31. Существованіе безграничнаго множества геометрическихъ системъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 8 сентября 1908 г.).

Въ статьѣ „Системы гармоническихъ отрѣзковъ и векторовъ“ [1]) было показано, что за элементъ системы можно принять пару точекъ, если въ этой парѣ одна изъ нихъ однозначно опредѣляется изъ другой какъ сопряженная по отношенію къ нѣкоторому постоянному для всей системы шару R.

Принявъ такое опредѣленіе элемента новой системы, мы показали, какъ два такіе, произвольно взятые, элемента однозначно опредѣляютъ линейную приму, три—линейную секунду и одновременно циклъ, находящійся въ этой секундѣ; наконецъ четыре такіе элемента опредѣляютъ сферу. Отсюда были выведены коллинеарныя и реципрочныя преобразованія новой системы и вмѣстѣ возможность производитъ всякія позиціонныя построенія, которыя одинаково переносятся съ одной геометрической системы на всѣ другія.

Но разъ мы можемъ въ такой *парной* системѣ производить всякія вообще позиціонныя построенія, то отсюда слѣдуетъ, что и въ ней, построивъ циклъ или сферу, по одному данному (парному) элементу опредѣлить сопряженный, и снова принять пару такихъ (парныхъ) элементовъ за элементъ новой системы.

Такимъ образомъ изъ всякой данной геометрической системы мы можемъ воспроизвести новую парную систему той же ступени. Это заключеніе было уже приведено въ упомянутой статьѣ, почему ею число возможныхъ геометрическихъ системъ сразу удваивалось; показать это и составляло главную задачу статьи.

Но въ этой статьѣ не было сдѣлано слѣдующаго логическаго шага, также непосредственно вытекающаго изъ нея—заключенія о существованіи безграничнаго множества геометрическихъ системъ одной и той же ступени, выводимыхъ изъ каждой одной данной.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ выводъ о возможности воспроизведенія изъ всякой данной системы другой, парной, никакими условіями не ограничивается и обусловливается возможностью тѣхъ же позиціонныхъ построеній, что и для всѣхъ системъ, то ясно, что онъ одинаково примѣнимъ и къ парнымъ системамъ.

Другими словами, мы можемъ воспроизвести новую, парную, систему не только изъ вообще какихъ либо геометрическихъ системъ, но совершенно на тѣхъ же основаніяхъ и изъ каждой парной системы.

Назовемъ, ради опредѣленности, ту парную систему, которая воспроизводится изъ системы, не обладающей свойствами парной, *первою производною парною системою*. Какъ изъ данной мы воспроизвели эту систему, такъ изъ нея, въ свою очередь, можемъ воспроизвести *вторую производную парную систему*. Но вѣдь также и эту систему, какъ вмѣщающую въ себя всѣ позиціонныя построенія всякихъ геометрическихъ системъ вообще, мы можемъ взять за основаніе воспроизведенія слѣдующей парной (снова принявъ за элементъ системы пару элементовъ этой системы) то есть *третьей производной парной системы*. Такимъ образомъ мы безгранично можемъ выводить все новыя и новыя системы той же ступени, и опредѣленно говорить про n-ую *производную парную систему*.

Мало того, для всего этого безграничнаго ряда системъ мы можемъ напередъ предвидѣть нѣкоторыя особенности каждой.

[1]) Записки Горнаго Института, I. 147.

Ради простоты соображеній ограничимся системами на плоскости и примемъ за основаніе систему точекъ. Первая производная парная система, какъ было показано въ упомянутой статьѣ, въ качествѣ линейныхъ примъ имѣетъ круги одной секунды, для которой постоянный кругъ системы есть вещественный ортогональный кругъ. Но уже въ качествѣ цикла въ этой системѣ выступаетъ реципрочная кривая четвертаго порядка. Такія же кривыя составляютъ вообще кривыя второго порядка (*конопримы* 1) этой системы. Это было выведено въ статьѣ „О реципрочныхъ кривыхъ и поверхностяхъ“ [2]). Но это можно заключить и непосредственно, такъ какъ коноприма пересѣкается съ линейной примой въ парѣ элементовъ то есть парѣ паръ, или иначе въ четырехъ точкахъ. Но линейная прима, опредѣленная двумя элементами, то есть парами точекъ, взятыми на одномъ радіусѣ, есть прямая, и значитъ такая прямая должна пересѣкать коноприму въ четырехъ точкахъ.

Совершенно также понятно, что и линейною примою въ этой системѣ должно быть вообще коническое сѣченіе, такъ какъ двѣ такія примы пересѣкаются въ одномъ элементѣ то есть парѣ точекъ и за одну изъ линейныхъ примъ мы можемъ взять прямую.

Если перейдемъ ко второй производной системѣ въ которой элементами служитъ пара паръ то есть четыре точки, то ясно, что уже линейною примой должна быть кривая 4-го порядка, потому что двѣ линейныя примы, изъ которыхъ одну можемъ принять за прямую, должны уже пересѣкаться въ четырехъ точкахъ.

Это усматривается еще болѣе непосредственно изъ того, что при переходѣ отъ начальной къ первой производной системѣ линейная прима второй есть кривая второго порядка первой системы.

Коноприма второй производной системы уже есть кривая 8-го порядка, такъ какъ она должна пересѣчься всякой линейною примою, за которую мы, въ частности, можемъ принять и прямую, въ четырехъ парахъ точекъ.

Слѣдуя этому порядку соображеній, мы вообще можемъ утверждать, что въ n-ой производной системѣ линейною примою служитъ кривая 2^n-го порядка, и коноприма есть кривая 2^{2n}-го порядка.

Такимъ образомъ, въ этомъ безграничномъ рядѣ геометрическихъ системъ, за исключеніемъ начальной то есть обыкновенной геометріи точекъ, представлены только кривыя четнаго порядка, и притомъ не всякія вообще, а лишь особыя, которыя можно назвать *реципрочными кривыми высшихъ порядковъ*. Изъ нихъ нѣкоторыя особенности были выведены лишь для первой производной системы (въ упомянутой статьѣ).

При этомъ обзорѣ бросается въ глаза нѣкоторое несоотвѣтствіе общаго вывода съ результатами статьи о первой производной системѣ въ томъ отношеніи, что по общимъ заключеніямъ линейная прима этой статьи можетъ быть вообще нѣкоторое коническое сѣченіе, тогда какъ въ статьѣ за таковую выведенъ кругъ то есть весьма частный случай.

Это несоотвѣтствіе конечно происходитъ отъ чрезвычайно частнаго опредѣленія паръ точекъ какъ элементовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, для этого опредѣленія въ системѣ предположенъ нѣкоторый постоянный кругъ, а сами пары точекъ выводятся, какъ сопряженныя, на его радіусахъ то есть лучахъ, проводимыхъ изъ центра круга.

Ясно, что это опредѣленіе допускаетъ значительное расширеніе въ томъ отношеніи, что вмѣсто круга можно взять произвольное коническое сѣченіе, а вмѣсто центра, для вывода лучей, можно принять произвольную точку на плоскости, находящуюся внутри или внѣ коническаго сѣченія [1]).

Возможность расширеннаго опредѣленія парной системы непосредственно очевидна, такъ какъ всѣ позиціонныя построенія сохраняютъ свою силу, если подвергнемъ всю систему коллинеарному преобразованію. Между тѣмъ это преобразованіе воспроизводитъ изъ круга нѣкоторое коническое сѣченіе, а изъ центра круга нѣкоторую точку, которая уже не будетъ центромъ коническаго сѣченія. Но конечно при этомъ циклъ, какъ совокупность, не опредѣляемая позиціонными построеніями, преобразуется не въ сферо-приму, а въ нѣкоторую коноприму.

Но однако никакими коллинеарными преобразованіями внутренняя точка коническаго сѣченія не преобразуется во внѣшнюю точку, и обратно, внѣшняя точка не преобразуется во внутреннюю.

Поэтому предстоитъ спеціальное доказательство того, что при расширенномъ опредѣленіи мы

---

[1]) Въ виду неудобства для геометрическихъ системъ вообще употреблять названія „прямая“ (линейная прима), „коническое сѣченіе“ или кривая второго порядка, „кривая поверхность второго порядка“, я предлагаю замѣнить ихъ выраженіями „коноприма“ (конич. сѣч.), „коносекунда“ (поверхность 2-го порядка) и т. д.

[2]) Записки Горнаго Института I, 171.

[1]) Какъ извѣстно, внутренними точками коническаго сѣченія называются тѣ, изъ которыхъ нельзя провести вещественныхъ касательныхъ, а изъ каждой внѣшней точки таковыхъ можно провести пару.

можемъ и за центръ лучей принять произвольную точку на плоскости.

Прежде, чѣмъ перейти къ воспроизведенію системы, разсмотримъ ближе опредѣленіе паръ сопряженныхъ точекъ на прямой, составляющихъ инволюцію

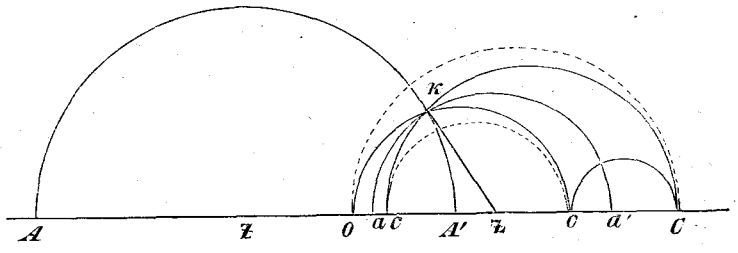
Пусть вещественныя двойныя точки этой инволюціи есть точки A и A', а одна изъ сопряженныхъ паръ—точки a и a'. Ясно, что постоянная пара двойныхъ точекъ и эта перемѣнная пара точекъ составляютъ четыре гармоническія точки; и если вообще всѣ такія пары примемъ за діаметры круговъ, то получимъ приму круговъ (перваго разряда) съ точечными кругами A и A', составляющими концы діаметра ортогональнаго круга.

Но такъ какъ въ парныхъ системахъ каждую такую перемѣнную пару мы разсматриваемъ какъ одинъ элементъ системы, то намъ удобнѣе этотъ элементъ характеризовать какою—нибудь одною точкою, однозначно связанною съ перемѣнною парою.

Съ этой цѣлью мы на прямой можемъ взять произвольную, но постоянную для всей системы, точку C, и за характеристику пары aa' принимать четвертую гармоническую, сопряженную съ C. Пусть это будетъ точка o; ясно, что по ней легко найти соотвѣтственную пару, такъ какъ эта пара должна быть одновременно сопряженною и по отношенію къ парѣ AA' и по отношенію къ парѣ Co. Или иначе: всѣ перемѣнныя пары данной системы есть діаметры круговъ примы съ ортогональнымъ кругомъ Z; но такую же приму круговъ мы можемъ составить и принявъ за діаметръ ортогональнаго круга Co, гдѣ o перемѣнная точка, характеризующая одну пару системы. Ясно, что искомая пара есть діаметръ круга, представляющаго пересѣченіе обѣихъ примъ. Задача построенія такихъ пересѣченій разсмотрѣна въ статьѣ „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости“ [2]).

Такимъ образомъ каждая пара, какъ элементъ системы, имѣетъ своимъ представителемъ однозначно связанную съ нею перемѣнную точку o, которую мы назовемъ точкою, сопряженною съ парою по отношенію къ точкѣ C (фиг. 1).

Фиг. 1.



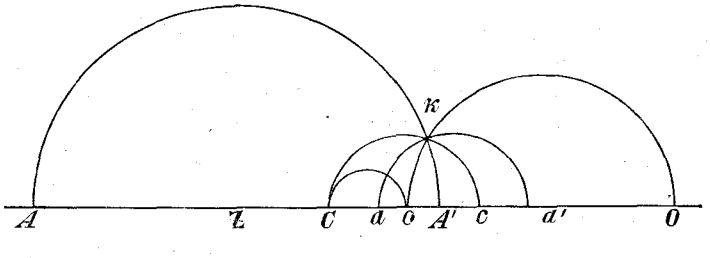
Въ частности, если o помѣстимъ въ A или A', оба ортогональные круга, опредѣляющіе пары, взаимно-касательны въ соотвѣтственныхъ точкахъ, и сопряженныя пары становятся двойными точками (точечными отрѣзками).

Но если возьмемъ точку o, внутри круга Z (діаметра AA'), то оба ортогональные круга пересѣкаются, а потому вещественныхъ паръ точекъ, сопряженныхъ такимъ точкамъ o, не существуетъ или иначе, пары точекъ становятся мнимыми.

Построеніе такихъ мнимыхъ паръ показано на фиг. 3 (и объяснено въ статьѣ „Точное изображеніе“). Принимаемъ Co, за діаметръ круга; чрезъ точку κ проводимъ кругъ, имѣющій центръ z на общей централи, а концами діаметра на ней будетъ искомая мнимая пара точекъ a и a'. Ясно, что кругъ z (діаметра aa') и есть мнимый ортогональный кругъ примы, опредѣленной обоими кругами.

Все это справедливо, пока точка C взята внѣ круга Z. Но если эту точку возьмемъ внутри этого круга, то отношенія перемѣнятся на противоположныя, то есть вещественныя пары получаются, пока

Фиг. 2.



и точка o находится внутри того же круга, и становится мнимыми, когда o попадаетъ внѣ этого круга, такъ какъ только во второмъ случаѣ круги Z и z пересѣкаются между собою (фиг. 2).

