III. Е. С. Федоровъ. Тетраэдрическая геометрическая сѣть и ея развитіе по пяти точкамъ.

Нѣтъ ничего естественнѣе, какъ обобщить выводы предъидущей замѣтки, относящейся къ трехзначнымъ числамъ или трехугольной геометрической сѣти на числа болѣе высокой значности и прежде всего на числа четырехзначныя, причемъ получается сѣть тетраэдрическая.

Такъ какъ эта сѣть чиселъ нашла свое примѣненіе для химическаго тетраэдра въ петрографіи, то такое обобщеніе представляется желательнымъ и въ смыслѣ непосредственныхъ приложеній.

Вдумываясь въ математическія основанія построенія трехугольной сѣти, мы сейчасъ найдемъ, что основныя теоремы остаются справедливыми и для этой сѣти при соотвѣтственномъ усложненіи самихъ построеній. Это усложненіе состоитъ въ томъ, что полное число точекъ, связанныхъ съ однимъ элементарнымъ тетраэдромъ (точнѣе сфеноидомъ) какого-либо періода уже не 7 (3+3+1), а 15: четыре при вершинахъ, шесть среднихъ точекъ реберъ, четыре среднихъ точекъ граней и одна средняя точка самого тетраэдра).

Послѣдняя связываетъ попарно всѣ эти точки то есть всего семь паръ и выражается символомъ, числа котораго есть суммы соотвѣтственныхъ чиселъ символовъ каждой пары точекъ. Но также и среднія точки на ребрахъ выражаются символами съ числами, представляющимъ суммы паръ чиселъ при вершинахъ, а среднія точки граней выражаются числами, суммирующими числа символовъ при соотвѣтственныхъ трехъ вершинахъ.

Для исходнаго тетраэдра детерминантъ изъ чиселъ его вершинъ $\begin{vmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 0010 \\ 0001 \end{vmatrix}$ равенъ 1-цѣ, а потому детерминанты какого угодно элементарнаго тетраэдра сѣти, какъ составленные изъ этихъ чиселъ по опредѣленному закону, при которомъ величина детерминанта не измѣняется, также равны 1-цѣ, что и является признакомъ элементарности тетраэдра.

На основаніи того же закона составленія чиселъ мы выводимъ признакъ принадлежности всякихъ данныхъ четырехъ чиселъ къ опредѣленному періоду, а именно: если даны числа $(a\ b\ c\ d)$, то расположивъ ихъ такъ, чтобы на первомъ мѣстѣ стояло наибольшее, затѣмъ второе по величинѣ, а на послѣднемъ мѣстѣ самое малое число то есть чтобы $a>b>c>d$, составляемъ другія числа $(a-b,\ b-c,\ c-d,\ d)$, которыя отнесутся къ періоду на 1-ду низшему.

Напр. числа (9521) мы отнесемъ къ IV періоду, такъ какъ изъ нихъ выводимъ (4311), которыя отнесутся къ III періоду, затѣмъ (1211) ко II періоду, а отъ нихъ перейдемъ къ числамъ (1001) исходнаго тетраэдра то есть I періода. Можемъ напр. прямо вывести абсолютно наибольшія числа IV періода, а именно въ послѣдовательности: I (1111), II (4321), III (10. 9. 7. 4), IV (30. 26. 19. 10). Уже для V абсолютно наибольшими числами будутъ (85. 75. 56. 30). По смыслу символовъ точекъ элементарныхъ тетраэдровъ всѣ такія числа будутъ взаимно простыя то есть не имѣть ни одного общаго для всѣхъ четырехъ, цѣлаго множителя (кромѣ 1-цы).

Но, въ отличіе отъ трехугольной сѣти, тетраэдрическая уже не можетъ быть опредѣлена четырьмя точками, а требуетъ пять. За таковыя мы можемъ принять вершины двухъ смежныхъ тетраэдровъ, имѣющихъ общую трехугольную грань напр. abc. Пусть четвертая вершина элементарнаго тетраэдра, подлежащаго дальнѣйшему развитію, есть d. Легко видѣть, какую еще нужно имѣть точку, чтобы сѣть опредѣлилась простѣйшимъ образомъ.

