Краткія сообщенія.

І. Е. С. Федоровъ. Полный четырехсторонникъ въ кристаллографіи и графическій пріемъ нахожденія сложныхъ индексовъ.

Въ „Beiträge zur zonalen Krystallographie“ [1]) введено понятіе о развитіи формъ кристаллическаго комплекса по періодамъ, причемъ извѣстная совокупность граней, однородныхъ по своему значенію въ комплексѣ, получила особое обозначеніе зональными символами.

Развитіе формъ происходитъ путемъ раздѣленія опредѣленныхъ трехугольниковъ извѣстнаго періода (представляющихъ гномоническія проекціи соотвѣтственныхъ граней) на шесть трехугольниковъ слѣдующаго періода. Въ основѣ лежатъ трехугольники изъ }100{, }010{, }001{. Одинъ изъ нихъ (напр. съ положительными индексами) раздѣляется на шесть, напр. (100), (110), (111) или (001), (011), (111), и эти трехугольники есть трехугольники I періода. Соотвѣтствующія грани трехугольниковъ II періода отмѣчаются символами, индексы коихъ слагаются изъ индексовъ I періода и т. д. Такимъ образомъ по мѣрѣ повышенія періода индексы безгранично возрастаютъ.

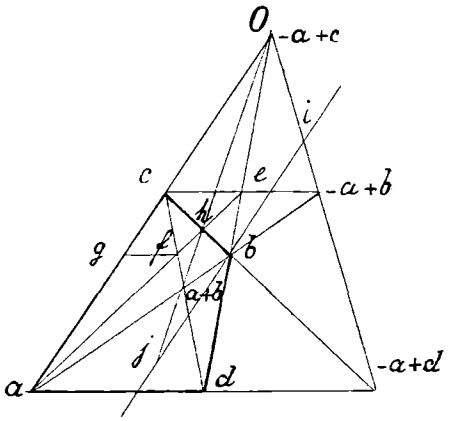
Порядокъ развитія формъ поэтому закону отличается чрезвычайною простотою и давно излагается въ нѣкоторыхъ элементарныхъ руководствахъ.

Но иногда при рѣшеніи кристаллографическихъ вопросовъ возникаетъ задача о дальнѣйшемъ развитіи формъ не съ исходныхъ, а по даннымъ вершинамъ трехугольниковъ какихъ-нибудь болѣе высокихъ періодовъ.

Такъ какъ вообще для опредѣленія комплекса необходимо и достаточно четырехъ граней, то ясно, что тремя данными точками, вершины какого-бы трехугольника ихъ полюсы ни составляли, дальнѣйшее развитіе комплекса невозможно, и совершенно необходимо знать положеніе еще какой-нибудь четвертой грани. Въ общемъ, выборъ таковыхъ зависитъ отъ нашего желанія, и я разсмотрю случай, когда данныя четыре точки составляютъ вершины двухъ смежныхъ трехугольниковъ, имѣющихъ общую сторону.

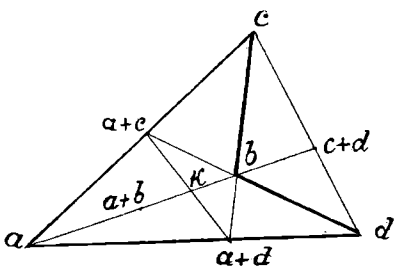
Здѣсь мы должны различить два случая: 1) когда четырехугольникъ выпуклый (фиг. 1) и 2) когда онъ съ вогнутымъ угломъ (фиг. 2). Въ обоихъ случаяхъ [2]) мы можемъ разсматривать его какъ полный четырехсторонникъ и искать символы двухъ другихъ его вершинъ, представленныхъ точками пересѣченія противоположныхъ граней. Въ обоихъ на діагонали (общей сторонѣ трехугольниковъ) мы этимъ построеніемъ получаемъ четыре гармоническія точки, изъ коихъ пара ab есть пара сопряженныхъ, также какъ и пара новопостроенныхъ, изъ коихъ одна находится внутри, а другая внѣ отрѣза ab.

По условію построенія одна изъ этихъ новопостроенныхъ точекъ прямо получаетъ символъ $a+b$ (фиг. 1) или $c+d$ (фиг. 2), если подъ a, b, c, d... мы ради краткости будемъ подразумѣвать символы $(a_1a_2a_3)$, $(b_1b_2b_3)$, $(c_1c_2c_3)$... а подъ $a+b$—$(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$ и т. д.