[1]) Изъ сферическихъ совокупностей до сихъ поръ выдѣленъ только циклъ, сфера и мегасфера. Послѣдняя имѣется только въ системахъ четвертой и высшихъ ступеней. Но уже въ системѣ пятой ступени (къ таковой относится система коническихъ сѣченій на плоскости) имѣется сферическая совокупность четвертой ступени, уже не имѣющая особаго наименованія. Въ виду возможности системъ еще высшихъ ступеней очевидно удобнѣе ввести и для сферическихъ совокупностей систематическія названія, а именно: *сферопримы* (прежніе циклы) *сферосекунды* (сферы), *сферотерціи* (мегасферы) и т. д.

[2]) Записки Горнаго Института I, 52.

Эта характеристика элементовъ системъ представляетъ, какъ видимъ, нетолько удобство, но и составляетъ существенное расширеніе понятія о парахъ, такъ какъ придаетъ опредѣленный смыслъ и мнимымъ парамъ, и позволяетъ брать за точки, сопряженныя этимъ парамъ, произвольныя точки системы; приэтомъ, смотря потому, будутъ ли эти сопряженныя точки находиться внутри или внѣ круга Z, пары будутъ вещественными или мнимыми въ зависимости отъ положенія постоянной точки C.

Но, воспроизведеніе такой системы требуетъ положенія въ ея основу нетолько круга Z, но еще и нѣкоторой постоянной точки C, которую мы можемъ обозначить словомъ постоянная точка системы.

Замѣтимъ, что точка o есть точка, сопряженная постоянной точкѣ C по отношенію къ парѣ aa'; это вытекаетъ изъ самой сущности производимаго построенія.

Но мы можемъ взглянуть на тѣ же соотношенія и съ другой точки зрѣнія.

Мы видимъ, что по отношенію къ парѣ aa' гармонически сопряжены какъ пара Co, такъ и пара AA'. Поэтому, если найдемъ точку O, гармонически сопряженную съ C по отношенію къ парѣ AA', то пары AA', aa' и Oo составятъ инволюцію (фиг. 1).

Это обозначаетъ слѣдующее. Если возьмемъ двѣ гармонически сопряженныя пары AA' и aa' и еще произвольную точку C, а затѣмъ получимъ пару четвертыхъ гармонически-сопряженныхъ точкѣ C точекъ O и o, то эта пара Oo будетъ принадлежать одной линейной примѣ съ парами AA' и aa'; слѣдовательно, если примемъ эти пары за діаметры круговъ, то всѣ три круга въ этомъ случаѣ пересѣкутся въ общей парѣ точекъ (κ и симметричной (Въ частности, если точка C безконечно-удалена, то точки O и o есть центры обоихъ круговъ. Изъ этого частнаго случая путемъ коллинеаціи выводится и общій.

Какъ видимъ, въ полученной инволюціи пара AA' уже не будетъ парою двойныхъ, а только парою сопряженныхъ точекъ; сопряженность пары aa' сохранится. Двойныя точки этой инволюціи получатся на общемъ основаніи (концы діаметра мнимаго круга примы то есть въ данномъ случаѣ двойныя точки мнимы).

Такъ какъ, по условіямъ, пара точекъ AA' и точка C взята постоянными, то значитъ постоянна и точка O. Теперь построеніе пары, сопряженной перемѣнной точкѣ o, сводится къ слѣдующему. Принимаемъ Oo за діаметръ круга, который вмѣстѣ съ кругомъ Z опредѣляетъ инволюцію (линейную приму круговъ). Искомый кругъ z, дающій сопряженную пару aa', есть тотъ кругъ этой примы, который прямоугольно пересѣкаетъ кругъ Z. Для нахожденія его центра нужно изъ общей точки κ пересѣченія круговъ провести касательную kz до пересѣченія съ централью примы.

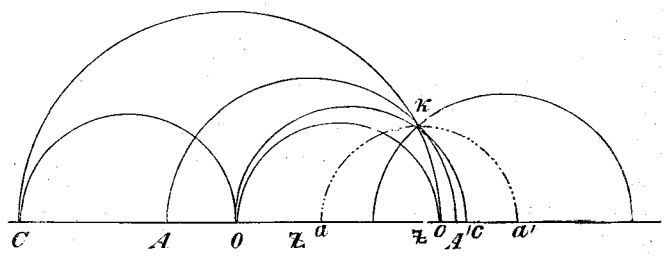
Но при новой точкѣ зрѣнія обѣ пары точекъ AA' и aa' получаютъ равное значеніе, почему съ равнымъ правомъ за постоянный мы можемъ принять кругъ z, и тогда кругъ Z находится по данному положенію перемѣнной точки c совершенно такъ же, какъ кругъ z по той же точкѣ выводился изъ Z.

Но точка O есть точка, сопряженная C по отношенію къ парѣ AA'; если за постоянную беремъ пару aa', то и точку O мы должны замѣнить точкою o, сопряженною точкѣ C по отношенію къ парѣ aa'; и при этой замѣнѣ построеніе должно остаться то же, если возьмемъ за перемѣнную точку, соотвѣтствующую бывшей перемѣнной o, теперь принятой за постоянную. Ясно, что эта соотвѣтственная точка и есть точка O, которую мы теперь разсматриваемъ какъ перемѣнную.

Итакъ примемъ пару AA' и точку C (слѣдовательно и точку O) за постоянныя и будетъ мѣнять положеніе точки o. Ясно, что въ зависимости отъ этого положенія какъ уже и было отмѣчено выше, нетолько вообще измѣняется положеніе сопряженной пары aa', но она можетъ стать мнимою. Это произойдетъ, если точки o и C будутъ раздѣлены парою AA'.

Нетрудно видѣть однако, что обѣ пары AA' и aa' одновременно мнимыми быть не могутъ. Это будетъ доказано, если за постоянную возьмемъ именно мнимую пару aa' и докажемъ, что при произвольномъ положеніи точекъ C и O всегда получимъ вещественную пару AA' и точку o (фиг. 3).

Фиг. 3.



Въ самомъ дѣлѣ, принявъ сопряженныя пары точекъ за концы діаметровъ круговъ, найдемъ, что

искомый кругъ есть ортогональный кругъ примы, опредѣленной двумя данными кругами: вещественнымъ OC и мнимымъ aa'; этотъ кругъ AA' долженъ проходить чрезъ точку k вертикальнаго радіуса zk мнимаго круга и прямоугольно пересѣкать кругъ OC, чѣмъ онъ вполнѣ и опредѣляется; но теперь не можетъ быть мнимаго рѣшенія, такъ какъ всегда чрезъ точку, гдѣ бы она ни находилась, можно провести кругъ, пересѣкающій OC подъ прямымъ угломъ; это и будетъ одинъ изъ круговъ примы съ ортогональнымъ кругомъ OC, а именно проходящій чрезъ точку k, а таковыя можно провести чрезъ любую точку плоскости. Точка o опредѣлится какъ сопряженная съ точкою C по отношенію къ мнимой парѣ aa'.

Согласно вышесказанному, эта задача легко рѣшается и если даны точки O и o.

По кругу Oo и данному мнимому кругу опредѣляемъ линейную приму; она имѣетъ вещественный ортогональный кругъ, проходящій, чрезъ точку k и прямоугольно пересѣкающій кругъ Oo. Искомый кругъ AA' есть тотъ кругъ этой примы, который мнимо ортогонально пересѣкаетъ данный мнимый кругъ то есть просто проходитъ чрезъ точку k; чрезъ каждую же данную точку можно провести лишь одинъ кругъ линейной примы; и этотъ кругъ и есть искомый кругъ AA'.

Какъ точка C сопряжена съ O по отношенію къ парѣ AA', такъ имѣется точка c, сопряженная съ O по отношенію къ парѣ aa'. Эта двойная сопряженность вызываетъ инволюцію, которой принадлежитъ пара Cc. Этой же инволюціи, согласно вышепоказанному, принадлежатъ и пары AA' и aa'; слѣдовательно эта та же инволюція, которая разсмотрѣна выше и которой принадлежитъ также пара Oo.

Мы пришли къ весьма замѣчательному, гармоническому, сочетанію паръ, равно какъ и круговъ, для которыхъ эти пары служатъ діаметрами.

Прежде всего ясно, что въ точкѣ k пересѣкаются четыре гармоническіе круга одной примы (съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ). Въ самомъ дѣлѣ, по отношенію къ кругу Z сопряжены пары C съ O, a съ a', c съ o. Если примемъ кругъ Z за кругъ преобразованія обратными радіусами, то онъ, равно какъ и кругъ z, преобразуются сами въ себя, а пары другихъ круговъ преобразуется другъ въ друга. Первые два круга въ точкѣ k пересѣкаются прямоугольно, а оба остальные подъ равными углами къ первымъ двумъ, такъ что касательныя къ первымъ есть биссектрисы двухъ другихъ касательныхъ въ точкѣ κ; перпендикуляры къ касательнымъ въ точкѣ κ (нормали) пересѣкаютъ централь въ центрахъ самихъ круговъ. Поэтому сами центры образуютъ четыре гармоническія точки, сопряженныя пары которыхъ соотвѣтствуютъ самимъ кругамъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ новому выраженію коррелятивности между точками и парами на прямой.

Мы принимаемъ эти точки за центры круговъ одной линейной примы, имѣющихъ общія двѣ точки: k и симметрическую съ нею относительно централи примы. Центры круговъ, находящіеся въ согласномъ положеніи съ самими кругами, и есть среднія точки коррелятивныхъ паръ, даваемыхъ на централи діаметрами круговъ.

Такъ какъ при этомъ и пары точекъ находятся въ особомъ положеніи относительно круговъ, которое можно назвать согласнымъ, то также и возникающее отсюда особое положеніе точекъ (какъ срединъ) по отношенію къ коррелятивнымъ имъ парамъ, также можно назвать согласнымъ.

Такимъ образомъ мы подошли къ болѣе общему выводу коррелятивности точекъ и паръ и имѣемъ возможность перейти къ самому общему, если раздѣлимъ приму точекъ отъ примы коррелятивныхъ паръ.

Но эти же результаты даютъ намъ возможность намѣтить систему паръ точекъ вообще то есть установить систему, въ которой элементами были бы пары точекъ. Пока ограничусь замѣчаніемъ, что какъ четыре гармоническія точки опредѣляютъ двѣ различныя инволюціи съ сопряженными парами точекъ, такъ четыре гармоническія пары точекъ опредѣляютъ двѣ различныя инволюціи съ сопряженными парами паръ точекъ. Существенное различіе между обѣими системами выражается уже въ томъ, что въ системѣ точекъ имѣются только вещественные элементы и выраженіе „мнимыя точки“ (конечно только не мнимыя двойныя точки, какъ опредѣляющіе инволюцію 2-го вида и конечно съ вещественными парами точекъ, не имѣетъ опредѣленнаго смысла; въ системѣ же паръ точекъ возможны и мнимыя пары.

Мы уже видѣли, что возможность мнимости пары aa' обусловливается относительнымъ положеніемъ паръ AA' и Cc.

При расширенной новой точкѣ зрѣнія мы можемъ поставить это въ зависимость отъ относительнаго положенія *равнозначныхъ* паръ Cc и Oo; а именно, если эти пары раздѣляются другъ другомъ, то всѣ четыре гармоническія пары вещественные,

если эти пары не раздѣляются, то одна изъ остальныхъ двухъ паръ можетъ быть мнима.

Въ самомъ дѣлѣ, для того, чтобы посреди остальныхъ паръ инволюціи явились бы мнимыя, совершенно необходимо, чтобы между ними были возможны и точечныя пары; а это условіе конечно невыполнимо, если пары обязательно раздѣляются постоянными точками.

Но, по только что объясненному, мнимыми могутъ быть только пары, а не точки, сопряженныя съ этими парами, такъ какъ вообще въ инволюціи точекъ нѣтъ мнимыхъ. Подробнѣе случай мнимости паръ размотримъ ниже.

Переходя къ системѣ паръ точекъ на плоскости, опредѣляемой коническимъ сѣченіемъ K и центромъ примы лучей O, мы должны прежде всего оговорить, что вся система должна быть выведена изъ этихъ данныхъ однозначно, и потому никакихъ другихъ параметровъ для ея опредѣленія, параметровъ, которые мы можемъ измѣнять, вводить теперь уже нельзя.

Для опредѣленности соображеній примемъ, что точка O находится внѣ кривой K. Всѣ вообще пары точекъ могутъ быть однозначно опредѣляемы всѣми точками плоскости, хотя по всякой данной одной точкѣ a пары легко, по приведеннымъ даннымъ, опредѣлить ея сопряженную, такъ какъ всякій лучъ изъ O въ присутствіи кривой K распадается на инволюцію точекъ: 1-го вида, если онъ пересѣкаетъ и 2-го вида, если онъ не пересѣкаетъ кривой (фиг. 4).

Ясно, что точку O нельзя принять за общую постоянную точку на всѣхъ лучахъ, такъ какъ при этомъ допущеніи на касательной Ot, (гдѣ t точка касанія) той же точкѣ, какъ точкѣ плоскости, соотвѣтствовала бы сопряженная пара, представленная ею и точкою касанія t, между тѣмъ какъ послѣдняя сама себѣ сопряжена на этомъ лучѣ то есть представляетъ точечный отрѣзокъ. Если же мы примемъ точку t за постоянную, а точку O за точку на плоскости, сопряженную нѣкоторой парѣ, то для полученія пары мы имѣемъ два круга инволюціи: одинъ точечный кругъ t и другой, имѣющій діаметромъ отрѣзокъ tO; третій кругъ опредѣляющій пару, долженъ проходить чрезъ точку t и прямоугольно пересѣкать кругъ tO; таковой и есть самъ точечный кругъ t, и значитъ на этомъ лучѣ центру O (какъ и всѣмъ точкамъ вообще) сопряжена точечная пара t. То же имѣемъ и для другой точки касанія t_1; и вотъ прямая tt_1 то есть поляра точки O по отношенію къ кривой K и есть геометрическое мѣсто постоянныхъ точекъ C на всѣхъ лучахъ.

