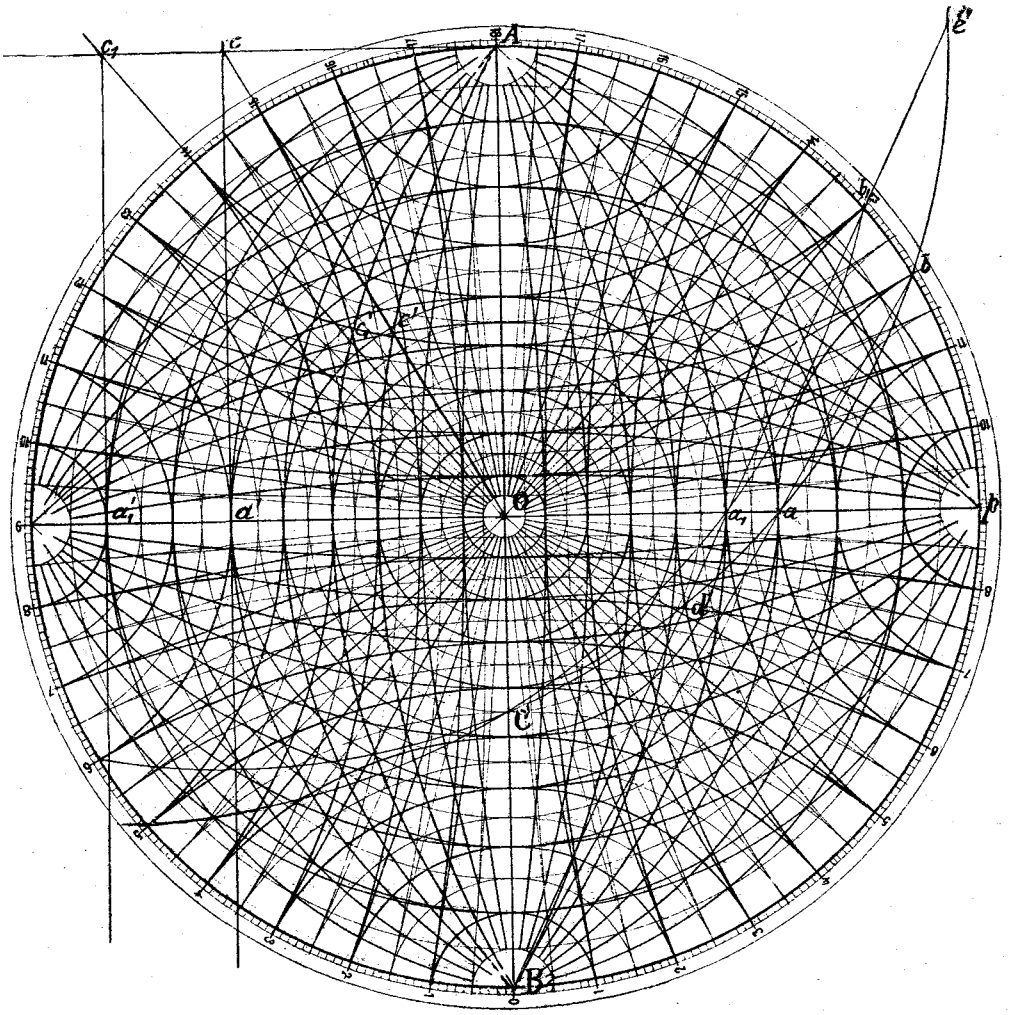
XVI. Е. С. Федоровъ. Замѣтка объ одномъ свойствѣ стереографической проекціи.

Считаю небезполезнымъ отмѣтить одно свойство стереографической проекціи, хотя и не открывающее новыхъ путей для рѣшенія задачъ, но могущее способствовать большей точности рѣшенія нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Каждую точку въ плоскости проекціи мы можемъ принять какъ за полюсъ нѣкоторой дуги большого круга, такъ и вообще за сферическій центръ концентрическихъ на сферѣ дугъ малаго круга, изъ коихъ одна, и только одна, изображается въ проекціи въ видѣ прямой. Поэтому, данная точка однозначно связана нетолько съ дугою большого круга, по отношенію къ которой она называется полюсомъ (и которая представляетъ именно кругъ концентрической совокупности, имѣющій сферическій радіусъ равный 90°), но также ее съ кругомъ совокупности, изображающимся въ видѣ прямой, и поэтому составляетъ *сферическій центръ* этой *прямой* [1]). Какъ извѣстно, эта прямая есть въ то же время изображеніе дуги большого круга какъ граммастереографической проекціи въ линейной проекціи, и каждый радіусъ круга проекціи отмѣчаетъ на обѣихъ двѣ точки, изъ коихъ вторая сферически удалена отъ центра вдвое больше.

Точки этой прямой, какъ линейной проекціи, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что всѣ дуги большого круга, для которыхъ онѣ служатъ дѣйствительными центрами, проходятъ чрезъ двѣ постоянныя (противоположныя) точки проекціи, которыя и есть сферическія центры этой прямой. Это и есть то важное свойство этой прямой, которымъ часто приходится пользоваться при рѣшеніи задачъ.



