаково относится ко всѣмъ системамъ 4-й ступени и достаточно обстоятельно разсмотрѣно для системъ шаровъ и параллельныхъ векторовъ [2]).

2) Тамъ же 138 и с.


Пегматитовый гранитъ
Гнейсо-гранитъ
Роговобманковый сланецъ
Кварцитъ
Андалузито-ставролитовый сланецъ
Кианитоносный сланецъ
Гнейсовидные слюдяные сланцы
Діоритъ
Габбро-діоритъ
Рудныя залежи
N
S
Л а д ж с к о е о з е р о
Врхимоки
Сердобскъ