Преобразованіе обратными радіусами или реципрочное въ тѣсномъ символѣ слова предполагаетъ присутствіе нѣкотораго цикла, сферы или, общнѣе, нѣкоторой сферической совокупности (сферопримы), сферосекунды, сферотерціи и т. д.), по отношенію которой преобразуемая точка или вообще элементъ замѣщается сопряженнымъ. Два элемента сопряжены другъ съ другомъ по отношенію къ этой совокупности, и ихъ пара, разсматриваемая въ совокупности, составляетъ реципрочную пару.

Если вмѣсто одного элемента мы возьмемъ какую нибудь совокупность напр. нѣкоторую приму, въ частности кривую, то она реципрочно преобразуется въ сопряженную совокупность, и обѣ совокупности взяты вмѣстѣ, какъ однозначно связанныя другъ съ другомъ, могутъ разсматриваться какъ одна реципрочная совокупность. Напр. какой-нибудь кругъ въ присутствіи круга преобразованія R обратными радіусами преобразуется въ кругъ же, и сба круга вмѣстѣ, составляютъ реципрочную кривую то есть пару круговъ.

Теперь мы имѣемъ дѣло съ обобщеніемъ реципрочныхъ преобразованій, взявъ вмѣсто сферическихъ совокупностей для преобразованія совокупности обобщенныя (конопримы, коносекунды и т. п.). Поэтому мы должны отмѣтить эту обобщенность и въ ея словесномъ выраженіи.

Мы условимся называть такое обобщенное преобразованіе конореципрочнымъ (реципрочное же преобразованіе въ тѣсномъ смыслѣ можетъ быть обозначено сферореципрочнымъ), и тогда легко понять точный смыслъ выраженій конореципрочность, конореципрочныя совокупности, конореципрочныя пары.

По сдѣланному опредѣленію, съ этими понятіями связана нетолько обобщенная совокупность, обусловливающая преобразованіе то есть напр. коническое сѣченіе вмѣсто круга, но и положеніе особой точки, какъ центра лучей преобразованія. Поэтому это обобщенное выраженіе должно сохраняться и въ томъ случаѣ, если для преобразованія возьмемъ и сферическую совокупность, но за центръ лучей преобразованія примемъ вообще произвольный элементъ напр. возьмемъ кругъ и произвольную точку въ плоскости какъ центръ лучей преобразованія.

Согласно этимъ замѣчаніямъ, для рѣшенія поставленной задачи въ этой статьѣ должна быть рѣчь о конореципрочности и соотвѣтственныхъ образованіяхъ; но такъ какъ здѣсь рѣчь идетъ только о нихъ однихъ, то, ради краткости, мы можемъ говорить просто о реципрочности.

Какъ мы видѣли, пара реципрочныхъ точекъ однозначно опредѣляется произвольною точкою c,

какъ сопряженною этой парѣ по отношенію къ кривой K и постоянной прямой tt_1. Какъ бы произвольно мы ни брали въ плоскости эту точку, всегда каждой точкѣ этой примы будетъ соотвѣтствовать сопряженная пара, а совокупность паръ составитъ нѣкоторую реципрочную совокупность, сопряженную совокупности точекъ.

На томъ лучѣ, гдѣ точка встрѣтитъ прямую tt_1, сопряженная ей пара будетъ состоять изъ той же точки и другой, гармонически сопряженной съ нею по отношенію къ кривой K, а таковою по отношенію ко всѣмъ точкамъ tt_1, является точка O, какъ полюсъ прямой tt_1 по отношенію къ этой кривой.

Однако, при этомъ соображеніи имѣется въ виду, что лучъ пересѣкаетъ кривую K въ нѣкоторыхъ двухъ вещественныхъ точкахъ. Если же это лучъ, касательный къ кривой K, то точкѣ c на прямой tt_1 сопряжена пара, изъ которой одна есть сама эта точка, а другая точка пары неопредѣленна, благодаря точечной инволюціи на этомъ лучѣ.

Итакъ, если реципрочная кривая пересѣкаетъ tt_1 въ одной изъ точекъ касанія, то реципрочная ей точка не есть непремѣнно точка O, и на лучѣ непосредственно опредѣлена быть не можетъ.

Такъ какъ точка, сопряженная реципрочной парѣ, есть четвертая гармоническая по отношенію къ этой парѣ и точкѣ прямой tt_1 на лучѣ, то если пара сливается въ одну двойную точку, то съ нею же совпадаетъ и сама сопряженная точка. Понятно, что такая точка есть точка пересѣченія реципрочной кривой съ кривою K, и что она же есть точка касанія нѣкотораго луча къ этой реципрочной кривой.

Чтобы вывести линейную прииу реципрочныхъ паръ, мы должны опредѣлить такую совокупность, которая опредѣлялась бы однозначно по произвольно взятымъ двумъ парамъ и постояннымъ параметрамъ системы. Но обѣ пары намъ удобнѣе замѣнить сопряженными имъ двумя точками, и, кромѣ того, въ качествѣ постоянныхъ системы мы имѣемъ, при данномъ заданіи, центръ лучей O и точки касанія t и t_1 то есть всего пять точекъ.

Изъ статьи „Возможность разныхъ геометрическихъ системъ при одной и той же полной совокупности элементовъ“ мы знаемъ, что при опредѣленной означенными условіями полной совокупности можно вывести разныя линейныя примы и значитъ установить разныя системы.

Дѣйствительно, проще всего представляется составленіе линейной примы, принявъ за геометрическое мѣсто точекъ, сопряженныхъ ея элементамъ, прямую линію. Ясно, что необходимыя и достаточныя условія установленія геометрической системы такимъ образомъ соблюдаются то-есть линейная прима 1) опредѣляется по двумъ элементамъ однозначно и 2) она сохраняется тождественно при замѣнѣ этихъ двумя произвольно взятыми элементами этой примы.

Но эту систему, которую мы можемъ означить системою точекъ, сопряженныхъ гармоническимъ парамъ, нельзя разсматривать какъ расширеніе системы гармоническихъ отрѣзковъ, а какъ расширеніе системы среднихъ точекъ гармоническихъ паръ.

Какъ на такое расширеніе можно смотрѣть на слѣдующую систему: за геометрическое мѣсто точекъ, сопряженныхъ гармоническимъ парамъ, принимается кругъ, проходящій чрезъ двѣ точки, сопряженныя двумъ даннымъ парамъ и чрезъ центръ лучей O.

Хотя, согласно извѣстному критерію для установленія системъ, такая система несомнѣнно существуетъ, однако и для нея реципрочная кривая (проходящая, какъ и въ предъидущей системѣ, чрезъ центръ O) есть кривая выше 2-го порядка.

Не приводя непосредственнаго и прямого доказательства этого, я дамъ этому выводу косвенное (и притомъ общее для всякихъ возможныхъ въ этомъ случаѣ системъ кромѣ одной) тѣмъ, что докажу существованіе единственной возможной системы, для которой линейная прима гармоническихъ паръ точекъ есть коническое сѣченіе. На этой системѣ слѣдуетъ подробнѣе остановиться и по тѣмъ интереснымъ геометрическимъ соотношеніямъ, которыя раскрываются при ея изученіи.

Итакъ, въ основаніе изслѣдованія кладу допущеніе, что такая система существуетъ, и если удастся показать, что по произвольно даннымъ двумъ парамъ точекъ дѣйствительно можно въ качествѣ линейной примы воспроизвести одну, и только одну кривую второго порядка, то этимъ и будетъ достигнуто все, что требуется доказать.

Прежде всего ясно, что если даны двѣ пары точекъ aa' и bb', то искомая кривая должна пройти чрезъ нихъ; а такъ какъ коническое сѣченіе однозначно опредѣляется 5-ю точками, то достаточно найти хоть одну еще точку этой кривой, чтобы кривая была вполнѣ опредѣлена.

Примемъ aa' bb' за полный четырехугольникъ, коего діагональными точками будутъ точки O, p и q, чѣмъ опредѣляется и всѣ шесть его сторонъ.

Эти три точки, изъ коихъ точка O есть центръ лучей, составляютъ такъ называемую полярную

тройню[1]) (polarer Tripel) по отношенію ко всѣмъ кривымъ (конечно 2-го порядка), проходящимъ чрезъ данныя четыре точки (и, какъ извѣстно изъ работъ Штейнера, составляющимъ линейную приму этихъ кривыхъ Kegelschnittbüschel), обладающаго тѣмъ свойствомъ, что каждая изъ нихъ есть полюсъ противоположной стороны, какъ поляры.

Но если діагональ pq есть поляра точки O, то точки пересѣченія ея T и T_1 съ данною кривою K есть въ то же время точки касанія реципрочной K' къ лучамъ, проведеннымъ изъ O, потому что точки касанія есть двойныя реципрочныя точки или точечныя пары, а таковыми могутъ быть лишь точки кривой K'.

Или обратно, точки T и T_1 пересѣченія діагонали pq съ кривою K есть единственныя точечныя пары этой поляры точки O, и значитъ онѣ есть точки касанія реципрочной кривой къ прямымъ проведеннымъ изъ полюса O.

Этимъ дается фундаментальное доказательство предположеннаго, такъ какъ изъ простого допущенія, что реципрочная кривая есть коническое сѣченіе непосредственно выведено три пары точекъ этого коническаго сѣченія, и значитъ сама кривая опредѣляется однозначно по двумъ парамъ произвольно заданныхъ реципрочныхъ точекъ (фиг. 4).

Итакъ, если вообще существуетъ реципрочное коническое сѣченіе, опредѣляемое двумя парами точекъ, то оно можетъ быть лишь одно, которое и составитъ линейную приму данной системы. Всѣ же остальныя реципрочныя кривыя, которыя при данной полной совокупности элементовъ могутъ быть приняты за линейныя примы, должны быть кривыя порядка высшаго, чѣмъ второго.

Но теперь нужно доказать, что опредѣленное коническое сѣченіе есть дѣйствительно реципрочная кривая, то есть что всѣми остальными лучами она пересѣкается въ парѣ реципрочныхъ точекъ.

Однако предварительно разсмотримъ замѣчательныя соотношенія, существующія между двумя найденными коническими сѣченіями.

Прежде всего нельзя не видѣть ихъ полной соотносительности, то есть все то, что мы (въ смыслѣ позиціонныхъ построеній) можемъ сказать объ одной изъ нихъ, мы можемъ повторить о другой.

Это слѣдуетъ изъ того, что если за данное коническое сѣченіе мы примемъ не кривую K, а кривую K' при той же общей точкѣ O какъ центрѣ лучей, а за перемѣнныя пары примемъ не aa' и bb', а AA' и BB', то въ качествѣ реципрочной кривой получимъ коническое сѣченіе K.

Въ самомъ дѣлѣ, эта кривая должна пройти чрезъ четыре упомянутыя точки, которыя мы также можемъ принять за четыре вершины полнаго четырехугольника; получимъ три діагональныя точки P, Q и ту же общую точку O, и эти три точки составятъ полярную тройню, почему точка O будетъ полюсомъ прямой tt_1 по отношенію ко всей линейной примѣ коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ тѣ же четыре общія точки. Прямыя Ot и Ot_1 есть касательныя къ кривой K, а точки касанія t и t_1 единственныя двойныя точки инволюціи на этой прямой и ислѣдовательно также принадлежатъ кривой.

Такимъ образомъ мы получили уже по восьми точекъ для каждой изъ кривыхъ K и K' и для каждой по особой полярѣ общей точки O. Эти двѣ поляры пересѣкаются въ точкѣ x, которая является сопряженною точкѣ O по отношенію ко всѣхъ кривымъ линейной примы съ общими четырьмя точками $tt_1\ TT_1$. Съ другой стороны, точка y есть одна изъ точекъ тройнее xyz, полярной по отношенію ко всѣмъ кривымъ линейной примы, проходящимъ чрезъ упомянутыя четыре общія точки, и значитъ x сопряжена всѣмъ точкамъ прямой yz, а прямой yz принадлежитъ и точка O.

Мы можемъ стать и на другую точку зрѣнія, принявъ точку O' за общій центръ лучей, если O' есть полюсъ прямой TT_1 относительно K', какъ O есть полюсъ прямой tt_1 относительно K; и какъ та же точка O есть полюсъ прямой TT_1 относительно K', такъ точка O' есть полюсъ прямой tt_1 относительно K. Этимъ устанавливается особая двусторонняя точка зрѣнія на разсматриваемую систему, въ которой соотносительную роль играютъ кривыя K и K', поляры tt_1 и TT_1 и ихъ полюсы O и O'.

На каждой изъ этихъ поляръ устанавливается инволюція, и обѣ инволюціи связаны проективностью, такъ что каждой точкѣ одной гомологична одна опредѣленная точка другой; она устанавливается по соотвѣтствіи точекъ t съ T и t_1 съ T_1 и самогомологичной точкѣ x. Итакъ обѣ инволюціи находятся въ перспективномъ положеніи, и центромъ перспективы служитъ точка пересѣченія прямыхъ $t_1\ T$ и $t\ T_1$; въ этой перспективѣ гомологичны и точки x_1 и x_1', какъ сопряженныя точкѣ x на обѣихъ прямыхъ; и такъ какъ центръ перспективы долженъ одновременно находиться на прямой OO' и на прямой xy, сопряженной съ xz, то этотъ центръ есть точка y. Въ частности, чрезъ него проходятъ и лучи Pp и Qq.