Такъ какъ средняя точка грани abc (еще неизвѣстная) имѣетъ символъ $(a+b+c)$, то ясно, что если опредѣлимъ точку $(a+b+c-d)$, и соединимъ эту точку прямою съ точкою d, то точка пересѣченія этой прямой съ гранью (abc) и есть точка $(a+b+c)$. Этого уже достаточно для дальнѣйшаго развитія сѣти.

Имѣя среднюю точку $(a+b+c)$ грани, легко найдемъ среднія точки реберъ этой грани то есть точки $(a+b)$, $(a+c)$, $(b+c)$. Прямая, соединяющая $(a+b+c-d)$ съ $(b+c)$ пересѣчетъ прямую ad въ точкѣ $(-a+d)$, а прямыя, соединяющія $(a+b+c-d)$ съ a и $(b+c)$ съ d пересѣкутся въ точкѣ $(b+c-d)$. Прямыя, соединяющія a съ $(b+c)$ и $(-a+d)$ съ $(b+c-d)$ пересѣкутся въ точкѣ $(-a+b+c)$, а прямыя, соединяющія $(a+b+c-d)$ съ $(-a+d)$ и $(-a+b+c)$ съ d пересѣкутся въ точкѣ $(-a+b+c+d)$. Наконецъ эта послѣдняя точка и точка a опредѣляетъ прямую, которая съ прямою, соединяющею $(a+b+c-d)$ съ d опредѣлитъ среднюю точку тетраэдра $(a+b+c+d)$.

Имѣя послѣднюю, мы легко получимъ всѣ остальныя точки тетраэдра, проводя чрезъ нее и вершины прямыя до пересѣченія съ противоположными гранями, на которыхъ эти прямыя опредѣлятъ среднія точки граней, а слѣдовательно и всѣ вообще точки этихъ трехугольниковъ. Также и прямыя, соединяющія среднія точки противоположныхъ реберъ тетраэдра, пройдутъ чрезъ ту же среднюю точку напр. прямая, соединяющая $(a+d)$ съ $(b+c)$, потому это $(a+d)+(b+c)=(a+b+c+d)$.

Легко доказать и здѣсь, что изъ 15-ти точекъ тетраэдра никакія двѣ не могутъ быть представлены символами съ одинаковою послѣдовательностью четныхъ и не-

четныхъ чиселъ. Поэтому въ каждомъ элементарномъ тетраэдрѣ сѣти должны быть представлены всѣ вообще возможныя послѣдовательности четырехъ чиселъ то есть:

1) (*нччч*), 2) (*чнчч*), 3) (*ччнч*), 4) (*чччн*), 5) (*чннн*), 6) (*нчнн*),
7) (*ннчн*), 8) (*ннчч*), 9) (*ччнн*), 10) (*ннчч*), 11) (*чнчн*), 12) (*нчнч*),
13) (*чннч*), 14) (*нччн*), 15) (*нннн*).

Итакъ, изъ 15 символовъ каждаго элементарнаго тетраэдра геометрической сѣти, 4 заключаютъ одно, 4 заключаютъ три, 6 заключаютъ два и лишь одинъ символъ заключаетъ четыре не четныя числа.

Эти, можно сказать простейшія, числовыя отношенія легко могутъ быть распространены на символы большей многозначности, такъ какъ здѣсь рѣчь идетъ исключительно о позиціонныхъ геометрическихъ построеніяхъ.

Ограничимся хотя бы приложеніемъ ихъ къ геометріи четырехъ измѣненій (въ частности каждой изъ геометрическихъ системъ четвертой ступени).

Для опредѣленія простѣйшей замкнутой формы въ ней имѣемъ 5 точекъ *abcde* [1]).

