П. Е. С. Федоровъ. Одинъ изъ существенныхъ числовыхъ законовъ геометрической сѣти развитія формъ.

Понятіе геометрической сѣти развитія формъ введено и положено въ основу различныхъ приложеній кристаллографіи въ первой же статьѣ серіи „Beiträge far fono en Krystallographie“ *).

Въ основѣ сѣти (для кристалловъ кубическаго типа), которую можно представлять себѣ какъ послѣдовательно развивающуюся гномоническую проекцію формъ кристаллографическаго комплекса, находится четыре трехугольника, вершины которыхъ выражаются числами (100), (010), (001), а средняя точка числами (111) съ различными знаками индексовъ; каждый изъ трехугольниковъ распадается на шесть, эти снова каждый на шесть и т. д., причемъ всегда числа на сторонахъ есть суммы чиселъ на вершинахъ сторонъ, а числа среднихъ точекъ есть сумма чиселъ всѣхъ трехъ вершинъ.

Впослѣдствіи, а именно въ шестой статьѣ той же серіи *), была установлена еще сѣть для гипогексагональнаго типа и вмѣстѣ съ тѣмъ показано, что числовой законъ развитія формъ и для этой сѣти существенно тотъ же, хотя теперь грани выражаются символами не изъ трехъ, а изъ четырехъ чиселъ; изъ этихъ четырехъ всегда можно выбрать три, въ томъ числѣ необходимо и первое число, которые будутъ совершенно тождественны съ числами первой сѣти. Но даже, если мы не будемъ дѣлать такого подбора, а ограничимся тремя числами, изъ которыхъ одно, стоящее на первомъ мѣстѣ, а два другія выберемъ по произвольному условію (то есть второе съ третьимъ, или второе съ четвертымъ, или наконецъ третье съ четвертымъ), то законъ, о которомъ здѣсь идетъ рѣчь, все-таки останется справедливъ.

Первоначально я и не подозрѣвалъ особаго значенія въ распредѣленіи четныхъ и нечетныхъ чиселъ. Это значеніе выяснилось при дальнѣйшемъ развитіи теоріи структуры кристалловъ кубическаго типа, и законъ, о коемъ я веду рѣчь, именно и относится къ этому распредѣленію, почему находитъ свое существенное приложеніе для кристалловъ кубическаго типа, когда преслѣдуется задача опредѣленія структуры этихъ кристалловъ.

Онъ состоитъ въ томъ, что изъ семи символовъ, относящихся къ какому-угодно элементарному трехугольнику сѣти, одинъ непремѣнно заключаетъ три (то есть всѣ), три заключаютъ два и три заключаютъ одно нечетное число; всѣ остальныя числа символовъ четныя.

Это совершенно очевидно для исходнаго трехугольника, точки котораго выражаются символами 1) (111), 2) (011), 3) (101), 4) (110), 5) (100), 6) (010), 7) (001).

Теперь предстоитъ доказать, что это имѣетъ мѣсто и для всѣхъ элементарныхъ трехугольниковъ сѣти.

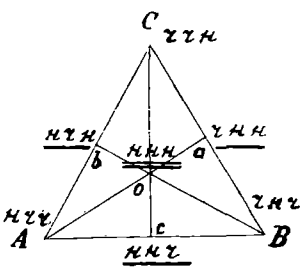
Мы очевидно получимъ это доказательство, если переберемъ всѣ возможныя комбинаціи четныхъ и нечетныхъ чиселъ въ какомъ-либо трехугольникѣ, принимая во вниманіе, что 1) ни въ одномъ символѣ не можетъ имѣться трехъ четныхъ чиселъ и 2) что въ произвольномъ, принятомъ для дальнѣйшаго развитія формъ, трехугольникѣ этотъ законъ соблюденъ то есть докажемъ, что если онъ соблюденъ въ исходномъ, то имѣетъ мѣсто и для всѣхъ выводныхъ трехугольниковъ.

Означимъ вершины трехугольника буквами A, B, C, средніе точки противоположныхъ сторонъ соотвѣтственно буквами a, b, c, а среднюю точку трехугольника буквою o, то есть въ символахъ $a = B + C$, $b = C + A$, $c = A + B$ $o = A + B + C$.

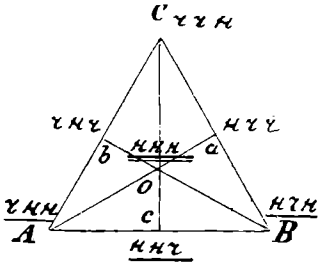
Ясно, что всѣ возможныя комбинаціи чиселъ сведутся къ тремъ категоріямъ: или 1) три нечетныя числа относятся къ o, или 2) они относятся къ A (все равно также B или C), или 3) они относятся къ a (все равно также къ b или c).

Первая категорія комбинацій: $o = (н.н.н)$.