[1]) Или просто полярный трехугольникъ, хотя это выраженіе, какъ терминъ, ведетъ къ двусмыслію.

Мы можемъ придать изученному двойственному отношенію этой системы болѣе наглядный видъ, если произведемъ такое коллинеарное преобразованіе, чтобы четырехугольникъ $tt_1\ TT_1$ сталъ квадратомъ [1]), для чего, между прочимъ, нужно прямую xz принять за ось инволюціи, отчего всѣ ея точки, въ томъ числѣ x и z станутъ безконечно удаленными. Тогда точка y преобразуется въ центръ квадрата и вмѣстѣ съ тѣмъ въ центръ кривыхъ всей л чейно" примы, опредѣляемой прохожденіемъ ихъ чрезъ вершины квадрата. Обѣ инволюціи на двухъ противоположныхъ сторонахъ квадрата станутъ равными, а точка O окажется на лучѣ, проведенномъ изъ центра квадрата параллельно другой парѣ сторонъ, и притомъ касагельныя изъ нея, проведенныя къ обѣимъ реципрочнымъ кривымъ, точками касанія будутъ имѣть именно вершины квадрата; касательныя же изъ z станутъ параллельными прямой zO, то-есть одной парѣ сторонъ квадрата.

Ясно, что изъ двухъ преобразованныхъ такимъ образомъ кривыхъ, одна будетъ эллипсъ, а другая гипербола, и обѣ будутъ имѣть общими нетолько четыре вершины квадрата и центръ, но и слѣдъ плоскости симметріи Oz.

Кромѣ кривыхъ K и K' имѣется еще одно особое коническое сѣченіе, принадлежащее той же линейной примѣ, то-есть проходящее чрезъ тѣ же четыре точки $t\,t_1\ T\,T_1$ и выводимое однозначно изъ параметровъ системы, а именно проходящее еще чрезъ точки O и O'.

Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ принять эти точки за центры двухъ примъ гомологичныхъ лучей, для опредѣленія гомологичности которыхъ достаточно взять три изъ четырехъ общихъ точекъ кривыхъ. Что кривая, опредѣленная тремя точками, напр. t, t_1 и T, пройдетъ и чрезъ четвертую T_1, видно изъ слѣдующаго.

Всякая вообще сѣкущая (трансверсаль) пересѣкаетъ линѣйную приму коническихъ сѣченій въ инволюціи, сопряженными точками которой будутъ точки пересѣченія одной изъ кривыхъ примы. Въ данномъ случаѣ на трехъ лучахъ изъ y мы имѣемъ на одномъ инволюцію, опредѣленную двойными точками t_1 и T, на другомъ инволюцію, опредѣленную двойными точками t и T_1 и на третьемъ инволюцію, опредѣленную двумя двойными точками y и z, которой принадлежитъ какъ пара точекъ пересѣченія съ кривою K, такъ и пара точекъ O и O', также какъ и пара точекъ x_1 и x'_1; первое непосредственно очевидно, также и послѣднее (вѣдь пара прямыхъ $xx_1\ xx_1'$ есть одно изъ коническихъ сѣченій данной примы); но, принявъ пару точекъ пересѣченія съ кривою K, найдемъ, что O сопряжена съ x_1', а O' сопряжена съ гомологичною точкою x_1; слѣдовательно, въ данной инволюціи O и O' являются сопряженными точками.

Итакъ, если кривая примы, проходящая чрезъ пары t и T_1 и t_1 съ T, проходитъ еще чрезъ O, она же проходитъ и чрезъ O'.

Изъ приведеннаго выше преобразованія становится особенно наглядным, что если кривая примы, проходящая чрезъ O, O', t, t_1, проходитъ еще чрезъ T, то она же проходитъ и чрезъ T_1, такъ какъ послѣ преобразованія прямая OO' становится слѣдомъ плоскости симметріи (главною осью) всѣхъ кривыхъ примы, а пары точекъ t съ t_1 и T съ T_1 парами симметричныхъ точекъ.

Но если третья кривая примы k проходитъ чрезъ O и O', то, такъ какъ полюсъ прямой OO' есть точка x, прямыя xO и xO' касательны къ этой кривой, а O и O' ея точки касанія.

Теперь легко доказать, что эта третья кривая k примы коническихъ сѣченій и есть кривая точекъ, сопряженныхъ парамъ точекъ кривой K' на соотвѣтственныхъ лучахъ.

Вообще на каждомъ лучѣ изъ O мы можемъ различать слѣдующія пары точекъ, значеніе которыхъ разсмотрѣно выше при опредѣленіи системы паръ точекъ на прямой. Пара aa' и есть та пара, которая тѣми же буквами отмѣчена выше; тоже AA'; изъ пары Oo, первая точка относится къ центру лучей, а вторая къ перемѣнной, опредѣляющей сопряженныя пары; C относится къ точкамъ поляры tt' точки O относительно K, а c къ точкамъ поляры TT_1 относительно K' (фиг. 1 стр. 324).

Такъ какъ каждая сѣкущая линейной примы коническихъ сѣченій содержитъ инволюцію точекъ въ которой сопряженными являются точки сѣченія одной кривой примы, а для опредѣленія инволюціи достаточно двухъ паръ сопряженныхъ точекъ, то на каждомъ лучѣ инволюція опредѣляется парами Cc и Oo, гдѣ o принадлежитъ особой кривой k, а O есть общая для всѣхъ лучей точка той же кривой.

Имѣя на каждомъ лучѣ разъ навсегда опредѣленныя постоянныя точки C, c и O и еще точку o кривой k, которая, въ свою очередь, однозначно опредѣляется по двумъ заданнымъ ея значеніямъ, мы легко на каждомъ лучѣ опредѣлимъ и точки A, A', a, a', которыя принадлежатъ обѣимъ сопряженнымъ кривымъ K и K'.

Какъ объяснено выше, эти двѣ пары есть сопряженныя пары четырехъ гармоническихъ паръ точекъ и соотвѣтствуютъ двумъ двойнымъ точкамъ

[1]) ср. Новая Геометрія IV 28.

(или лучамъ) инволюціи, а потому составляютъ четыре гармоническія точки (если только обѣ пары вещественны).

Весьма легко опредѣлить, когда одна изъ этихъ паръ мнима; обѣ же, какъ доказано выше, мнимыми быть не могутъ.

Съ этою цѣлью раздѣлимъ плоскость касательными Ot и Ot_1 на два угловые пространства.

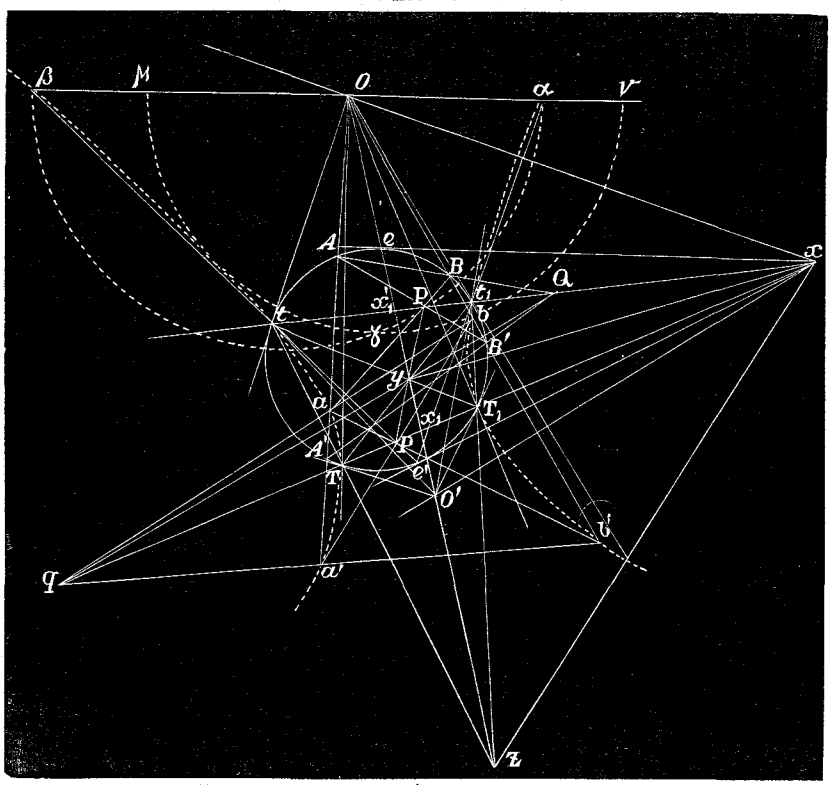
Въ пространствѣ, заключающемъ кривую K, конечно всѣ пары AA' вещественны. Помимо непосредственной очевидности, это вытекаетъ изъ того, что въ этомъ пространствѣ точки кривой k въ предѣлахъ между точками t и T и точками t_1 и T_1 находятся внутри кривой K и слѣдовательно пара Oo раздѣляется парою точекъ Cc на каждомъ изъ лучей; въ промежуткѣ же между точками T и T_1 точки Cc остаются между парою точекъ Oo; но такъ какъ въ этомъ промежуткѣ, то есть между касательными OT и OT_1 кривая K' пересѣкается лучами въ мнимыхъ точкахъ, то значитъ точки кривой K должны оставаться вещественными.

На всемъ остальномъ протяженіи кривой k, то-есть въ другомъ угловомъ пространствѣ точки пары Oo снова выходятъ за предѣлы постоянной пары Cc, то-есть не раздѣляются этою парою, и потому снова одна изъ сопряженныхъ кривыхъ, а именно K должна пересѣкаться лучами въ мнимыхъ парахъ.

То же мы можемъ повторить и относительно угловыхъ пространствъ, получаемыхъ раздѣленіемъ плоскости касательными OT и OT_1 съ тѣмъ лишь различіемъ, что на лучахъ, гдѣ пара Oo оставляетъ пару Cc посединѣ, мнимыми парами являются точки кривой K', а тамъ, гдѣ пара Oo не заключаетъ той же другой пары, мнимыми парами являются точки кривой K.

Всѣмъ изложеннымъ построеніе линейныхъ примъ паръ точекъ по двумъ даннымъ опредѣлено вполнѣ и для разсматриваемой здѣсь расширенной системы гармоническихъ паръ точекъ.

Фиг. 4.



ЛЕНИНГРАДСКАЯ

Это построеніе основывается на коррелятивномъ отношеніи точекъ c съ парами точекъ искомыхъ конорецинрочныхъ кривыхъ, и конечно интересъ представляютъ только вещественныя точки этихъ кривыхъ.

Однако, чтобы показать реальное значеніе для построеній также мнимыхъ точекъ, приведу слѣдующую задачу.

Пусть дана точка α кривой K' въ пространствѣ, гдѣ точки кривой K мнимы; опредѣлить сопряженную ей точку β пары той же кривой на лучѣ $O\alpha$.

На этомъ лучѣ, какъ на всякой сѣкущей, присутствіе кривой K вызываетъ инволюцію съ двумя мнимыми точками пересѣченія, которыя и есть мнимыя двойныя точки этой инволюціи, мнимыя потому, что вещественныхъ точекъ пересѣченія на такой прямой не имѣется. Пусть μ и ν есть эти двойныя точки. Принявъ ихъ за діаметръ круга, найдемъ, что этотъ кругъ есть мнимый ортогональный кругъ примы круговъ, находящихся въ согласномъ положеніи съ парами точекъ инволюціи. Поэтому, проведя чрезъ конецъ γ перпендикулярнаго радіуса другой кругъ примы, найдемъ сопряженную точку β, которая также принадлежитъ кривой K'.

Впрочемъ, какъ показалъ Штейнеръ, всѣ пары точекъ инволюціи можемъ получить, проведя изъ какой-нибудь точки O, луча двѣ касательныя къ кривой K, а точки касанія t и t_1 принять за центры примъ гомологичныхъ лучей, производящихъ кривую K. Тогда всякая точка кривой, соединенная прямыми съ точками t и t_1, отмѣчаетъ на лучѣ гомологичныя точки инволюціи. Слѣдовательно, имѣя точку α, можемъ и прямо получить точку β, если проведемъ прямыя $\alpha\, t_1$ до пересѣченія съ K въ точкѣ e' и $e'\, t$ до пересѣченія съ лучемъ въ точкѣ β.

Изъ всѣхъ лучей, исходящихъ изъ O, только на лучахъ, касательныхъ къ кривымъ K и K' получается точечная инволюція (parabolisches Punktsystem по Штейнеру), дающая неопредѣленныя результаты гомологичныхъ точекъ инволюціи. Для нихъ долженъ существовать особый законъ гомологичности.

Въ этомъ случаѣ изъ четырехъ паръ сопряженныхъ точекъ, A съ A', a съ a', O съ o и C съ c остается только двѣ пары, такъ какъ въ точкѣ касанія сливается пять точекъ, напр. въ точкѣ t сливаются точки A, A' o, C и a, и потому, кромѣ нея остается еще три точки O, c и a', и это будутъ четыре гармоническія точки, такъ какъ c принадлежитъ полярѣ точки O относительно кривой K'. Такимъ образомъ на всякомъ касательномъ лучѣ Ot_1 легко найти по тремъ четвертую гармоническую t_1', сопряженную съ t' и принадлежащую кривой К.

