1113 * ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ

30. Возможность разныхъ геометрическихъ системъ при одной и той же полной совокупности элементовъ.

Е. С. Федорова.

(Доложено 8 сентября 1908 г.).

Мы теперь знаемъ, что геометрическія системы могутъ быть весьма многочисленны и разнообразны, такъ какъ за элементы системъ могутъ быть принимаемы весьма разнообразные геометрическіе образы.

Для установленія всякой такой системы необходимо опредѣлить полную совокупность ея элементовъ и привести доказательство, что изъ двухъ произвольно взятыхъ изъ нея элементовъ можно однозначно составить такую ихъ безконечную совокупность, чтобы, замѣняя въ ней два взятыхъ двумя произвольными другими элементами, входящими въ ея составъ, мы и изъ нихъ также однозначно вывели бы ту же самую совокупность, которая и составитъ линейную приму системы.

Это условіе необходимое и достаточное для установленія всякой геометрической системы.

Но является вопросъ, разъ полная совокупность элементовъ опредѣлена и доказана возможность составленія по двумъ произвольно взятымъ изъ нихъ линейной примы, нельзя ли допустить, что по тѣмъ же двумъ элементамъ той же полной совокупности можно и иначе составить линейную приму. Если бы на вопросъ отвѣтъ оказался утвердительный, то мы именно имѣли бы разныя геометрическія системы съ тождественными элементами и тождественною ихъ полною совокупностью.

Въ старой геометріи, то есть геометріи точекъ, возможность составленія линейной примы по двумъ элементамъ только однимъ образомъ, а именно по двумъ точкамъ однозначно можно опредѣлить только прямую, принимается за аксіому или очевидную истину, не требующую доказательствъ. Но если бы по двумъ точкамъ мы могли составить однозначно еще какую-нибудь линію, и двѣ любыя точки этой линіи также однозначно опредѣляли бы ее, то эта линія играла бы въ новой системѣ ту же роль, что прямая въ старой геометріи, и поэтому аксіома, по которой черезъ двѣ точки можно провести лишь одну прямую линію, оказалась бы просто невѣрнымъ утвержденіемъ.

Но это утвержденіе можно принимать за очевидную истину лишь при отсутствіи какихъ либо ограничивающихъ условій, вносимыхъ опредѣленными, постоянными параметрами данной геометрической системы.

Если же мы введемъ такіе параметры, то очевидность прекращается, и мы не можемъ доказать невозможности въ предѣлахъ данной полный совокупности элементовъ различнаго составленія линейныхъ примъ.

Для того, чтобы предупредить возможность попытокъ доказательства невѣрнаго положенія, достаточно имѣть одинъ противорѣчащій ему фактъ. Въ данномъ случаѣ это имѣло бы большое значеніе, такъ какъ дѣло идетъ о переносимости въ другія геометрическія системы одной аксіомы старой геометріи.

Здѣсь я именно и имѣю въ виду отдѣльными примѣрами доказать эту непереносимость, то есть что Новая Геометрія такой аксіомы признать не можетъ.

Возьму самый простой примѣръ.

Пусть въ геометрической системѣ имѣется нѣкоторая постоянная точка O, которую мы можемъ принять за центръ системы.

Этимъ вводится нѣкоторый параметръ системы, которому при установленіи системы можно придать разное значеніе.

Задача опредѣленія линейной примы по двумъ

данным точкамъ A и B теперь можетъ быть рѣшена двоякимъ образомъ.

Во первыхъ линейную приму мы можемъ опредѣлить какъ прямую, проходящую чрезъ обѣ данныя точки; ясно, что такимъ образомъ мы получаемъ систему точекъ, тождественную съ системою старой геометріи; но условіе даннаго параметра при этомъ выполняется, такъ какъ точку O дѣйствительно можемъ считать за центръ всей геометрической системы. Однако въ этой системѣ такими свойствами обладаетъ не одна эта точка, а всѣ точки системы, кромѣ безконечно удаленныхъ.

Во вторыхъ линейную приму мы можемъ опредѣлить какъ кругъ, проходящій чрезъ A,B и O. Возможность установленія такой системы очевидна, такъ какъ очевидно, что какія бы двѣ точки системы ни были даны, всегда и во всѣхъ случаяхъ линейная прима дѣйствительно опредѣлена, и въ ней данныя двѣ точки мы можемъ замѣнить двумя произвольными ея точками.

Эту систему и не требуется развивать, такъ какъ развитіе ея заключается въ системѣ гармоническихъ отрѣзковъ въ видѣ среднихъ точекъ этихъ отрѣзковъ [1]).

Для этой системы было именно выведено, какъ по среднимъ точкамъ однозначно вывести гармоническую пару, и затѣмъ опредѣлить линейную приму самихъ отрѣзковъ по той кривой, то есть кругу, которая однозначно опредѣляется двумя средними точками и постоянною точкою системы (центромъ постояннаго шара, по отношенію къ которому всѣ данныя пары точекъ есть пары сопряженныя).

Въ частности, циклъ такой системы опредѣлился какъ кругъ, проходящій чрезъ три данныя среднія точки.

Но совершено ясно, что въ той же полной совокупности паръ точекъ мы можемъ опредѣлить линейную приму по двумъ даннымъ среднимъ точкамъ такимъ образомъ, чтобы геометрическое мѣсто этихъ точекъ была прямая линія. Если это допустимо, то мы получимъ новую геометрическую систему и притомъ систему, полная совокупность элементовъ которой тождественна съ системою гармоническихъ отрѣзковъ.