Сначала примемъ $C = (ччн)$ (ясно, что порядокъ четныхъ и нечетныхъ чиселъ не имѣетъ значенія); въ такомъ случаѣ $c = (ннч)$, и на сторонѣ c для обѣихъ точекъ A и B на третьемъ мѣстѣ должны поставить или 1) $ч$, или 2) $н$.

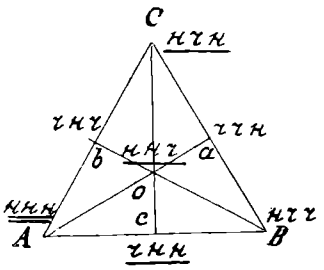


Фиг. 1.



Фиг. 2.

Первый случай отмѣченъ на фиг. 1 и по распредѣленію чиселъ какъ разъ соотвѣтствуетъ исходному трехугольнику періода сѣти; означимъ этотъ типъ цифрою I.



Фиг. 3.

Второй случай отмѣченъ на фиг. 2. Означимъ такъ чрезъ II. Этими двумя типами исчерпываются всѣ случаи этой категоріи.

Въ самомъ дѣлѣ, если въ первомъ случаѣ мы взяли $A = (нчч)$, то перестановка двухъ первыхъ чиселъ не мѣняетъ типъ; оба же эти числа мы не можемъ взять ни четными, ни ничетными; при второмъ допущеніи мы получили бы для B всѣ три числа четными. Если в

*) Ein besonderer Gang der zonalen Formenentwickelung. Zeitschrift für Krystallographie XXXII 446.

*) Zonale Verhältnisse des Berylls und der Krystalle es hypohexagonalen Typus überhaupt тамъ же XXXV 75.

ромъ случаѣ мы взяли $A = (чнн)$, то опять перестановка двухъ первыхъ чиселъ не перемѣнила бы типа; оба же числа мы не можемъ взять ни нечетными, ни четными; при второмъ допущеніи мы получили бы для B всѣ три числа нечетными.

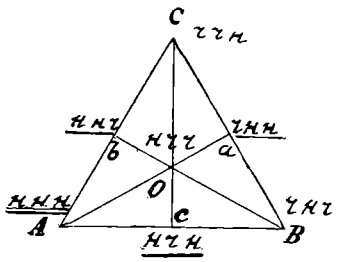
Вторая категорія комбинацій; $A = (н.н.н)$.

Сначала примемъ $o = (ннч)$ (ясно, что порядокъ четныхъ и нечетныхъ чиселъ не имѣетъ значенія); въ такомъ случаѣ $a = (ччн)$, и на сторонѣ a мы необходимо должны взять оба первыя числа одинаковыми, причемъ третьи числа необходимо должны быть различными (то есть одно четное, а другое нечетное). Отсюда видимъ, что оба первыя числа не могутъ быть одновременно ни четными, ни нечетными; слѣдовательно, изъ нихъ одно должно быть четное, а другое нечетное, а въ какомъ порядкѣ безразлично.

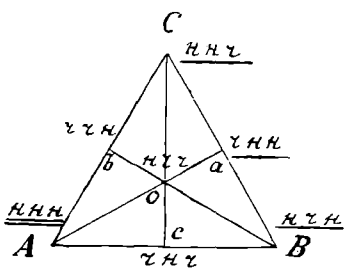
Итакъ сюда относится только одинъ типъ III, отмѣченный на фиг. 3.

Теперь примемъ $o = (нчч)$ (порядокъ чиселъ очевидно безразличенъ), а этимъ мы исчерпываемъ всѣ возможныя допущенія для o при этой категоріи; ясно, что теперь $a = (чнн)$, и потому первыя числа для B или C должны быть одинаковы; но они могутъ быть четными или нечетными.

Отсюда возникаютъ два, и только два, случая, такъ какъ за вторыя и третьи числа мы необходимо должны



Фиг. 4.



Фиг. 5.

принимать числа различныя (одно четное, а другое нечетное), а ихъ порядокъ безразличенъ.

Оба случая приводятъ соотвѣтственно къ двумъ, IV и V, типамъ, отмѣченнымъ на фиг. 4 и 5.

Третья категорія комбинацій; $a = (н.н.н)$.

Ясно, что для этой категоріи мы можемъ различать два существенно различные случая, такъ какъ для чиселъ o допустимъ принять или 1) два четныя, или 2) два нечетныя. Въ этихъ двухъ случаяхъ числа для A будутъ противоположны числамъ для o, также какъ числа для B будутъ противоположны числамъ для C, а порядокъ, въ какомъ мы возьмемъ эти числа всегда будетъ безразличенъ. Такимъ образомъ соотвѣтственно получаемъ два новыхъ типа VI и VII, отмѣченные на фиг. 6 и 7.