Чрезъ каждыя четыре изъ нихъ можемъ провести линейную терцію, и таковыхъ будетъ $\frac{5.4.3.2}{1\,2.3.4}=5$. Въ одной точкѣ, то есть вершинѣ, сходится четыре терціи, а пятую можемъ назвать противолежащею. Эти 5 терцій пересѣкаются въ $\frac{5.4}{1.2}=10$ плоскостяхъ, и въ каждой изъ нихъ опредѣляется тетраэдръ, каждая плоскость котораго есть плоскость пересѣченія двухъ терцій. Число реберъ формы опредѣляется пересѣченіемъ терцій, взятыхъ по три то есть $\frac{5.4.3}{1.2.3}=10$.

Если обозначимъ 5 вершинъ исходной формы символами 1) (10000), 2) (01000), 3) (00100), 4) (00010) 5) (00001), а нѣкоторую произвольную точку внутри ее примемъ за ея среднюю точку, то есть придадимъ ей символъ (11111), то среднія точки противолежащихъ терцій то есть тетраэдровъ соотвѣтственно получатъ символы 1) (01111), 2) (10111)... Что же касается символовъ среднихъ точекъ граней и реберъ тетраэдровъ, то ихъ символы непосредственно вытекаютъ изъ предыдущаго, причемъ среднія точки граней вообще выразятся числами изъ трехъ 1—цъ и двухъ нулей а среднія точки реберъ изъ двухъ 1—цъ и трехъ нулей.

И здѣсь детерминантъ изъ чиселъ, соотвѣтствующихъ символамъ вершины исходной формы, равевъ 1—цѣ, почему это свойство переносится на всѣ элементарныя формы сѣти.

Въ этомъ случаѣ, кромѣ противолежащей вершины и терціи, имѣемъ и противолежащія грани и ребра, среднія точки которыхъ находятся на данной прямой (линейной примѣ) со среднею точкою формы напр. (11100)+ +(00011)=(11111).

Также и здѣсь никакія двѣ точки одной элементарной фигуры не могутъ имѣть одинаковую послѣдовательность нечетныхъ и четныхъ чиселъ, а потому изъ 31 точки этой фигуры во всѣхъ расположенія этихъ чиселъ различны, а именно:

1) (*ннннн*), 2) (*чнннн*), 3) (*ччнчч*), 4) (*ччччн*), 5) (*чччнч*), 6) (*чннчч*), 7) (*нчччн*),
8) (*нчччч*), 9) (*ннчнн*), 10) (*ннннч*), 11) (*ннччч*), 12) (*ннчнч*), 13) (*ннччн*), 14) (*нчччч*),
15) (*нчччн*), 16) (*нчччч*), 17) (*чнччч*), 18) (*чнчнн*), 19) (*чнчнч*), 20) (*чччнн*), 21) (*ччччч*)
22) (*ччччн*), 23) (*ччччч*), 24) (*чнччн*), 25) (*чнчнч*), 26) (*чннчч*), 27) (*нчччч*).
28) (*нчччч*), 29) (*нчччч*), 30) (*нчччч*), 31) (*ннннн*).

Понятно, что и здѣсь легко, по общему пріему, найдемъ величину періода для каждаго числа, какъ символъ нѣкоторой вершины элементарной формы напр. число (11.9.6.5.1) есть число III періода, такъ какъ изъ него выводимъ число (23141) II періода, а изъ него (11101) I періода. Абсолютно наибольшее число III періода получится въ слѣдующемъ порядкѣ: I (11111), II (54321), III (15.14.12.9.5).

Съ почти механическою легкостью мы можемъ сдѣлать соотвѣтственные выводы и для системъ еще болѣе высокой ступени.

27 декабря 1908 г.

[1]) Точное изображеніе этой формы и всѣхъ ея подраздѣленій I періода будетъ приведено въ качествѣ примѣра въ статьѣ „Простое и точное изображеніе точекъ пространства 4-хъ измѣреній на плоскости посредствомъ векторовъ“.