4. О первомъ доказательствѣ основной теоремы алгебры Гаусса и одномъ доказательствѣ Коши.

М. И. Акимова.

(Доложено 8 декабря 1908 г.).

Дана функція $u+iv$ комплекснаго аргумента $x+iy$, конечная непрерывная и обладающая производной для всѣхъ конечныхъ значеній x и y.

1. Для доказательства существованія комплекснаго корня уравненія $u+iv=0$ достаточно установить, что минимумъ функціи u^2 двухъ перемѣнныхъ x и y при условіи для этихъ перемѣнныхъ $v=0$ не можетъ имѣть мѣста для всѣхъ другихъ значеній u, кромѣ $u=0$ [1]).

Разсматривая функціи u^2 въ силу уравненія $v=0$, какъ сложную функцію перемѣннаго x, изъ уравненій

$$2u\left(\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}\right)=0,$$
$$\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

заключаемъ, что минимумъ функціи u^2 можетъ имѣть мѣсто лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\text{либо } u=0, \text{ либо } u\gtrless 0, \text{ но } \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix}=0.$$

Слѣдовательно, задача сводится къ доказательству, что функція u^2 не можетъ достигнуть минимума, если и не равно нулю и выполнены условія

$$v=0, \quad \begin{vmatrix} \frac{du}{dx} & \frac{du}{dy} \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dy} \end{vmatrix}=0,$$

которыя въ силу тождествъ

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}$$

[1]) Gauss. Werke. B. III, 29, 30.

сводятся къ уравненіямъ

$$v=0,\ \frac{dv}{dx}=0,\ \frac{dv}{dy}=0. \tag{1}$$

Положимъ, что вмѣстѣ съ первыми частными производными функціи v обращаются въ нуль и всѣ ея частныя производныя до $n-1$ порядка включительно. Тогда тождества

$$\begin{aligned}&\frac{d^mu}{dx^m}=\frac{d^mv}{dx^{m-1}dy}=-\frac{d^mu}{dx^{m-2}dy^2}=-\frac{d^mv}{dx^{m-3}dy^3}=\frac{d^mu}{dx^{m-4}dy^4}=\dots,\\&\frac{d^mv}{dx^m}=-\frac{d^mu}{dx^{m-1}dy}=-\frac{d^mv}{dx^{m-2}dy^2}=\frac{d^mu}{dx^{m-3}dy^3}=\frac{d^mv}{dx^{m-4}dy^4}=\end{aligned} \tag{2}$$

даютъ

$$d(u^2)=0,\ d^2(u^2)=0,\qquad d^{n-1}(u^2)=0\ \text{и}$$

$$\begin{aligned}d^n(u^2)&=2u\left(\frac{d^nu}{dx^n}dx^n+n\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+\frac{n(n-1)}{1\ 2}\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2+\dots.\right)=\\&=2u\left(\frac{d^nu}{dx^n}\cos n\varphi+\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}\sin n\varphi\right).r^n,\end{aligned}$$

гдѣ $dx=r\cos\varphi$, $dy=r\sin\varphi$, а φ удовлетворяетъ условію

$$\begin{aligned}d^nv&=\frac{d^nv}{dx^n}dx^n+n\frac{d^nv}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy+\frac{n(n-1)}{1\ 2}\frac{d^nv}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2+\dots.)=\\&=\left(\frac{d^nu}{dx^n}\operatorname{Sin}n\varphi-\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}\operatorname{Cos}n\varphi\right)r^n=0\end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда слѣдуетъ, что для одного изъ корней уравненія (3).

$$\varphi\ \text{и}\ \varphi+\frac{\pi}{n}$$

дифференціалъ $d^n(u^2)$ отрицателенъ.

2. Разсмотримъ функцію $R=u^2+v^2$ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Легко убѣдиться, что минимумъ этой функціи также равенъ нулю. Тогда, очевидно, одновременно удовлетворяются уравненія $u=0$ и $v=0$.

Изъ уравненій

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{dR}{dx}&=\frac{du}{dx}+v\frac{dv}{dx}=0,\\\frac{1}{2}\frac{dR}{dy}&=u\frac{du}{dy}+v\frac{dv}{dy}=0,\end{aligned}$$

слѣдуетъ, что минимумъ функціи R можетъ имѣть мѣсто лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\text{либо } u=0 \text{ и } v=0, \text{ либо } u \text{ или } \mp 0, \text{ но } \begin{vmatrix}\frac{du}{dx}&\frac{dv}{dx}\\\frac{du}{dy}&\frac{dv}{dy}\end{vmatrix}=0,$$

Слѣдовательно задача сводится къ доказательству, что функція R не можетъ достигнуть минимума, если u или v не равны нулю и выполнены условія

$$\frac{du}{dx}=0,\ \frac{dv}{dx}=0$$

или

$$\frac{du}{dy} = 0, \frac{dv}{dy} = 0.$$

Положимъ, что вмѣстѣ съ первыми частными производными функцій u и v обращаются въ нуль и всѣ ихъ частныя производныя до $n - 1$ порядка включительно, тогда

$$dR = 0,\ d^2R = 0, \qquad\qquad d^{n-1}R = 0.$$

и тождества (2) даютъ

$$d^nR = \frac{d^nR}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nR}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{1\ \ 2}\frac{d^nR}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots\ldots =$$
$$= \left(\frac{d^nR}{dx^n}\cos n\varphi + \frac{d^nR}{dx^{n-1}dy}\sin n\varphi\right)r^n,$$

гдѣ $dx = r\cos\varphi$, $dy = r\sin\varphi$.

Отсюда слѣдуетъ, что дифференціалъ d^nR можетъ быть сдѣланъ отрицательнымъ.