XXI. Е С. Федоровъ. Линейная прима кривыхъ поверхностей 2-го порядка (коносекундъ), опредѣляемая одного изъ нихъ и плоскостью.

Такъ какъ плоскость P есть лишь частный случай кривой поверхности 2-го порядка (коносекунды) K, то по таковой и еще какой-либо коносекундѣ, данной совершенно произвольно, вполнѣ однозначно опредѣляется ихъ линейная прима [1]). Таковою будетъ совокупность, для опредѣленія которой эти данныя являются достаточными и могутъ быть замѣнены любыми двумя коносекундами той же совокупности.

Находимъ полюсъ П плоскости P по отношенію къ поверхности K и беремъ въ пространствѣ произвольную точку a.

Будемъ обозначать точки плоскости P буквами p_1, p_2... Полярами этихъ точекъ будутъ соотвѣтственно плоскости Π_1, Π_2..., проходящія чрезъ точку π.

Принимая послѣдовательно всѣ точки p_i за центры, а ихъ поляры Π_i за плоскости перспективы (коллинеаціи) и всякій разъ отыскивая на лучѣ $p_i a$ точку a', гомологичную точкѣ a, найдемъ въ качествѣ геометрическаго мѣста точекъ a' нѣкоторую поверхность, которая и будетъ одною изъ искомыхъ поверхностей примы. Перемѣщая точку a въ пространствѣ по такой кривой, чтобы никакія ея двѣ точки не принадлежали какой-либо изъ воспроизводимыхъ точками коносекундъ, мы воспроизведемъ полную совокупность таковыхъ.

Каждая точка a' (какой либо поверхности примы, воспроизводимая изъ a, съ нею гомологична, то есть выводится, однозначно по даннымъ условіямъ, и какъ изъ a выводится a', такъ, вслѣдствіе инволюціи, изъ a' выводится одна единственная точка a. Слѣдовательно, вообще никакая точка a' не можетъ одновременно принадлежать двумъ поверхностямъ примы то есть вообще ни одна поверхность примы не пересѣкается ни съ какою другою.

Если, исходя изъ точки a мы получили нѣкоторую поверхность, въ составъ которой, кромѣ нея, входятъ точки a_1, a_2..., то ту же поверхность получимъ, и исходя изъ точекъ a_1, a_2... Въ самомъ дѣлѣ, примемъ за исходную a_1, и проведемъ лучъ $a_1 a_2$ до пересѣченія съ плоскостью P въ точкѣ p_1, поляра которой есть плоскость Π_1, проходящая чрезъ π. Если, принявъ p_1 за центръ и Π_1 за плоскость перспективы, мы получимъ не точку a_2, а точку a_2' какъ гомологичную точкѣ a_1 и не находящуюся

[1]) Общій случай линейной примы коносекундъ отмѣченъ на стр. 341.

на той же поверхности, то на лучѣ aa'_2, мы, при соотвѣтственномъ построеніи, найдемъ по отношенію къ точкѣ a двѣ гомологичныя точки: a'_2 и еще точку пересѣченія этого же луча съ тою же поверхностью, что невозможно.

Однако, если плоскость P пересѣкаетъ данную поверхность K, то въ кривой пересѣченія пересѣкаются и всѣ поверхности линейной примы.

Въ самомъ дѣлѣ, полярами этихъ точекъ будутъ плоскости, касательныя къ поверхности K въ нихъ самихъ, а потому эти точки являются гомологичными какимъ угодно, произвольно взятымъ, точкамъ пространства.

Мы видѣли, что всякій, произвольно взятый, лучъ, проходящій чрезъ двѣ точки $a_1\, a_2$ нѣкоторой поверхности примы, пересѣкаетъ ее только въ этихъ двухъ гомологичныхъ точкахъ, и не больше, если только онъ вообще ее пересѣкаетъ (въ частности лучи могутъ быть и касательными). Слѣдовательно, всякая поверхность примы пересѣкается всякою плоскостью въ кривой 2-го порядка, что и доказываетъ принадлежность къ тому же порядку и кривой поверхности.