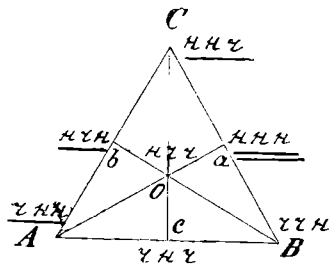
Этимъ выводъ всѣхъ типовъ и исчерпывается, и въ заключеніе остается только привести простѣйшіе примѣры этихъ типовъ.

Про простѣйшій примѣръ типа I то есть исходный трехугольникъ сѣти было уже упомянуто.

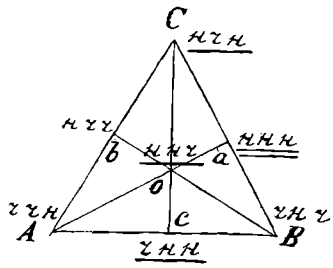
Всѣ трехугольники II періода, имѣющіе для средней точки символъ Ч, есть трехугольники III типа.

Изъ трехугольниковъ III періода половина относится къ VI, а другая половина къ VII типу, смотря потому будетъ ли символъ средней точки имѣть одно или два нечетные числа.

Примѣромъ II типа можетъ служить треугольникъ IV періода, имѣющій символомъ средней точки (13.7.3), а символами вершинъ $A = (321)$, $B = (631)$, $C = (421)$.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Примѣромъ IV типа можетъ служить треугольникъ IV періода, имѣющій символомъ средней точки (10.4.3), а символами вершинъ $A = (311)$, $B = (100)$ и $C = (632)$.

Наконецъ примѣромъ V типа можетъ служить трехугольникъ IV періода, имѣющій символомъ средней точки (10.9.6), а символами вершины $A = (111)$, $B = (332)$ $C = (653)$.

Такимъ образомъ уже въ четырехъ первыхъ періодахъ представлены всѣ возможные типы.

Чтобы нагляднѣе представить проявленіе доказаннаго здѣсь численнаго закона на всѣхъ фигурахъ, символы съ двумя нечетными числами подчеркнуты разъ, и символы съ тремя нечетными числами подчеркнуты два раза.

На фигурахъ наглядно проявляется частость поясовъ съ символами съ двумя нечетными числами. Присутствіе поясовъ съ такими символами станетъ очевиднымъ, если примемъ во вниманіе, что сюда относятся всѣ пояса, оси которыхъ выражаются тремя нечетными числами. Въ такихъ поясахъ нѣтъ иныхъ символовъ, кромѣ заключающихъ два нечетныхъ числа, и число ихъ въ комплексѣ въ точности совпадаетъ съ числомъ символовъ изъ трехъ нечетныхъ чиселъ, то есть составляетъ одну седьмую всѣхъ вообще поясовъ, такъ какъ кромѣ символовъ съ тремя нечетными числами имѣется еще втрое большее число символовъ съ двумя и втрое большее число символовъ съ однимъ нечетнымъ числомъ.

Приведенный методъ доказательства есть методъ простого перечисленія (per enumerationem simplicem) возможныхъ случаевъ. Онъ интересенъ потому, что представляетъ интересъ самое перечисленіе этихъ случаевъ. Но конечно проще и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ полнѣе прямое доказательство подчеркнутой теоремы. Самое теорему мы можемъ разсматривать какъ слѣдствіе другой теоремы, по которой ни въ какомъ изъ семи символовъ элементарнаго треугольника не могутъ повторяться четныя и нечетныя числа въ одной и той же послѣдовательности.

Эта теорема очевидно справедлива для двухъ точекъ, находящихся на одной сторонѣ или на одной діагонали трехугольника, такъ какъ по такимъ двумъ символамъ на этихъ прямыхъ выводился бы третій символъ, который былъ бы представленъ тремя четными числами, что невозможно по опредѣленію элементарнаго трехугольника сѣти.

Остается доказать справедливость этой теоремы, когда

одинакова послѣдовательность чиселъ въ символахъ двухъ изъ трехъ точекъ a, b и c.

Если мы примемъ такую одинаковость напр. для a и b, то, какой бы символъ мы ни приписали точкѣ a, мы всегда получили бы одинаковость и для A и B, а это невозможно, такъ какъ въ этомъ случаѣ въ символѣ c всѣ числа были бы четными.

Эта теорема даетъ больше, чѣмъ то слѣдствіе которое заключается въ вышеприведенной теоремѣ. Принимая во вниманіе вообще возможные виды расположенія четныхъ и нечетныхъ чиселъ въ символѣ, мы получимъ всего семь, а именно: 1) *нчч*, 2) *чнч*, 3) *ччн*, 4) *ннн*, 5) *нчн*, 6) *ннч* и 7) *ннн*.

Слѣдовательно, въ каждомъ элементарномъ треугольникѣ сѣти имѣются всѣ эти семь послѣдовательностей чиселъ.

24 декабря 1908 г.