Изъ изложеннаго видно, что всякое коническое сѣченіе, проведенное чрезъ три постоянныя точки t, t_1 и O, есть геометрическое мѣсто точекъ, сопряженныхъ гармоническимъ парамъ точекъ реципрочной кривой, составляющей линейную приму паръ точекъ. Обѣ эти кривыя проективны поэтому съ нѣкоторою прямою на плоскости, и притомъ первая кривая гомологична, а вторая коррелятивна прямой, такъ какъ въ первой элементами являются точки же, а во второй пары точекъ. Полная совокупность кривыхъ k должна быть линейная секунда, также какъ и кривыхъ K',

Для первой изъ нихъ это слѣдствіе ясно, такъ какъ совокупность опредѣляется тремя постоянными (вещественными) точками. Но теперь мы можемъ утверждать, что полная совокупность коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ три общія точки, есть линейная секунда, именно въ силу гомологичности этой совокупности съ совокупностью прямыхъ на плоскости.

На томъ же основаніи мы можемъ утверждать, что линейную секунду образуетъ и полная совокупность кривыхъ K'. Чѣмъ же опредѣляется эта совокупность?

Ясно, что кромѣ двухъ общихъ точекъ t и t_1 она опредѣляется условіемъ гармонической сопряженности ея точекъ и точекъ кривой K на лучахъ изъ O. Поэтому, полная совокупность коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ двѣ общія точки и имѣющихъ гармонически сопряженныя съ парами кривой K пары точекъ на лучахъ, исходящихъ изъ точки O, въ которой пересѣкаются касательныя къ кривой K въ общихъ точкахъ обѣихъ кривыхъ, есть линейная секунда.

То замѣчательное соотношеніе между двумя кривыми K и K_1 и двумя точками O и O' (а именно, что всѣ лучи какъ изъ O, такъ и изъ O', пересѣкаютъ обѣ кривыя въ парахъ гармоническихъ точекъ), позволяетъ сказать, что онѣ сопряжены другъ съ другомъ по отношенію къ парѣ точекъ O и O'.

Это то же соотношеніе, что между двумя прямоугольно пересѣкающими другъ друга кругами, такъ какъ въ такой парѣ круговъ всѣ лучи изъ обоихъ центровъ круговъ пересѣкаютъ оба въ гармоническихъ парахъ точекъ. Третья кривая k примы соотвѣтствуетъ тому кругу, который имѣетъ діаметромъ отрѣзокъ между центрами обоихъ круговъ. Какъ извѣстно, точки этого круга есть средины хордъ круга, проведенныхъ изъ центровъ сопряженнаго круга. Четвертыя гармоническія въ этомъ спеціальномъ случаѣ есть точки въ безконечности то есть точки поляръ центровъ обоихъ круговъ. Точка x въ этомъ случаѣ есть точка пересѣченія двухъ безконечно-удаленныхъ прямыхъ то есть также точка въ безконечности, и касательныя изъ нея къ кругу k есть точки O и O' то есть центры обоихъ круговъ. Этимъ замѣчаніемъ наглядно обрисовывается характеръ сдѣланнаго здѣсь обобщенія. Это замѣчаніе логически ведетъ за собою другое.

Три круга, о которыхъ рѣчь, есть три гармони-

ческіе круга примы, четвертымъ же будетъ общасѣкущая, какъ кругъ, имѣющій центръ въ безконечности. Въ точкахъ общаго пересѣченія касательныя образуютъ четыре гармоническіе луча, а центры четыре гармоническія точки на централи; изъ четырехъ круговъ k и прямая играютъ роль двойныхъ точекъ инволюціи на прямой. Въ нашемъ случаѣ мы имѣемъ аналогичную инволюцію кривыхъ съ двумя перемѣнными K и K_1 и двойными кривыми k и парою прямыхъ (особою кривою примы) txT. Эти четыре кривыя примы мы можемъ назвать гармоническими.

Такъ какъ пары касательныхъ въ точкахъ t и t_1, а также въ точкахъ T и T_1 къ особой кривой, есть сама эта кривая (пара прямыхъ), то касательныя къ кривой k въ тѣхъ же точкахъ есть четвертые гармоническіе лучи въ нихъ.

Пока мы разсмотрѣли случай, когда точка O находится внѣ коническаго сѣченія K. Нетрудно перейти отъ общаго рѣшенія въ этомъ случаѣ къ рѣшенію вопроса и въ томъ случаѣ, когда O дана внутри K.

Прежде всего ясно, что въ этомъ случаѣ изъ O нельзя провести къ K вещественныхъ касательныхъ и слѣдовательно тѣ двѣ точки t и t_1, которымъ принадлежитъ первенствующая роль въ разсматриваемыхъ построеніяхъ есть точки мнимыя, а именно мнимыя двойныя точки то есть общія сопряженныя мнимыя точки по отношенію къ коническимъ сѣченіямъ всей линейной примы, опредѣляемой кривыми K и K'; въ ея составъ входитъ и кривая k, какъ та кривая этой примы, которая проходитъ чрезъ точку O (а въ линейной примѣ коническихъ сѣченій чрезъ каждую точку плоскости проходитъ одна, и всего одна кривая).

Такимъ образомъ, эта прима характеризуется четырьмя общими точками, изъ коихъ пара T и T_1 вещественныхъ, а пара t и t_1 мнимыхъ точекъ.

Находятся эти двѣ мнимыя точки просто какъ двѣ мнимыя точки пересѣченія кривой K полярою точки O относительно этой кривой; такъ какъ эти двѣ мнимыя точки есть точки общія для всѣхъ кривыхъ примы, то значитъ достаточно ихъ опредѣлить относительно одной изъ нихъ.

Какъ извѣстно, въ инволюціи, опредѣляемой парою двойныхъ мнимыхъ точекъ, всѣ пары точекъ инволюціи необходимо вещественны, и онѣ показаны на фиг. 5 въ связи съ примою круговъ, имѣющею мнимый ортогональный кругъ съ діаметромъ $t\,t_1$.

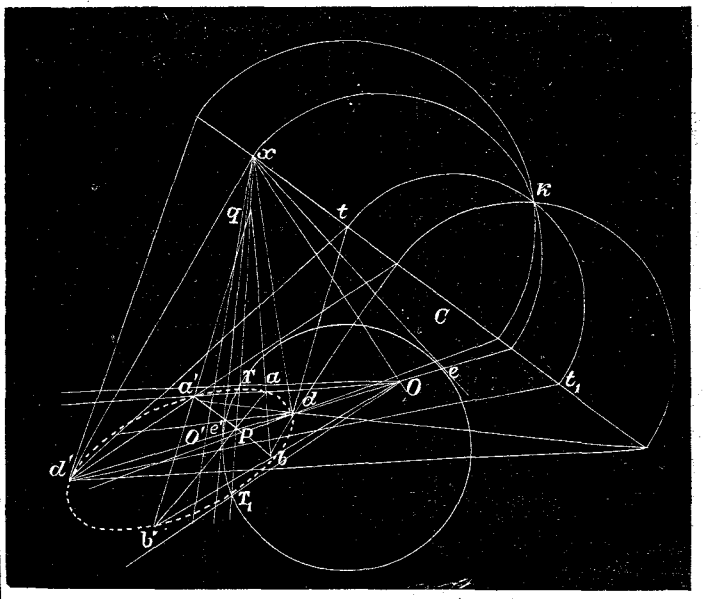
На фиг. 5 реально изображено построеніе реципрочной кривой по этимъ даннымъ.

По даннымъ двумъ точкамъ a и b на лучахъ изъ O находимъ имъ сопряженныя a' и b' по отношенію къ данному коническому сѣченію, вычерченному сплошною линію.

Полный четырехугольникъ $aa'bb'$, имѣющій одною изъ діагональныхъ точекъ точку O, опредѣляетъ и двѣ другія, p и q; прямая pq и есть поляра точки O по отношенію къ искомой кривой, а потому точки T и T_1 ея пересѣченія съ данною кривою есть точки касанія искомой кривой къ лучамъ, проведеннымъ изъ O.

На лучѣ Op инволюція точекъ опредѣляется двумя сопряженными парами, а именно O съ p и точками данной кривой ee' на этомъ лучѣ. Ясно, что это инволюція 1-го вида, а потому легко находимъ вещественныя двойныя точки d и d', которыя также будутъ точками касанія искомой кривой къ лучамъ, проведеннымъ изъ полюса x прямой Op

Фиг. 6.



по отношенію къ обѣимъ кривымъ, потому что x есть точка пересѣченія обѣихъ поляръ точки O (pq и Cx).

Найдя же точки d и d', легко опредѣлимъ сколько угодно точекъ искомой кривой, проводя чрезъ эти точки лучи изъ двухъ сопряженныхъ точекъ инволюціи на Cx до взаимнаго пересѣченія; точки пересѣченія и принадлежатъ искомой кривой.

Точки кривой k есть точки, сопряженныя точкамъ поляры TT_1 на каждомъ лучѣ изъ O по отношенію къ данной кривой. Ясно, что точки эти выходятъ за предѣлы обѣихъ поляръ лишь въ про-

межуткѣ TT_1; отсюда слѣдуетъ, что только въ этомъ промежуткѣ получаемъ на лучахъ для кривой K' вещественныя точки, Ox есть одна изъ касательныхъ этой кривой (а другая касательная пройдетъ чрезъ точку O', сопряженную точкѣ p на лучѣ Op).

Въ особомъ частномъ случаѣ, когда данная кривая есть пара пересѣкающихся въ точкѣ t прямыхъ, мы получаемъ ту особенность, что полный четырехугольномъ tt_1TT_1 ставится трехугольникомъ, такъ какъ сливаются въ одну точку t и t_1; дѣйствительно, изъ O къ этой кривой можно провести лишь одну двойную касательную Ot. По этой причинѣ діагональныя точки y и z сливаются въ одну, и изъ тройни сопряженныхъ точекъ $x\ y\ z$, мы получаемъ двойню xt, такъ какъ и y, и z совпадаютъ теперь съ точкою t. Какія бы двѣ пары сопряженныхъ точекъ мы ни выбрали за элементы для составленія линейной примы, кривая, представляющая эту приму, а слѣдовательно и сопряженная съ нею кривая, необходимо пройдутъ чрезъ постоянную точку t, и будутъ въ ней касательными къ полярѣ точки O относительно данной особой кривой.

Точка O' для всѣхъ кривыхъ сольется съ точкою t, и всѣ кривыя сопряженной секунды будутъ имѣть эту точку общею точкою касанія, а проходящую чрезъ нея поляру (четвертый гармоническій лучъ изъ t, сопряженный лучу tO) общею касательною.

При всѣхъ построеніяхъ этой системы, мы производимъ соотвѣтственное построеніе съ точками c, коррелятивными парамъ, какъ элементамъ системы.

Поэтому, обращаясь къ слѣдующему вопросу о воспроизведеніи сферо-примъ, мы должны задаться вопросомъ объ условіяхъ, коимъ должна удовлетворить сферо-прима точекъ c.

Эти условія для всѣхъ системъ слѣдующія: 1) сферо-прима должна однозначно опредѣляться тремя произвольно взятыми элементами системы и 2) она можетъ имѣть съ каждой линейной примой или двѣ, или ни одной вещественной точки (мнимые элементы пересѣченія).

Конечно, прежде всего представляется предположеніе, что сферо-прима будетъ кругъ, опредѣляемый данными тремя точками.

Но хотя это построеніе и выдерживаетъ первый критерій, но оно не выдерживаетъ второго, такъ какъ совершенно очевидно, что вообще мы можемъ вообразить такой кругъ, который пересѣчетъ линейную приму то есть въ данной системѣ кривую вторую порядка въ четырехъ вещественныхъ точкахъ.

Остается воспользоваться для построенія сферо-примы постоянными параметрами системы то есть въ данномъ случаѣ тѣми же двумя точками касанія t и t_1 [1]), чѣмъ кривая второго порядка дѣйствительно и опредѣляется однозначно. Что эта сферо-прима дѣйствительно не будетъ имѣть съ линейною примою больше двухъ вещественныхъ, общихъ точекъ, видно изъ того, что вообще два коническія сѣченія на плоскости могутъ пересѣчься не больше, чѣмъ въ двухъ парахъ точекъ. Въ данномъ случаѣ одна пара есть пара точекъ t и t_1, постоянныхъ для системы, которымъ на лучахъ соотвѣтствуетъ точечная инволюція.

Какъ въ системѣ точекъ на плоскости, если чрезъ двѣ данныя точки мы проведемъ прямую и какой-нибудь кругъ (или же два произвольные круга), то ими двумя однозначно опредѣляется линейная прима круговъ (съ мнимымъ ортогональнымъ кругомъ), такъ, въ виду позиціонности этого построенія, это должно имѣть мѣсто для всѣхъ системъ.

Въ данномъ случаѣ черезъ каждыя данныя двѣ точки a и b, мы можемъ провести сферу-приму и линейную приму точекъ c, и обѣ будутъ имѣть общими четыре точки; кромѣ данныхъ онѣ проходятъ еще черезъ точки t и t_1 и значитъ дѣйствительно принадлежатъ одной линейной примѣ коническихъ сѣченій съ четырьмя общими вещественными точками. Въ этой примѣ линейная прима, проходящая еще чрезъ точку O, будетъ играть роль того, что въ системѣ точекъ называется радикальною осью примы.

Если бы сферо-прима не имѣла съ линейною примою иныхъ общихъ точекъ (вещественныхъ) кромѣ tt_1, то это соотвѣтствовало бы случаю линейной примы круговъ съ двумя точечными кругами.

Конечно, въ данной системѣ точечныхъ сферо-примъ существовать не можетъ, такъ какъ каждая изъ нихъ необходимо проходитъ чрезъ пару точекъ t и t_1. Это и не нужно для соотвѣтствія однородныхъ образованій въ разныхъ системахъ, такъ какъ метрическія свойства не относятся къ позиціоннымъ и не передаются отъ одной системы къ другой.