Если для построенія будемъ брать точки a на плоскости P, то въ построеніяхъ эти точки будутъ играть роль центровъ перспективы то есть будутъ самогомологичны. И таковыми, по условіямъ построенія, будутъ только точки плоскости P, а уже для точекъ, безконечно мало удаленныхъ отъ этой плоскости, гомологичны будутъ точки, съ ними несовпадающія. Слѣдовательно, на плоскость P можно смотрѣть какъ на предѣльную поверхность линейной примы, опредѣляемую, какъ остатокъ точекъ пространства, не принадлежащихъ никакимъ другимъ поверхностямъ примы.

Если точки a будемъ брать на данной поверхности K, то на каждомъ лучѣ гомологичною ей точкою будетъ другая точка пересѣченія поверхности лучемъ.

Отсюда видимъ, что весьма легко воспроизвести всю эту приму поверхностей по произвольно даннымъ двумъ, напр. K_1 и K_2. Для этого напр. проведемъ четыре весьма близкіе другъ къ другу параллельные луча, которые пересѣкали бы обѣ поверхности. Каждый изъ нихъ пересѣчетъ ихъ въ двухъ парахъ гомологичныхъ точекъ, а этими двумя парами на нихъ опредѣлится инволюція, и притомъ инволюція 1-го вида то есть съ двумя вещественными двойными точками, такъ какъ точки пересѣченія лучей съ плоскостью P и есть такія двойныя точки. Тѣ четыре близкія, по условіямъ построенія, двойныя точки, которыя находятся въ одной плоскости (а это, какъ только что объяснено, непремѣнно должно имѣть мѣсто въ данномъ случаѣ) и опредѣляютъ искомую плоскость P, а вмѣстѣ съ нею и всю приму поверхностей.

Итакъ, это прима линейная, что и требовалось доказать.

На основаніи вышеизложеннаго вытекаетъ новый способъ построенія кривыхъ поверхностей 2-го порядка (коносекундъ).

Беремъ въ пространствѣ произвольную точку π и произвольную плоскость P и устанавливаемъ коррелятивность между секундою точекъ P и секундою плоскостей, проходящихъ чрезъ π. Какъ извѣстно [1]), для этого достаточно принять соотвѣтствіе четыхъ элементовъ обѣихъ секундъ.

Достигнувъ того, что каждой точкѣ p плоскости P съумѣемъ найти коррелятивную плоскость П, беремъ въ пространствѣ произвольную точку a, и по вышеизложенному, воспроизводимъ всю поверхность, проходящую чрезъ эту точку.

Такъ какъ всякая плоскость П пересѣкаетъ плоскость P въ прямой, то ясно, что мы можемъ упростить установленіе коррелятивности тѣмъ, что замѣнимъ ее установленіемъ коррелятивности между точками и прямыми на плоскости P. Тогда, чтобы получить плоскость П, полярную по отношенію къ точкѣ p, мы беремъ на той же плоскости P поляру этой точки то есть прямую пересѣченія П съ P и проводимъ чрезъ эту прямую и точку π плоскость, которая и есть искомая плоскость П. Для установленія этой коррелятивности намъ достаточно провести на плоскости P какую либо кривую 2-го порядка и считать полюсы и поляры по отношенію къ этой кривой.

Понятно, что отъ этого общаго построенія въ пространствѣ легко перейдемъ, какъ къ частному случаю, къ новому способу построенія кривыхъ 2-го порядка (конопримъ) на плоскости.

Для этого нужно установить коррелятивность между лучами, исходящими изъ данной точки π и точками данной прямой P. Сдѣлавъ это, беремъ на плоскости произвольную точку a и послѣдовательно изъ всѣхъ точекъ прямой P проводимъ чрезъ нее лучи, на которыхъ опредѣляемъ точки пересѣченія съ полярами взятыхъ на P точекъ, и наконецъ на немъ же опредѣляемъ четвертую гармоническую точку a', сопряженную съ a. Совокупность точекъ a' и есть одна изъ кривыхъ 2-го порядка, опредѣляемая одною произвольно данною точкою a на плоскости. Перемѣщая, какъ выше сказано, точку a въ плоскости, получимъ для каждаго ея положенія одну кривую, а въ совокупности цѣлую линейную приму кривыхъ, въ составъ которой войдетъ и прямая P.

