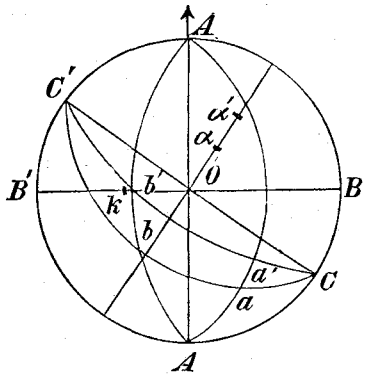
XXII. Е. С. Федоровъ. Сдвигъ обыкновенныхъ и полярныхъ рѣшетокъ.

Какъ извѣстно, каждой данной пространственной рѣшеткѣ однозначно соотвѣтствуетъ одна опредѣленная полярная пространственная рѣшетка. Чтобы получить послѣднюю, достаточно въ какой-нибудь точкѣ первой къ нѣсколькимъ, проходящимъ черезъ нее, плоскимъ сѣткамъ провести перпендикуляры и отложить на нихъ отрѣзки, выражающія величины площадей соотвѣтственныхъ элементарныхъ параллелограмовъ. Совокупность полученныхъ такимъ образомъ точекъ и будетъ совокупностью точекъ полярной пространственной рѣшетки, ближайшихъ къ данной на проведенныхъ перпендикулярахъ [2]).



Если произведемъ сдвигъ пространственной рѣшетки то всѣ ея точки перемѣстятся въ направленіи сдвига на величины, прямо пропорціональныя ихъ разстояніямъ отъ плоскости сдвига, и сама рѣшетка преобразуется въ другую совокупность точекъ, которая тоже будетъ пространственною рѣшеткою, такъ какъ прямыя и плоскости при этомъ преобразуются въ прямыя же и въ плоскости, и притомъ параллельныя въ параллельныя; поэтому равные отрѣзки на всякой прямой преобразуются въ равные же отрѣзки на гомологичной прямой. По этой причинѣ сдвигъ и отнесенъ къ кристаллографической проективности.

Но въ силу однозначнаго соотвѣтствія между обыкновенными и полярными рѣшетками можно утверждать, что также и полярная рѣшетка, подвергнутая сдвигу, преобразуется также въ пространственную рѣшетку, которую можно принять за полярную по отношенію къ нѣкоторой обыкновенной.

Однако легко убѣдиться, что сдвигъ полярной рѣшетки не преобразуетъ ее въ такую обыкновенную, которая могла бы быть выведенною тѣмъ же сдвигомъ (то есть опредѣляемымъ тою же плоскостью, тѣмъ же направленіемъ и величиною сдвига).

Замѣтимъ, что если плоскость чертежа (ср. фиг.) есть плоскость сдвига, направленіе сдвига есть AA' (показано стрѣлкой), то нѣкоторое центральное ребро рѣшетки a (показанное въ граммастереографической проекціи) перемѣстится въ точку a', находящуюся на дугѣ большого круга $Aaa'A'$; какая-нибудь точка b перемѣстится въ проекціи при томъ же сдвигѣ въ точку b', а нѣкоторая плоскость, выражаемая въ проекціи дугою большого круга $CabC'$, преобразуется въ плоскость $Ca'b'C'$, причемъ ребро пересѣченія этой плоскости съ плоскостью сдвига, выражаемое въ проекціи діаметральнопротивоположными точками C съ C', останется неизмѣннымъ.

Пусть α полюсъ то есть гномостереографическая проекція первой, а α' второй плоскости. Эти гномостереографическія проекціи и выразятъ направленія нѣкоторыхъ (соотвѣтственныхъ) реберъ полярной пространственной рѣшетки, и вотъ мы видимъ, что эти прямыя не подчиняются закону сдвига въ данномъ случаѣ, такъ какъ ихъ полюсы перемѣщаются не по дугамъ большого круга, проходящимъ чрезъ AA_4, а по діаметру Oaa', перпендикулярному къ діаметру CC'.

[1]) Нѣмецкіе геометры такого рода примы называютъ Schaar въ отличіе отъ Büschel, выражающихъ поверхности въ системѣ точекъ.

[2]) На этомъ свойствѣ основано предложенное графическое опредѣленіе плотностей сѣтокъ и вмѣстѣ съ тѣмъ сдѣлано важное усовершенствованіе критерія правильной установки (ср. стр. 291 и сл.).