Какъ особо простой примѣръ такой примы можемъ привести приму круговъ, проходящихъ чрезъ точки t и t_1.

---

1) Точнѣе и общнѣе сказать двумя двойными точками пересѣченія кривой K полярою точки O; эти точки пересѣченія могутъ быть вещественныя (и тогда онѣ есть точки касанія) или мнимыя (если O находится внутри кривой).

По сдѣланному опредѣленію эти круги и для этой системы будутъ кругами то есть сферопримами, и только тотъ кругъ, который пройдетъ чрезъ точку O, будетъ линейною примою, и, слѣдовательно, соотвѣтствуетъ радикальной оси примы. Но какъ особый кругъ этой примы мы получимъ теперь не точечный, а, наоборотъ, кругъ безконечно-большого діаметра то есть прямую tt_1.

Но круги могутъ быть приняты и за векторіальные, и тогда линейная ихъ прима составляется особымъ, извѣстнымъ, пріемомъ. Слѣдовательно, и сферопримы мы можемъ принять за векторіальныя и получить ихъ приму такимъ образомъ.

Возьмемъ на плоскости произвольную точку s и проведемъ чрезъ нее двѣ какія-нибудь линейныя примы p и p_1; полная ихъ совокупность есть также линейная прима, такъ какъ эти линейныя примы представлены коническими сѣченіями, проходящими чрезъ четыре точки t, t_1 O и s.

Ясно, что если проведемъ совокупность коническихъ сѣченій чрезъ точки t и t_1, касательныхъ къ p и p_1, то это будетъ относиться именно къ линейнымъ примамъ сферопримъ векторіальныхъ. Особою сферопримою этой совокупности и въ этомъ случаѣ будетъ не точка, такъ какъ такихъ сферопримъ существовать не можетъ, а кругъ, опредѣляемый тремя точками t_1 t и s. Хотя это и не будетъ собственно кривая, касательная къ обѣимъ линейнымъ примамъ, такъ какъ вообще кривой, одновременно касательной къ двумъ кривымъ въ общей точкѣ ихъ пересѣченія существовать не можетъ, но это будетъ кривая, имѣющая съ обѣими линейными примами одну общую точку (помимо постоянныхъ точекъ t и t_1, служащихъ параметрами системы). И этотъ кругъ будетъ общимъ для всѣхъ примъ сферопримъ, касательныхъ къ какимъ бы то ни было линейнымъ примамъ, проведеннымъ чрезъ точку s.

Какъ на исключительный примѣръ линейной примы такихъ векторіальныхъ сферопримъ укажу на слѣдующій.

Приму за точку s точку O. Линейная прима примъ, проходящихъ, чрезъ точку, становится неопредѣленною и вообще требуетъ для своего опредѣленія еще касательной Ox, общей всѣмъ кривымъ примы. Но всѣмъ линейнымъ примамъ этой особой секунды имѣется общая линейная прима точекъ $t\ O\ t_1$, представляющая двѣ пересѣкающіяся въ точкѣ O прямыя. И между всѣми сферопримами, которыя не имѣютъ общихъ перемѣнныхъ точекъ ни съ какими линейными примами системы (то и другое составляетъ особенности разсматриваемой системы) есть одна, представленная прямою tt_1. И вотъ по этимъ какъ бы совмѣщеннымъ въ одну двумъ линейнымъ примамъ и сферопримѣ можемъ составить линейную приму сферопримъ, касательныхъ въ общей парѣ точекъ t и t_1. Это извѣстная въ Новой Геометріи прима коническихъ сѣченій, касательныхъ къ двумъ прямымъ въ двухъ точкахъ. Особыя кривыя этой примы и есть эллипсъ $t\ t_1$ и гипербола $t\ O\ t_1$.

Свойства ея, какъ линейной примы, опредѣляются тѣмъ, что эту совокупность построимъ тождественно, какія бы двѣ кривыя этой совокупности ни были даны. Соединимъ прямою общія точки касанія этихъ двухъ кривыхъ, и проведемъ въ нихъ общія касательныя, и мы снова получаемъ, особые эллипсъ и гипеболу. Какъ прима коническихъ сѣченій, она всякою прямою вообще пересѣкается въ инволюціи. Въ частности, это хорошо извѣстно относительно лучей, исходящихъ изъ O и дающихъ вещественныя пересѣченія [1]).

Конечно, можно опредѣлить для этой системы, по разсмотрѣннымъ данным, коллинеарное и реципрочное преобразованіе. Но какъ задача построенія она представляетъ трудности, такъ какъ при ея рѣшеніи придется имѣть дѣло съ линейными примами коническихъ сѣченій. Поэтому я ограничусь ссылкою на рѣшеніе этой задачи въ частномъ случаѣ системы гармоническихъ отрѣзковъ, приведенное въ упомянутой выше статьѣ.

Изслѣдуя систему гармоническихъ паръ точекъ, мы само собою, ходомъ логики, перешли къ совершенно другой системѣ—системѣ точекъ, сопряженныхъ гармоническимъ парамъ, и въ сущности разсматривали какъ бы только одну эту систему, не теряя нисколько въ общности выводовъ, такъ какъ каждому элементу и каждой совокупности этой особой системы однозначно соотвѣтствуетъ одноименная совокупность системы, подлежащей разсмотрѣнію.

Этою полученною и теперь ближе изученною системою мы и не задавались, а потому теперь приходится обратнымъ путемъ дать ей общее опредѣленіе.

Ясно, что это система точекъ на плоскости и, слѣдовательно, есть система, гомологичная обыкновенной системѣ точекъ на плоскости.

Но въ обыкновенной системѣ для ея характеристики не требуется никакихъ дальнѣйшихъ постоянныхъ параметровъ, тогда какъ здѣсь необходимы три такихъ параметра въ видѣ постоянныхъ точекъ

1) Ср. Новая Геометрія V 31.

O, t и t_1, потому что безъ нихъ мы не можемъ построить линейной примы. Кривой же K для нея очевидно не требуется, какъ для главной разсматриваемой системы, для которой эта кривая также является необходимымъ постояннымъ параметромъ.

Но упомянутыя три точки какъ параметры нетолько необходимы, но и достаточны, потому что ими опредѣляется и линейная прима, и сфероприма, а на основаніи этихъ построеній мы однозначно дѣлаемъ и всѣ остальныя, начиная съ конопримъ, которыя получаются изъ сферопримы посредствомъ коллинеарныхъ преобразованій.

Значеніе этихъ трехъ параметровъ для системы однако неодинаково, такъ какъ всѣ три необходимы только для линейной примы, а для сферопримы только двѣ, а именно t_1 и t_2.

Поэтому эту систему нельзя характеризовать просто какъ систему съ параметрами O, t и t_1, но какъ систему съ парою параметровъ t и t_1 и особымъ параметромъ O, подразумѣвая, что черезъ пару точекъ проходятъ и всѣ сферопримы системы, а еще чрезъ особую точку O только линейныя примы.

Итакъ, это *система съ постоянными двумя точками и одною особою точкою.*

Какъ видимъ, она находится въ особомъ родствѣ съ другою системою, характеризующеюся тѣми же параметрами и еще коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ чрезъ обѣ постоянныя точки и касательнымъ къ двумъ прямымъ, проходящимъ изъ особой точки къ этимъ двумъ постояннымъ.

Это особое родство обѣихъ системъ выражается нетолько въ томъ, что элементы одной однозначно связаны то есть коррелятивны элементамъ другой, такъ какъ такая коррелятивность элементовъ свойственна всѣмъ геометрическимъ системамъ вообще, но еще и тѣмъ, что въ нихъ коррелятивны *одноименныя* совокупности, тогда какъ вообще въ системахъ коррелятивны только совокупности одинаковыхъ порядковъ.

Мы заключаемъ объ этомъ соотвѣтствіи одноименныхъ совокупностей по соотвѣтствію сфероприм сферопримамъ, а, приведя это доказательство, мы вмѣстѣ съ тѣмъ и опредѣлимъ смыслъ самаго термина.

Начнемъ съ конопримъ то есть совокупностей, представленной въ геометріи точекъ коническими сѣченіями. Посреди послѣднихъ мы различаемъ кругъ параболы, эллипсы и гиперболы. Въ этой совокупности кругъ и параболы *) представлены единично, такъ какъ полная совокупность тѣхъ и другихъ подобны между собою; но эллипсы и гиперболы представлены въ безконечности разновидностей.

Эти разновидности могутъ быть охарактеризованы отношеніемъ величины главныхъ осей, которое для всей совокупности подобныхъ кривыхъ остается постояннымъ. Въ частности, для гиперболъ, это можетъ быть замѣнено угломъ между ассимптотами.

Всѣ гиперболы съ одинаковымъ угломъ между ассимптотами подобны, за исключеніемъ особой гиперболы, представленной самими асимптотами, такъ какъ она въ этомъ рядѣ подобныхъ членовъ представлена при отношеніи подобія, равномъ безконечности и потому должна быть разсматриваема какъ особая разность кривыхъ (это видно и изъ того, что именно эти особыя разности не могутъ быть коллинеарно выведены изъ круга).

Такимъ образомъ всѣ эти разности могутъ быть отличены по существу и отмѣчены особымъ именемъ, какъ это и дѣлается по отношенію къ равностороннимъ и особымъ гиперболамъ и эллипсамъ (равноосный эллипсъ и есть кругъ).

Въ геометрическихъ системахъ гомологичны или коррелятивны совокупности, обнимающія собою всѣ разности, а вовсе нетолько одноименные; въ частности, кругу на плоскости вообще коррелятивны не сферопримы и конопримы вообще.

Но если мы найдемъ двѣ системы, въ которыхъ кругамъ гомологичны круги же или коррелятивны сферопримы, то можемъ утверждать, что гомологичны и коррелятивны одноименныя коническія сѣченія или конопримы.

Въ частности, это очевидно для системъ подобныхъ. Это очевидно и для параболъ, коллинеарно воспроизводимыхъ изъ круга, если за ось инволюціи принять касательную прямую.

Чтобы сдѣлать это яснымъ вообще, нужно предварительно доказать слѣдующую теорему.

Принявъ какую-нибудь прямую AB въ плоскости круга ε', коллинеарно преобразуемаго въ коническое сѣченіе, за ось инволюціи, мы получимъ всѣ преобразованныя кривыя подобными, если будемъ перемѣщать центръ перспективы по кругу, входящему въ составъ линейной примы круговъ, опредѣляемой данными кругомъ и прямою. Соединеніе центра перспективы, какъ точки круга, принадлежащаго къ перпендикулярной примѣ круговъ, двумя прямыми съ точками пересѣченія этого круга прямою AB даетъ направленіе главныхъ осей преобразованной кривой.

*) Я не упоминаю, по очевидности, про единичность прямой какъ особаго эллипса.

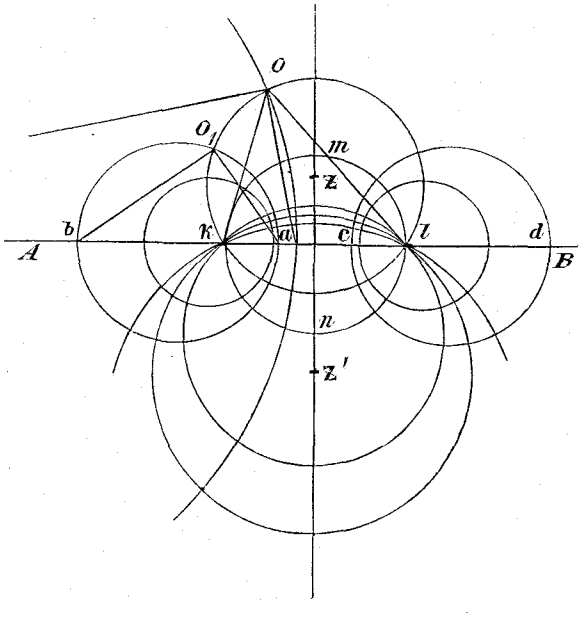
Теорема одинакова примѣнима для всѣхъ преобразуемыхъ круговъ примы, опредѣляемой даннымъ кругомъ и прямою AB.

Въ частности, когда AB пересѣкаетъ кругъ въ вещественныхъ точкахъ k и l (фиг. 6) и слѣдовательно преобразованныя кривыя есть гиперболы, первую часть теоремы можно считать непосредственно очевидною.

Въ этомъ случаѣ, какой бы кругъ примы съ радикальною осью AB мы ни подвергали коллинеарному преобразованію, принимая за центръ перспективы точку O на постоянномъ кругѣ, проходящемъ чрезъ k и l, мы всегда получимъ направленіе ассимптотъ гиперболы въ видѣ прямыхъ Ok и Ol и уголъ между ними будетъ одинаковый, гдѣ бы на кругѣ мы ни взяли точку O. Слѣдовательно, всѣ преобразованныя гиперболы будутъ имѣть одинъ и, тотъ же уголъ между ассимптотами то есть будутъ подобными. Замѣтимъ, что ассимптоты есть самосопряженные діаметры гиперболы и значитъ равный нулю ихъ уголъ наиболѣе отличается отъ прямого изъ всѣхъ угловъ сопряженныхъ діаметровъ.

Доказательство второй части мы дадимъ совмѣстно съ общимъ доказательствомъ всей теоремы для всѣхъ коническихъ сѣченій.