Если a (фиг. 1) есть данная точка на радіусѣ, концы коего точки O и p и уголъ $ap = \alpha$, то уголъ $Oa = 90° - \alpha$; прямая, для которой a есть сферическій центръ, получится, если на томъ же радіусѣ отмѣтимъ точку a', опредѣляемую условіемъ сферическаго разстоянія $Oa' = 2a$, и чрезъ нее проведемъ къ радіусу перпендикуляръ $a'c$.

[1]) Ср. статью Zur Theorie der krystallographischen Projectionen въ Zeitschrift für Krystallographie *33* 589.

Пусть точки A и B концы діаметра круга проекціи, перпендикулярнаго къ данному радіусу. Проведя лучи Ba, найдемъ, что онъ пересѣчетъ окружность проекціи въ точкѣ b, причемъ углы pa и pb равны.

Слѣдовательно, дуга большого круга, проходящая чрезъ обѣ точки a и b, должна имѣть центръ на радіусѣ, перпендикулярномъ къ радіусу Ob.

Но такъ какъ эта дуга проходитъ чрезъ точку a, то центръ долженъ находиться также и на прямой $a'c$. Слѣдовательно, точка c пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ и есть искомый центръ дуги большого круга, а потому гомологичная c точка c' на томъ же радіусѣ есть полюсъ той же дуги, который находится, въ свою очередь, на той дугѣ $Ac'B$, для которой полюсъ есть a и на той дугѣ cO, для которой полюсъ b.

Также, взявъ точку a_1 на одномъ радіусѣ съ точкою a и получивъ b_1 пересѣченіемъ Ba_1 съ окружностью проекціи, найдемъ прямую $a_1'c_1$, для которой a_1 есть сферическій центръ, и на ней точку c_1; которая есть центръ дуги большого круга a_1b_1, и наконецъ на прямой Oc_1 найдемъ точку c'_1, которая есть полюсъ той же дуги.

Точки c' и c_1' какъ полюсы упомянутыхъ двухъ дугъ то есть точки на сферѣ, дѣлающія со всѣми точками соотвѣтственныхъ дугъ 90°, должны находиться на сферическихъ перпендикулярахъ, проведенныхъ чрезъ средины сферическихъ отрѣзковъ ab и a_1b_1, а таковыми перпендикулярами для этихъ, какъ и для всѣхъ паръ точекъ, ai, bi, находящихся соотвѣтственно на дугахъ pO и pA, составляютъ одинъ общій равнодѣлящій перпендикуляръ $pc'c_1$, дѣлающій съ обоими дугами уголъ 45°. Но если $pc'c_1'$ есть граммастереографическая проекція этой дуги большого круга, то соотвѣтственная линейная проекція есть прямая Acc_1, касательная къ окружности проекціи въ точкѣ A.

Слѣдовательно, всѣ искомыя точки c, c_1... должны находиться на общей касательной Ac, а потому для полученія каждой прямой $a'c$, для которой данная точка a и есть сферическій центръ, нужно провести Ba до пересѣченія въ b съ окружностью проекціи и затѣмъ радіусъ Oc, перпендикулярный къ Ob; прямая, проведенная чрезъ точку c пересѣченія радіуса съ касательною Ac параллельно AB, и есть искомая.

Попутно замѣчу, что, такъ какъ сферическій центръ прямой Ac есть точка C, сферически дѣлящая пополамъ прямой уголъ OB, то значитъ всѣ дуги круга ab, a_1b_1... коихъ соотвѣтственныя точки a и b, a_1 и b_1... дѣлаютъ равные углы съ p, проходятъ чрезъ точку C.

Мы видимъ, что лучи, проведенные изъ точки B, пересѣкаютъ всѣ большіе круги, имѣющіе общую точку C въ парахъ точекъ, симметричныхъ по отношенію къ дугѣ pc'. Но это имѣетъ мѣсто нетолько для точекъ двухъ большихъ круговъ pO и pA, но и для всѣхъ паръ симметричныхъ круговъ. Если на дугѣ ab отложимъ равные сферическіе отрѣзки ad и be, то прямая de также пройдетъ чрезъ точку B.

Этотъ выводъ станетъ очевиднымъ, если мы такъ перемѣстимъ круги, чтобы точка C (и ей противоположная) совмѣстились съ двумя полюсами B и A стереографической сѣтки (для чего достаточно повернуть всю сферу около оси p на уголъ 45°). Тогда всѣ круги будутъ симметричны относительно діаметра pO, а точка B вдвое болѣе сферически удаленная отъ центра, чѣмъ C, будетъ точкою на безконечности, и всѣ, проведенныя чрезъ нея, прямыя будутъ перпендикулярны къ слѣду Op плоскости симметріи.

Итакъ, если всѣ большіе круги пересѣкаются въ любой точкѣ C (и ей противоположной), то всѣ лучи, исходящіе изъ сферически вдвое болѣе удаленной точки B, пересѣкаютъ всѣ эти круги въ двухъ точкахъ, сферически одинаково отстоящихъ отъ общихъ точекъ пересѣченія круговъ.

5-го іюля 1908 г.