Въ свою очередь и здѣсь поляры точекъ прямой P опредѣляютъ точки пересѣченія съ тою же прямой, а потому получаемъ на P два проективные ряда точекъ (сопряженныхъ), то есть примѣ, находящихся въ положеніи инволюціи.

Поэтому кривую 2-го порядка по какой-либо одной точкѣ, произвольно данной на плоскости, мы можемъ воспроизвести, имѣя прямую P съ инволюціей паръ точекъ и еще какую либо точку π.

Въ частности, если инволюція перваго вида то есть имѣетъ двѣ вещественныя двойныя точки, то эти обѣ точки есть общія точки пересѣченія всѣхъ кривыхъ линейной примы.

Едва ли нужно и упоминать о томъ, что, такъ какъ всѣ приведенныя построенія есть построенія позиціонныя, то они одинаково примѣнимы для всѣхъ геометрическихъ системъ соотвѣтственной ступени.

Въ частности, переходя отъ системы точекъ къ системѣ плоскостей, мы прямо можемъ формулировать приведенныя теоремы такимъ образомъ.

Имѣя произвольно данную точку P и плоскость π, мы по всякой данной произвольно въ пространствѣ касательной плоскости a легко получимъ коносекунду касательныхъ плоскостей къ нѣкоторой поверхности 2-го класса, если установимъ коррелятивность между точками плоскости π и плоскостями, проходящими чрезъ точку P.

Для этого по тремъ плоскостямъ: 1) плоскости p_1, проходящей чрезъ P, 2) плоскости a и 3) плоскости, проходящей чрезъ ребро пересѣченія $p_1\, a$ и точку Π_1 (поляру плоскости p_1) опредѣлимъ четвертую гармоническую a', сопряженную съ a. Сдѣлавъ это для всей совокупности плоскостей, проходящихъ чрезъ точку P, мы и

[1]) Новая Геометрія, какъ основа черченія II 24.

найдемъ коносекунду плоскостей, огибающихъ искомую кривую поверхность 2-го класса. Измѣняя въ пространствѣ наложеніе плоскости a такимъ образомъ, чтобы ни одно послѣдующее положеніе плоскости не было другой касательною къ одной изъ выведенныхъ поверхностей, мы получимъ полную линейную приму [1]) такихъ поверхностей, въ составъ которой непремѣнно входитъ точка P. Эта точка представляетъ точечную поверхность, а всѣ проходящія чрезъ нея плоскости есть плоскости, касательныя къ этой поверхности.

Какъ въ примахъ поверхностей перваго рода прямая пересѣкаетъ ихъ въ инволюціи паръ точекъ, такъ въ примахъ второго рода, только что охарактеризованныхъ линейная прима касательныхъ плоскостей образуютъ инволюцію паръ плоскостей.

Какъ частный случай, мы можемъ формулировать слѣдующую теорему на плоскости.

Если дана точка P и прямая π, и установлена корреляятивность между лучами, исходящими изъ P и точками прямой π, то по произвольно взятой на плоскости прямой a мы можемъ построить приму прямыхъ, касательныхъ къ кривой 2-го класса. Для этого изъ точки пересѣченія какой-либо прямой p_1, проходящей чрезъ P, и прямой a проводимъ прямую чрезъ полюсъ P_1 прямой p_1 (находящейся на прямой π), а по этимъ тремъ прямымъ находимъ четвертую гармоническую a', сопряженную съ a. Если сдѣлаемъ это построеніе для всѣмъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ P, то получимъ совокупность касательныхъ (квадратичную приму) къ нѣкоторой кривой 2-го класса. Измѣняя опредѣленнымъ образомъ положеніе прямой a на плоскости, мы получимъ въ совокупности линейную приму кривыхъ, огибаемыхъ касательными, и въ составъ этой примы необходимо входитъ точка P какъ точечная кривая.

9 ноября 1908 г.