Для того, чтобы доказать существованіе этой системы, достаточно доказать допустимость сдѣланнаго опредѣленія линейной примы, то есть что тогда по двумъ элементамъ полной совокупности дѣйствительно однозначно выводится эта прима, и если въ ней оба данные замѣнимъ какими-угодно другими ея элементами, то получимъ ту же самую совокупность.

Но и то, и другое, непосредственно очевидно, такъ какъ по двумъ точкамъ мы дѣйствительно можемъ однозначно вывести только одну проходящую чрезъ нихъ прямую, а, замѣнивъ эти двѣ точками двумя другими точками этой прямой, мы получимъ по нимъ ту же совокупность. По среднимъ же точкамъ однозначно выводятся и истинные элементы системы то есть сопряженныя (по отношенію къ постоянному шару) пары точекъ.

Считая такимъ образомъ поставленную задачу статьи рѣшенною, я, въ виду особаго интереса новоустановленной системы, разсмотрю главныя ея построенія.

Ради опредѣленности назову эту систему системою среднихъ точекъ гармоническихъ паръ.

Оговорю, что это названіе чисто условное, такъ какъ съ одинаковымъ правомъ и систему гармоническихъ отрѣзковъ можно было бы отмѣтить тѣмъ же названіемъ. Такія же названія, которыя бы точно выражали отличительныя особенности этихъ двухъ системъ, были бы слишкомъ длинны.

Итакъ въ системѣ среднихъ точекъ отрѣзковъ для линейной примы сами среднія точки составляютъ прямую линію. Каждой изъ нихъ на лучѣ изъ центра системы O однозначно соотвѣтствуетъ (сопряжена) пара гармоническихъ точекъ a и a'. Если примемъ каждую изъ этихъ паръ за діаметръ шара, то получимъ совокупность, которая есть не что иное какъ линейная прима шаровъ, принадлежащихъ одной терціи; и эта терція для всѣхъ шаровъ такой системы характеризуется вещественнымъ ортогональнымъ шаромъ O, постояннымъ для всей системы.

Слѣдовательно, полная совокупность шаровъ такой системы есть не полная система шаровъ (кварта), а именно ея линейная терція.

Приведенный выводъ есть простое слѣдствіе изъ опредѣленія паръ гармоническихъ точекъ, такъ какъ изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что такіе шары, если средняя точка то есть центръ этихъ шаровъ находятся внѣ шара O, вещественны и прямоугольно пересѣкаютъ этотъ шаръ; если же среднія точки находятся внутри этого шара, то и сами шары (какъ и соотвѣтствующія имъ пары точекъ) есть шары мнимые то есть пересѣкаются шаромъ O въ ихъ большомъ кругѣ.

Совокупность же шаровъ одной терціи съ ортогональнымъ шаромъ O, имѣющихъ центры на одной

[1]) Записки Горнаго Института I 147.

прямой есть, какъ извѣстно, линейная прима шаровъ; эта же прямая есть ея централь.

Отсюда само собою слѣдуетъ, что если будетъ даны три пары точекъ, по которымъ опредѣлимъ три шара той же терціи, то этими тремя шарами однозначно опредѣляется линейная секунда шаровъ, входящая въ составъ этой терціи; совокупность среднихъ точекъ этой секунды есть центральная ея плоскость; она же есть и совокупность среднихъ точекъ линейной секунды отрѣзковъ, а сами отрѣзки есть концы діаметровъ шаровъ секунды на соотвѣтственныхъ лучахъ изъ O.

По такимъ же тремъ парамъ точекъ, а также ихъ срединамъ и соотвѣтственныхъ шаровъ, для которыхъ эти точки служатъ центрами, мы въ предѣлахъ линейной секунды легко построимъ циклъ, опредѣляемый этими тремя элементами. Ясно, что для этого нужно построить соотвѣтственный циклъ шаровъ, и тогда опять искомый циклъ отрѣзковъ будетъ не что иное, какъ совокупность концовъ діаметровъ цикла на лучахъ, проведенныхъ изъ O.

Изъ этихъ данныхъ сами собою вытекаютъ и другія важнѣйшія характерныя построенія системы.

Для полученія *коллинеарнаго* преобразованія достаточно произвести такое преобразованіе обратными радіусами, чтобы терція шаровъ преобразовалась сама въ себя. Для этого нужно принять за шаръ преобразованія какой-нибудь шаръ R этой же терціи.

Въ самомъ дѣлѣ, тогда ортогональный шаръ O терціи преобразуется самъ въ себя, слѣдовательно сама въ себя преобразуется и вся терція. При этомъ всякая линейная прима шаровъ преобразуется въ линейную же приму шаровъ, а потому соотвѣтственная линейная прима гармоническихъ паръ преобразуется въ линейную же приму тѣхъ же отрѣзковъ; въ частности, каждый шаръ, разсматриваемый совмѣстно съ шаромъ O, обусловливаетъ нѣкоторую линейную приму, централь которой есть лучъ системы. Послѣ преобразованія шаръ O преобразуется самъ въ себя, произвольно взятый шаръ въ нѣкоторый другой шаръ той же терціи, а потому линейная прима имѣвшая централью данный лучъ, преобразуется въ линейную приму, имѣющую централью нѣкоторый другой лучъ системы, а этого достаточно для характеристики концовъ діаметровъ то есть сопряженныхъ паръ точекъ.

Въ этой системѣ совокупность паръ гармоническихъ точекъ линейной примы составляетъ кривую, которая уже не есть нетолько кругъ, но и не коническое сѣченіе, а потому и совокупность точекъ линейной секунды, нетолько не есть шаръ, но и не кривая поверхность второго порядка, а поверхность гораздо болѣе сложная.