Если произведемъ безконечно-большой рядъ безконечно малыхъ сдвиговъ, имѣющихъ ту же плоскость и то же направленіе сдвига, то какъ обыкновенная рѣшетка послѣдовательно измѣнится въ рядъ рѣшетокъ, такъ и полярная же претернитъ такой же рядъ измѣненій. Приэтомъ абсолютные размѣры разстояній точекъ рѣшетки не имѣютъ значенія, такъ какъ при опредѣленіи полярной рѣшетки, соотвѣтствующей данной обыкновенной абсолютныя величины отрѣзковъ на перпендикулярахъ зависятъ отъ условно принятой линейной единицы. Поэтому можемъ сказать, что, подвергая обыкновенную рѣшетку ряду сдвиговъ, мы найдемъ, что и соотвѣтственная полярная рѣшетка подвергается какимъ то измѣненіямъ по закону кристаллографической проективности, которыя мы можемъ толковать какъ одинъ единственный или по крайней мѣрѣ какъ опредѣленную совокупность сдвиговъ же [1]).

Мало того, легко для полярныхъ рѣшетокъ найти плоскость сдвига, сохраняющую постоянное положеніе при сдвигахъ обыкновенныхъ рѣшетокъ. Это есть именно плоскость, перпендикулярная къ направленію сдвига обыкновенной рѣшетки.

Въ самомъ дѣлѣ, всѣ плоскости, проходящія чрезъ ось сдвига послѣ сдвига остаются неизмѣнными и слѣдовательно неизмѣнными остаются и перпендикуляры къ этимъ плоскостямъ то есть всѣ ребра полярной рѣшетки, находящіяся въ плоскости, перпендикулярной къ направленію сдвига.

Такимъ же образомъ мы можемъ доказать, что направленіе сдвига полярной рѣшетки есть перпендикуляръ къ плоскости сдвига обыкновенной рѣшетки.

Для этого замѣтимъ, что направленіе сдвига AA' есть то именно направленіе, которое опредѣляетъ направленіе передвиженія точки a въ граммастереографической проекціи обыкновенной рѣшетки при какой угодно величинѣ сдвига, Но мы только что видѣли, что при этой операціи полюсы граней полярной рѣшетки, то есть гномостереографической проекціи также при какой-угодно величинѣ сдвига передвигаются въ плоскости вертикальной то есть непремѣнно проходящей чрезъ вертикаль O, которая, слѣдовательно, и играетъ роль направленія сдвига въ полярной рѣшеткѣ. Это передвиженіе на сферѣ (въ изображеніи) можно разсматривать въ обоихъ случаяхъ какъ вращеніе около оси, k, находящемся въ плоскости сдвига именно перемѣщеніе изъ a въ a' какъ вращеніе около оси, выражаемой полюсомъ, находящемся въ плоскости сдвига полярной рѣшетки, а перемѣщеніе изъ α въ α' какъ вращеніе около оси, выражающейся полюсомъ CC', находящейся въ плоскости сдвига обыкновенной рѣшетки то есть въ плоскости чертежа.

Итакъ, если обыкновенная рѣшетка подвергается сдвигу, имѣющему плоскость P и направленіе q (въ этой плоскости), то сопряженная полярная рѣшетка подвергается сдвигу, имѣющему плоскость Q перпендикулярную къ q, и направленіе p перпендикуляра къ плоскости P.

Такимъ образомъ устанавливается коррелятивность нетолько между системою точекъ и системою плоскостей, но и между преобразованіями этихъ системъ. Именно въ силу коррелятивности эта теорема имѣетъ дуальное значеніе, такъ что въ ея формулировкѣ обыкновенная рѣшетка можетъ быть замѣнена полярною и обратно.

Я считаю необходимымъ опубликованіе этой теоремы въ виду того, что въ кристаллографіи для опредѣленія символа комплекса мы именно производимъ операцію сдвига полярной рѣшетки (пользуясь гномостереографическою проекціею, а сущность измѣненія, которое при этомъ претерпѣваетъ обыкновенная рѣшетка, оставалась неизвѣстною. 25 ноября 1908 г.

---

[1]) это значеніе вызывается извѣстнымъ свойствомъ сдвиговъ сохранять равенство соотвѣтственныхъ объемовъ до и послѣ измѣненія.