Фиг.

Первый случай отличается особою простотою и есть тотъ, когда оба трехугольника входятъ въ составъ трехугольника предъидущаго, на единицу низшаго, періода.



Фиг. 2.

Въ этомъ случаѣ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ есть точки $-a+c$ и $-a+d$ то есть двѣ другія вершины упомянутаго трехугольника, если первая его вершина есть a. Способъ дальнѣйшаго развитія непосредственно ясенъ и будетъ разсмотрѣнъ на численномъ примѣрѣ.

Во второмъ случаѣ (фиг. 2) непосредственно ясно только полученіе точекъ $a+c$ и $a+d$, а для полученія точки $a+b$ нужно прибѣгнуть къ особому построенію, опредѣляемому двойнымъ отношеніемъ точекъ на прямой ab, величина котораго легко выводится изъ данныхъ символовъ.

---

[1]) Zeitschrift fur Krystallographie XXXII 446, XXXIII 555, XXXIV 133, XXXV 25.

[2]) Если пара сторонъ не образуетъ ни выпуклаго, ни вогнутаго угла, то значитъ она сливается въ одну прямую, и четырехугольникъ становится трехугольникомъ и уже не можетъ собою опредѣлять комплекса.

Кромѣ того замѣтимъ, что если данные трехугольники дѣйствительно элементарные трехугольники геометрической сѣти развитія формъ, то величина детерминанта, составленнаго изъ ихъ индексовъ, равна единицѣ *).

Ради наглядности разсмотримъ оба случая въ видѣ численныхъ примѣровъ.

Пусть $a=(123)$, $b=(256)$, $c=(245)$. Детерминантъ $\begin{vmatrix}123\\245\\256\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}123\\00\bar{1}\\010\end{vmatrix}$ есть дѣйствительно единица.

Сложивъ (123) съ (256) и вычтя (245), найдемъ четвертую точку (134) или d четырехугольника какъ вершину смежнаго трехугольника, почему также $\begin{vmatrix}123\\256\\134\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}123\\010\\011\end{vmatrix}$ есть также единица.

Имѣемъ $a+b=(379)$; $-a+c=(122)$; $-a+d=(011)$, а отсюда $(-a+c)+(-a+d)=(133)=-a+b$.

Теперь открылась полная возможность производить дальнѣйшее развитіе формъ трехугольника въ связи съ дальнѣйшимъ графическимъ развитіемъ сѣти.

Имѣемъ точку $a+b=(379)$ на прямой cd и точку $e=-a+b+c=(378)=(245)+(133)=(122)+(256)$. Соединяя e съ a, находимъ $f=(123)+(256)+(245)=(5.11.14)$, а пересѣченіе прямой bf съ ac даетъ точку $g=(368)=(123)+(245)=(5.11.14)-(256)$. Наконецъ пересѣченіе ef съ bc даетъ точку $h=(4.9.11)=(123)+(378)=(245)+(256)$ и т. д.

Если четыре точки на прямой ab есть гармоническія, то и четыре луча, проведенные чрезъ эти точки изъ произвольнаго центра, напр. O $(-a+c)$ есть также лучи гармоническіе, а потому если чрезъ b проведемъ прямую, параллельную Oa и еще лучъ изъ O чрезъ $h(a+b)$ до пересѣченія въ точкѣ j, причемъ i есть точка пересѣченія прямой діагонали четырехсторонника чрезъ O, то $bi=bj$, а потому, если поясовой символъ j есть a' a'', то таковой же символъ точки i есть $-a'$ a''; въ частности, если первое отношеніе $+1$, то второе -1; таковы и есть въ дѣйствительности поясовые символы $(a+b)$ и $(-a+b)$ по отношенію къ b и a, принятыя за (10) и (01), потому что (11) выражаетъ именно $(a+b)$ то есть $(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$, а $(\bar{1}1)$ выражаетъ $(-a+b)$ то есть $(-a_1+b_1, -a_2+b_2, -a_3+b_3)$.

Это основывается на извѣстной формулѣ о поясахъ *):

$$p_1 : p_2 : p_3 = a'p_1' + a''p_1''\quad a'p_2' + a''p_2'' : a'p_3' + a''p_3$$

Отсюда мы легко перейдемъ и ко второму случаю (фиг. 2).