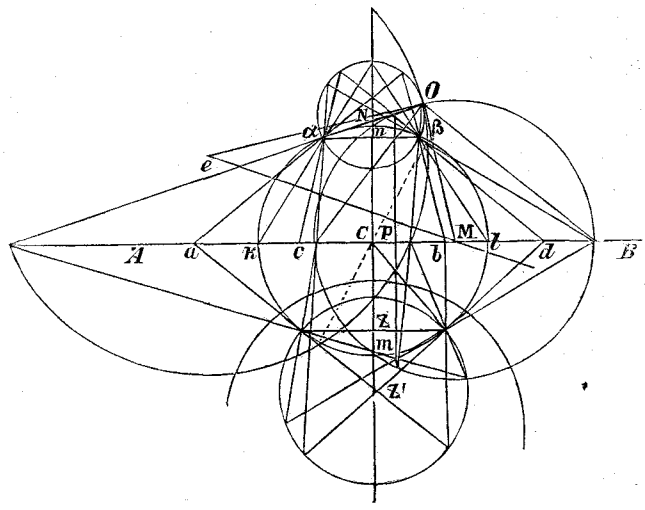
Фиг. 6.



Предположемъ на плоскости какое-нибудь коническое сѣченіе K которое мы желаемъ преобразовать въ кругъ Z'; для этого намъ прежде всего нужно найти ось инволюціи AB, которая будетъ прямою, не пересѣкающею его въ вещественныхъ точкахъ и затѣмъ нѣкоторый центръ перспективы O. Изъ центра кривой K, проведемъ пары сопряженныхъ діаметровъ, которыя образуютъ инволюцію лучей, перспективно опредѣляющую инволюцію точекъ на безконечно-удаленной прямой (полярѣ центра Z). Центръ перспективы переноситъ эту инволюцію точекъ на ось инволюціи AB, на которой мы, слѣдовательно, также получимъ инволюцію то есть совокупность сопряженныхъ паръ точекъ ab, cd и т. д. И пары лучей изъ O то есть Oa съ Ob, Oc съ Od... будутъ парами, параллельными парамъ сопряженныхъ діаметровъ кривой. Центру z этой кривой будетъ гомологиченъ полюсъ Z прямой AB относительно круга. Нетрудно доказать, что полученная на AB инволюція та самая, которая на прямой AB опредѣляется присутствіемъ круга.

Это слѣдуетъ изъ гомологичности точекъ Z и z, а слѣдовательно и гомологичности инволюціей лучей въ этихъ точкахъ. Парами сопряженныхъ лучей инволюціи въ центрѣ Z будутъ какой-нибудь лучъ Zb съ лучемъ, проходящимъ чрезъ полюсъ a этой прямой, который непремѣнно находится на прямой AB.

Фиг. 7.



Если примемъ каждую пару сопряженныхъ точекъ инволюціи за діаметръ круга, то получимъ линейную приму круговъ. Смотря потому, пересѣкаетъ ли прямая AB кругъ z или не пересѣкаетъ (то есть пересѣкаетъ въ парѣ мнимыхъ точекъ), эта прима будетъ имѣть два точные круга и вещественный ортогональный кругъ, для котораго эта пара составляетъ концы діаметра, или приму съ

мнимымъ ортогональнымъ кругомъ, для котораго концами діаметра будетъ пара мнимыхъ точекъ пересѣченія, а двумя вещественными общими точками пересѣченія пара точекъ m и n, составляющихъ также концы діаметра мнимаго круга, но діаметра, перпендикулярнаго къ прямый AB.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію центра перспективы.

Онъ можетъ имѣть произвольное положеніе на плоскости, смотря по той кривой, которая воспроизведена изъ круга Z'. Но всегда пара прямыхъ, соединяющихъ этотъ центръ O съ парою сопряженныхъ точекъ инволюціи, даетъ направленіе двухъ сопряженныхъ діаметровъ кривой. Поэтому, если мы соединимъ его съ тою именно парою точекъ инволюціи, которою опредѣляется кругъ примы, проходящій чрезъ O, то полученные сопряженные діаметры будутъ взаимно-перпендикулярны то есть пара лучей опредѣлитъ оси кривой K, и для всѣхъ точекъ этого круга получимъ тотъ же результатъ.

Этимъ дается общее доказательство второй половины теоремы и вмѣстѣ съ тѣмъ простой способъ опредѣлять оси коллинеарно преобразованной изъ круга кривой K.

Теперь будемъ проводить чрезъ постоянную точку O, и чрезъ каждую пару сопряженныхъ точекъ инволюціи на AB по кругу. Получимъ линейную приму круговъ именно потому, что она пересѣкаетъ прямую AB въ инволюціи точекъ, а этою инволюціею и общею точкою O пересѣченія круговъ она опредѣляется однозначно. Эта прима будетъ имѣть съ первою одинъ общій кругъ, а именно тотъ, центръ котораго находится на прямой AB (точка пересѣченія централей); примъ слѣдовательно, обѣ примы принадлежатъ одной линейной секундѣ.

Ортогональнымъ (вещественнымъ или мнимымъ) кругомъ этой секунды будетъ тотъ самый, который опредѣляется парою точекъ k и l какъ концами діаметра. Это видно изъ того, что кругъ безконечно-большого діаметра (радикальная ось) новой примы непремѣнно проходитъ чрезъ центръ ортогональнаго круга, какъ точку, сопряженную въ инволюціи безконечно-удаленной точкѣ.

Теперь примемъ общій кругъ M за то вспомогательное коническое сѣченіе [1]), которое въ замѣчательномъ построеніи Штейнера раскрываетъ составъ сопряженныхъ діаметровъ каждаго другого коническаго сѣченія, а за постоянную точку на этомъ кругѣ точку O.

Мы получаемъ въ точкѣ O инволюцію лучей, и если двѣ пары сопряженныхъ лучей пересѣкаютъ кругъ M въ парахъ точекъ r_1 съ r_2 и s_1 съ s_2, то по одной извѣстной теоремѣ, всѣ такія прямыя, r_1s_1, r_2s_2... пересѣкаются въ одной общей точкѣ p.

Если кривая K есть гипербола, то въ инволюціи на прямой въ безконечности (также какъ и перспективной съ нею инволюціи на прямой AB), ассимптоты отмѣчаютъ вещественныя двойныя точки инволюціи, и въ коррелятивной съ нею инволюціи лучей въ O будутъ два особые двойные луча, которыя отмѣтятъ на кругѣ M двѣ двойныя, то есть слившіяся въ одну, сопряженныя точки u и v, а потому прямыя, соединяющія двѣ сопряженныя точки, въ этомъ случаѣ есть касательныя къ M въ точкахъ u и v, которыя необходимо пересѣкаются въ точкѣ, находящейся внѣ круга M; и значитъ, въ этомъ случаѣ постоянная точка p есть точка пересѣченія этихъ касательныхъ и необходимо лежитъ внѣ круга.

Если кривая K есть эллипсъ, то вещественныхъ двойныхъ точекъ въ инволюціи не имѣется, а потому нѣтъ и касательныхъ, и общая точка p должна находиться внутри круга.

Въ виду ненужности приводить спеціальное доказательство теоремы для гиперболъ, я разсмотрю случай эллипсовъ, и прежде всего опредѣлю положеніе точки p по даннымъ условіямъ.

Чрезъ точку p должна проходить сама прямая AB, такъ какъ на ней находятся точки въ которыхъ пересѣкаютъ кругъ M тѣ лучи изъ O, которые параллельны осямъ эллипса; она вполнѣ опредѣлится, если проведемъ два луча изъ O, изъ коихъ одинъ проходитъ чрезъ центръ ортогональнаго круга секунды (средина отрѣзка kl) и другой, параллельный прямой AB; въ кругѣ M онѣ отмѣтятъ двѣ точки, а прямая, соединяющая ихъ, и отмѣтитъ искомую точку p.

Вращая хорду, проходящую чрезъ p, около этой точки, мы получимъ приму хордъ, концы которыхъ, соединенные прямыми съ O, опредѣлять всю приму сопряженныхъ діаметровъ эллипса. Ясно, что углы между этими діаметрами будутъ измѣняться въ извѣстныхъ предѣлахъ, начиная отъ прямого угла, соотвѣтствующаго положенію хорды, совпадающему съ прямою AB до нѣкотораго наименьшаго, когда хорду проведемъ перпендикулярно. Это будутъ крайніе, единичные углы; остальные располагаются попарно, соотвѣтственно двумъ положеніямъ хорды симметричнымъ относительно единичныхъ, взаимно перпендикулярныхъ, хордъ. Если чрезъ концы этой наименьшей хорды проведемъ лучи чрезъ O, то уголъ между этими двумя лучами дѣлится пополамъ лучами, параллельными осямъ эллипса.

Это заключеніе соотвѣтствуетъ теоремѣ элементовъ геометріи, по которой наименьшій уголъ об-

[1]) Die Theorie der Kegelschnitte. Leipzig 1867, 263.

разуютъ такіе сопряженные діаметры эллипса, которые расположены симметрично относительно осей эллипса и представляютъ равные сопряженные діаметры.

Этимъ наименьшимъ угломъ опредѣляется индивидуальность эллипса, и всѣ эллипсы съ одинаковымъ наименьшимъ угломъ между сопряженными діаметрами есть эллипсы подобные.

Итакъ, пара сопряженныхъ точекъ инволюціи на прямой AB, перспективныя съ парою лучей изъ O, образующихъ наименьшій уголъ, есть тѣ двѣ сопряженныя точки инволюціи, которыя съ парою точекъ перспективныхъ лучамъ, параллельнымъ осямъ эллипса, образуютъ четыре гармоническія точки.

Но тѣ четыре точки на общей централи двухъ круговъ, въ которыхъ пересѣкаются два прямоугольно пересѣкающіе другъ друга круга, и есть четыре гармоническія точки. Поэтому, если чрезъ точку O на кругѣ M мы проведемъ кругъ, прямоугольно его пересѣкающій и имѣющій центръ на централи второй примы круговъ, то точки пересѣченія этого круга съ AB и есть искомыя точки, чрезъ которыя проходятъ лучи изъ O, параллельные сопряженнымъ діаметрамъ съ наименьшимъ угломъ, потому что 1) эти точки образуютъ гармоническую пару, а 2) принадлежатъ сопряженнымъ точкамъ инволюціи на прямой AB.

Теперь мы видимъ, какъ должна въ плоскости перемѣщаться точка O для того, чтобы эллипсы, преобразованные изъ даннаго круга при данной оси инволюціи AB были подобны то есть имѣли одинаковый наименьшій уголъ сопряженныхъ діаметровъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вообразивъ кругъ M_1 той же примы, безконечно близкій къ кругу M и рядъ слѣдующихъ безконечно близкихъ круговъ, мы найдемъ, что геометрическое мѣсто точекъ O есть кривая, проводимая перпендикулярно отъ одного круга къ смежному то есть кривая нормальная къ совокупности круговъ и притомъ проводимая чрезъ точку O.

Но, какъ извѣстно изъ элементовъ геометріи шаровъ, такая нормальная кривая къ кругамъ одной линейной примы есть кругъ N перпендикулярной линейной примы то есть той, для которой общій точки m и n пересѣченія первой примы есть точечные круги, ее опредѣляющіе.

Однако непосредственно видно лишь, что кругъ примы съ централью AB, проведенный касательно къ кругу N въ какой-нибудь его точкѣ, есть кругъ, опредѣляющій сопряженные діаметры съ наименьшимъ угломъ, но сразу не видно, что самъ уголъ будетъ для всѣхъ точекъ одинаковъ.

Чтобы увидѣть это, замѣтимъ, что кругъ N, прямоугольно пересѣкающій всѣ круги примы, въ томъ числѣ и мнимый ортогональный кругъ примы какъ вещественный кругъ, входящій въ составъ той же примы, будетъ имѣть съ нимъ двѣ общія точки α и β, и касательныя въ этихъ точкахъ пересѣкаются въ центрѣ круга N по самому его опредѣленію; и наоборотъ, касательныя въ этихъ же точкахъ къ кругу N пересѣкутся въ центрѣ мнимаго круга то есть въ центрѣ всей инволюціи на прямой AB.

Но изъ самаго опредѣленія круга N слѣдуетъ, что онъ входитъ въ составъ примы для которой мнимый ортогональный кругъ первой примы есть вещественный ортогональный, такъ какъ это примы взаимно перпендикулярныя. Въ примѣ, которой принадлежатъ круги N, радикальная ось есть прямая AB, и слѣдовательно это та же самая прима, къ которой относится и данный преобразуемый кругъ.

Для всѣхъ круговъ одной примы инволюція точекъ на радикальной оси тождественна. Поэтому, если изъ точекъ круга N будемъ проводить пары лучей чрезъ точки α и β, то получимъ на AB ту же самую инволюцію, что и для всѣхъ круговъ. Но всѣ эти пары лучей, какъ имѣющія вершину образуемаго ими угла на кругѣ и проходящія чрезъ двѣ постоянныя точки α и β на томъ же кругѣ, образуютъ между собою равные углы, а именно наименьшіе углы сопряженныхъ діаметровъ эллипсовъ, преобразованныхъ изъ даннаго круга.

Этимъ и заключено доказательство предложенной теоремы, если замѣтимъ, что по только-что объясненному, это относится нетолько къ одному данному, но ко всѣмъ кругамъ линейной примы, опредѣляемой даннымъ кругомъ и прямою AB какъ радикальною осью примы.

Только-что доказанная теорема даетъ въ руки средство по данному кругу и даже примѣ круговъ воспроизводить совокупности подобныхъ, то-есть одноименныхъ коническихъ сѣченій. Для этихъ построеній намъ, кромѣ прямыхъ, нужны круги и примы круговъ.

Поэтому, если двѣ геометрическія системы находятся въ такомъ отношеніи особаго родства, что сферопримамъ одной коллинеарны сферопримы другой, то и одноименнымъ конопримамъ вообще коллинеарны одноименныя же конопримы, а не конопримы вообще, какъ это имѣетъ мѣсто для всѣхъ геометрическихъ системъ.