Пусть $a=(346)$, $b=(569)$, $c=(6.7.10)$, $d=(6.7.11)$

Для провѣрки имѣемъ $\begin{vmatrix}346\\569\\6.7.10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}346\\1/200\\6.7.10\end{vmatrix} = 1$ и $\begin{vmatrix}346\\569\\6.7.11\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}346\\1/200\\6.7.11\end{vmatrix}$.

Въ этомъ случаѣ $(c+d)=(12.14.21)=3(569)-1(346)$, и значитъ поясовой символъ $(3\bar{1})$.

Отсюда слѣдуетъ, что поясовой символъ для гармонически-сопряженной точки k есть (31), а этимъ легко опредѣляется и положеніе точки $(a+b)$, имѣющей поясовой символъ (11).

Имѣя же точки $(a+b)$, $(a+c)$ и $(a+d)$, мы имѣемъ все, что необходимо для дальнѣйшаго развитія сѣти, чѣмъ поставленная задача и разрѣшается въ самомъ общемъ видѣ, если за простѣйшія отношенія цѣлыхъ чиселъ мы примемъ числа наинизшихъ періодовъ.

Однако, дѣло усложняется, если мы примемъ иное опредѣленіе простѣйшихъ чиселъ; ясно, что такое многообразіе возможныхъ опредѣленій дѣйствительно имѣетъ мѣсто. Напр. по только что означенному пріему отношеніе (14.11.6) выражаемое зональнымъ символомъ $\mathfrak{A}\beta^2$ проще, чѣмъ отношеніе (510), выражаемое зональнымъ символомъ Aa^3, потому что первое 4-го, а второе 5-го періода; для составленія перваго достаточны три операціи; для второго нужны четыре.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ 111 вывод. 1,1+1,1+1+1=(123)
321 3,3+2,3+2+1=(356)
653 „ 6,6+5,6+5+3=(6.11.14)

Для полученія (510) изъ 011 выводимъ 0,0+1,0+1+1=(012)
012 0,0+1,0+1+2=(013)
013 0,0+1,0+1+3=(014)
014 „ 0,0+1,0+1+4=(015)

Если назовемъ простѣйшимъ такое отношеніе трехъ чиселъ, при которомъ ихъ сумма наименьшая (при данномъ приближеніи), то конечно найденное рѣшеніе рѣзко ему противорѣчитъ.

Въ кристаллографіи для гексаэдрической структуры простѣйшимъ признается то, при которомъ сумма квадратовъ чиселъ имѣетъ наименьшую величину.

Если отмѣтить на чертежѣ районъ приближенія, напр. въ видѣ кружка и если, произведя объясненное построеніе, мы сразу получимъ въ первый разъ въ предѣлахъ этого приближенія точку геометрической сѣти (то есть точку пересѣченія двухъ сторонъ элементарнаго трехугольника сѣти), то полученное рѣшеніе будетъ удовлетворять этому опредѣленію, такъ какъ всякая другая точка въ предѣлахъ приближенія будетъ заключать числа, полученныя сложеніемъ, то есть всѣ вообще числа станутъ большими, и только одно или въ крайнемъ случаѣ два числа могутъ сохранить величину.

Но вообще этого ожидать нельзя, а скорѣе того, что въ первый разъ районъ приближенія будетъ пересѣченъ какою нибудь прямою сѣти (стороною элементарнаго трехугольника), а новая точка на этой прямой окажется внѣ района приближенія. Въ этомъ случаѣ въ предѣлахъ района приближенія мы можемъ все-таки на этой прямой опредѣлить точку, удовлетворяющему поставленному требованію, продолжая развивать рядъ точекъ на этой прямой, пока не появится точка въ предѣлахъ приближенія.

То же слѣдуетъ сдѣлать со слѣдующими сѣкущими, пока не появится въ предѣлахъ приближенія вершина сѣти. Тогда сравненіе полученныхъ нѣсколькихъ символъ рѣшитъ поставленный вопросъ.

Рѣшеніе вопроса еще болѣе усложняется для октаэдрической и додекаэдрической структуръ, для которыхъ сумму квадратовъ нѣкоторыхъ чиселъ (для октаэдрической съ двумя нечетными, для додекаэдрической съ тремя нечетными) нужно раздѣлить на 4. Не входя въ разсмотрѣніе этихъ случаевъ, я только сошлюсь на результаты слѣдующаго сообщенія.

20 Декабря 1908 г.

*) Ср. Ein besonderer Gang der zonalen Formenentwickelung, Zeitschrift für Kristallographie XXXII 450.

*) Этюды по аналитической кристаллографіи; эт. II, глава III, форм. 20).