Примѣры такихъ системъ, связанныхъ особымъ родствомъ съ системою точекъ, мы видѣли въ видѣ

системы векторіальныхъ круговъ и шаровъ, въ предѣлахъ совокупности одной ступени, въ видѣ системы параллельныхъ и гармоническихъ векторовъ въ тѣхъ же предѣлахъ. Я подразумѣваю, что кругамъ точекъ гомологичны круги центровъ сферопримъ векторіальныхъ круговъ и круги начальныхъ точекъ векторовъ.

Всѣ такія системы мы можемъ объединить въ группы, такъ какъ ясно, что если сферическія совокупности системы S_1 коррелятивны со сферическими же совокупностями S_2, а также и со сферическими совокупностями системы S_3, то сферическія совокупности системы S_2 коррелятивны со сферическими же совокупностями системы S_3. Но, напр., нельзя отнести только-что разсмотрѣнныя двѣ системы и систему точекъ въ одну группу, такъ какъ въ системѣ точекъ, сопряженныхъ съ парами точекъ другой системы, сферопримы представлены не кругами, а коническими сѣченіями; таковыми представлены даже линейныя примы этой системы.

Еще одно замѣчаніе.

Прямая линія можетъ быть разсматриваема какъ особая разность круга, коническаго сѣченія и даже алгебрическихъ кривыхъ высшаго порядка. Поэтому на систему круговъ мы можемъ смотрѣть какъ на расширеніе системы прямыхъ на плоскости, на систему коническихъ сѣченій, какъ на еще высшее расширеніе той же системы. Съ каждымъ такимъ расширеніемъ связано повышеніе ступени системы. Система прямыхъ только второй, система круговъ третьей, а система коническихъ сѣченій уже пятой ступени. Произведя дальнѣйшее расширеніе, мы получимъ системы еще высшей ступени.

Но каждую систему мы можемъ изучать и въ ея частяхъ низшей ступени, если возьмемъ въ разсмотрѣніе неполную ея совокупность.

Напр. въ разсмотрѣніи системы круговъ мы можемъ ограничиться одною линейною секундою, и тогда такая часть системы будетъ одной ступени съ полною системою прямыхъ, а потому такія системы будутъ коррелятивными, и каждому элементу одной изъ нихъ будетъ однозначно соотвѣтствовать элементъ другой, и для установленія такого соотвѣтствія нужно опредѣлить соотвѣтствующее преобразованіе.

Въ только что намѣченной нами системѣ точекъ съ двумя постоянными точками t_1 и t_2 и одной особою точкою O мы имѣемъ сферопримы представленными коническими сѣченіями, почему вмѣсто круговъ на плоскости можемъ принять за элементы системы коническія сѣченія, и тогда получимъ систему третьей ступени, гомологичную полной совокупности круговъ на плоскости и слѣдовательно составляющую линейную терцію.

Но такъ какъ всѣ сферопримы этой системы представлены коническими сѣченіями, проходящими чрезъ двѣ постоянныя точки t_1 и t_2, то значитъ полная совокупность коническихъ сѣченій, проходящихъ чрезъ двѣ постоянныя точки на плоскости, есть ихъ линейная терція [1]).

Мы привели доказательство существованія безграничнаго числа геометрическихъ системъ, основываясь на возможности пары элементовъ какой-нибудь системы принять за одинъ элементъ новой системы. Но мы можемъ обобщить это разсужденіе въ томъ отношеніи, что если вообще возможно изъ одной геометрической системы какимъ бы то ни было образомъ воспроизвести другую, то уже изъ этого слѣдуетъ, что можно воспроизвести ихъ и безконечное множество, такъ какъ въ каждой системѣ имѣется тотъ элементъ, коррелятивный которому въ первоначальной системѣ мы приняли за элементъ новой, производной, системы, и значитъ мы снова этотъ элементъ можемъ принять за элементъ второй производной системы и такъ далѣе. Напр., мы воспроизвели изъ системы точекъ на плоскости систему круговъ, принявъ круги первой системы за элементы второй. Но въ системѣ круговъ опять имѣются сферопримы, коррелятивныя кругамъ первой системы. Мы можемъ эти сферопримы принять за элементы второй производной системы, такъ какъ изъ двухъ сферопримъ мы можемъ посредствомъ коррелятивныхъ операцій также воспроизвести линейную приму, какъ въ системѣ круговъ мы составили такую приму по двумъ произвольно даннымъ кругамъ. Напр., если двѣ сферопримы круговъ пересѣкаются, то не иначе какъ въ двухъ кругахъ, и тогда линейная прима второй производной системы есть совокупность всѣхъ сферопримъ, имѣющихъ общими тѣ же два круга. Если двѣ сферопримы не пересѣкаются, то пересѣчемъ ихъ произвольною сферопримою; чрезъ обѣ пары круговъ пересѣченія проведемъ линейныя примы круговъ. Такъ какъ полная совокупность сферопримъ секунда напр. въ предѣлахъ нѣкоторой линейной секунды векторіальныхъ круговъ,

---

[1]) Полный выводъ линейныхъ совокупностей системы коническихъ сѣченій конспективно излагается въ Reye „Die Geometrie der Lage“. Leipzig, 1899 I, 264—293.

то обѣ примы пересѣкутся въ кругѣ, который играетъ роль радикальнаго центра; изъ него проведемъ касательныя къ сферо-примамъ; трехъ изъ круговъ касанія достаточно для опредѣленія вещественнаго „ортогональнаго круга“, но всѣ четыре должны находиться на одной сферо-примѣ [1]). Круги этого ортогональнаго круга корреляативны точечнымъ кругамъ предъидущей производной системы. Имѣя этотъ кругъ, мы на каждой линейной примѣ круговъ, проведенной чрезъ радикальный центръ, по одному кругу легко находимъ четвертый гармоническій или сопряженный съ даннымъ по отношенію къ ортогональному кругу. Любая пара такихъ круговъ съ любымъ кругомъ „ортогональнаго круга“ опредѣляетъ сферопримы искомой линейной примы.

Какъ видимъ, уже для второй производной системы даже простая операція проведенія линейныхъ примъ есть операція, производимая съ большою затратою времени. Тѣмъ не менѣе логическихъ трудностей для такихъ операцій не имѣется, и они предусматриваются напередъ въ логическихъ выраженіяхъ даже тогда, когда мы не знакомы съ самими элементами системы.

Напр., приходится дословно повторить изложеніе той же операціи и для n-ой производной системы съ тѣмъ различіемъ, что вмѣсто круга придется поставить выраженіе сфероприма n-1-ой производной системы.

Въ этой простотѣ и общности логическихъ операцій и кроется мощь метода Новая Геометрія, которая создала въ короткое время больше теоремъ и изучила большее число геометрическихъ построеній, чѣмъ геометрія древнихъ за цѣлыя тысячелѣтія, а объемъ ея представленій, можно сказать, превышаетъ соотвѣтственный объемъ представленій геометріи древнихъ въ безконечное число разъ.

Люди, не имѣющіе представленія о методахъ Новой Геометріи не могли бы этому повѣрить, потому что иначе они должны были бы признать это за одно изъ величайшихъ чудесъ.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

Распространеніе теоремъ и выводовъ на пространство.

Это распространеніе настолько непосредственно, что неупоминаніе объ этомъ составляло бы простое упущеніе.

Прежде всего ясно, что тѣ отношенія сопряженныхъ точекъ и паръ точекъ, о которыхъ рѣчь была въ началѣ статьи, имѣютъ мѣсто для всѣхъ лучей, исходящихъ изъ одной точки, и потому одинаково справедливы и для лучей пространства.

Для составленія системы, распространенной на пространство, данными являются нѣкоторая кривая поверхность второго порядка (коносекунда) H и еще одна точка, внутри или внѣ этой поверхности.

Ясно, что во всѣхъ сѣченіяхъ поверхности H плоскостями, проведенными чрезъ O (какъ вообще всякими плоскостями) получимъ коническія сѣченія (конопримы), и къ каждому можемъ примѣнить то построеніе, которое дано выше для кривой H и точки O.

Кромѣ того, по свойству данныхъ поверхностей, совокупность касательныхъ плоскостей (или прямыхъ), проведенныхъ изъ O къ поверхности H даетъ совокупность точекъ касанія въ видѣ коническаго же сѣченія, то есть въ одной плоскости P—полярной къ O по отношенію къ поверхности, если O лежитъ внѣ поверхности, то полярная плоскость лежитъ внѣ поверхности. Если же точка O находится внутри но и въ ней имѣется совокупность паръ мнимыхъ двойныхъ точекъ (выводимыхъ въ соотвѣтственныхъ плоскихъ сѣченіяхъ), составляющая нѣкоторое мнимое коническое сѣченіе.

Соотвѣтственно каждой данной точкѣ мы относительно поверхности на лучѣ изъ O легко найденъ сопряженную A; и теперь покажемъ, что по такимъ двумъ парамъ мы однозначно составимъ линейную приму паръ въ плоскости лучей Oa и Ob, а по тремъ такимъ парамъ найдемъ линейную секунду паръ въ видѣ кривой поверхности второго порядка.

Первая часть теоремы и не требуетъ спеціальнаго доказательства, такъ какъ она относится къ плоскости, и доказательство ея заключается въ изложенномъ выше. Линейная прима есть опредѣленное коническое сѣченіе K, проходящее чрезъ обѣ пары точекъ, однозначно связанное съ коническимъ сѣченіемъ k, проходящимъ чрезъ тѣ же четыре точки и еще точку O. Точки кривой k сопряжены всѣмъ парамъ на лучахъ изъ 0, въ которыхъ эти лучи пересѣкаютъ данное коническое сѣченіе.

Рѣшеніе задачи въ самомъ общемъ видѣ, можно сказать, заключается уже въ статьѣ „Построеніе кривыхъ поверхностей 2-го порядка“ (стр. 304), и притомъ относится къ простѣйшему случаю этого рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, въ ней было показано, что линейная прима такихъ поверхностей (коносекундъ)

[1]) Уже одно это положеніе заключаетъ въ себѣ безграничное число теоремъ, такъ какъ прилагается ко всѣмъ производнымъ системамъ.

однозначно опредѣляется тремя данными инволюціями паръ точекъ на лучахъ изъ O. Мы въ этомъ случаѣ прежде всего и имѣемъ эти три инволюціи. Означивъ эти лучи чрезъ B, C и D, мы опредѣляемъ на каждомъ изъ нихъ точки, сопряженныя точкѣ O, и плоскость, проходящую чрезъ эти три сопряженныя точки, означаемъ чрезъ **A**.

Достаточно имѣть еще любую точку въ пространствѣ, чрезъ которую проходитъ одна изъ поверхностей примы, чтобы по ней опредѣлить сколько-угодно, паръ точекъ той же поверхности въ пересѣченіи съ плоскостью **A**. Но въ данномъ случаѣ мы имѣемъ полное сѣченіе искомой поверхности плоскостью

Также по двумъ плоскимъ сѣченіямъ, напр. **A** (которой принадлежатъ точки касанія t, t_1)... Oab и Oac, легко найдемъ другую плоскость съ общею кривою сѣченія обѣихъ поверхностей, содержащеѣ точка T_1 T_1...

По этой же кривой мы воспроизводимъ искомую поверхность, пользуясь любою изъ паръ точекъ a съ a', b съ b' или c съ c' какъ паръ, находящихся на той же поверхности. Мы принимаемъ именно одну изъ точекъ такой пары за центръ секунды лучей, а другую за центръ секунды плоскостей, а секунды эти приводимъ въ коррелятивную связь, проводя первыя чрезъ точки, а вторыя чрезъ поляры этихъ точекъ на плоскости **A** относительно полученной кривой. Всѣ лучи изъ O пересѣкутъ эту поверхность въ сопряженныхъ парахъ точекъ относительно поверхности H, такъ какъ пары точекъ пересѣченія послѣдней лучами изъ O есть двойныя вещественныя точки инволюціи на лучахъ.

Это будетъ единственная поверхность примы, удовлетворяющая заданнымъ условіямъ. Кромѣ кривой въ плоскости, полярной точкѣ O относительно нея, она пересѣчетъ данную поверхность H еще въ плоскости полярной точкѣ O относительно H. Чрезъ эти двѣ кривыя проходитъ прима другихъ поверхностей, которая можетъ быть опредѣлена тремя лучами изъ точки Z и инволюціями на нихъ, опредѣляемыми двойными точками, принадлежащими этимъ кривымъ. Къ этой примѣ относятся обѣ выведенныя поверхности, а также и сопряженная съ ними третья, которая опредѣляется прохожденіемъ чрезъ пару точекъ OO'.

Изъ всѣхъ поверхностей послѣдней примы только одна представляетъ линейную секунду паръ точекъ системы (и одна ей сопряженная). Всѣ остальныя поверхности есть сферосекунды системы. Эта прима однозначно выводится изъ поверхности первой примы, опредѣленной данными тремя парами точекъ. Такъ какъ такихъ поверхностей, какъ линейныхъ секундъ, имѣется терція, что значитъ сфероприм имѣется въ системѣ кварта. Упомянутая секунда, также какъ плоскости въ пространствѣ, требуетъ для своего опредѣленія трехъ произвольно взятыхъ точекъ, такъ какъ изъ каждой изъ нихъ уже однозначно выводится сопряженная ей точка пары.

Я не буду останавливаться на разборѣ частныхъ случаевъ, напр. когда данная кривая поверхность есть пара пересѣкающихся плоскостей; но и эти случаи легко разрѣшаются по даннымъ, приведеннымъ для системы на плоскости.