29. Построеніе кривыхъ поверхностей второго порядка (коносекундъ) и полный шестигранникъ.

Е. С. Федорова.

Какъ ни изящно построеніе коническихъ сѣченій при помощи теоремы Паскаля, однако оно не имѣетъ достаточной общности, такъ какъ примѣнимо только для пяти вещественныхъ точекъ кривой, а при практическомъ примѣненіи болѣе сложно, чѣмъ нѣкоторые другіе способы.

Какъ наиболѣе общій способъ Штейномъ [1]) данъ способъ опредѣленія и вычерчиванія линейной примы кривыхъ (Kegelschnittbüschel) по двумъ инволюціямъ точекъ на двухъ произвольныхъ лучахъ на плоскости. Какъ извѣстно, инволюція на прямой опредѣляется двумя двойными точками, и слѣдовательно для опредѣленія линейной примы кривыхъ дается въ сущности двѣ произвольныя пары точекъ въ плоскости, которыя принимаются за двойныя точки инволюціи. Эти двѣ точки, которыя могутъ быть вещественными и мнимыми, въ свою очередь, опредѣляютъ безконечное число сопряженныхъ паръ точекъ на каждой изъ прямыхъ; и вотъ всѣ эти пары есть точки пересѣченія одной изъ кривыхъ примы соотвѣтственною прямою.

Если, кромѣ этихъ двухъ инволюцій, дана еще одна точка, которая должна находиться на коническомъ сѣченіи примы, то это необходимо и достаточно для опредѣленія этой индивидуальной кривой.

Въ виду дальнѣйшаго развитія этой концепціи Штейнера и примѣненія ее къ кривымъ поверхностямъ второго порядка (коносекундамъ) я позволю себѣ привести эти въ высшей степени важныя для теоріи коническихъ сѣченій построенія.

Пусть B одна данная инволюція съ двойными точками $g'h'$ и C другая съ двойными точками $g''h''$. Пусть обѣ пересѣкаются въ точкѣ O; пусть этой точкѣ на первой прямой сопряжена точка d, а на второй точка δ. Тогда прямая A, проходящая чрезъ d и δ есть поляра точки O по отношенію ко всѣмъ кривымъ линейной примы, опредѣляемой данными двумя инволюціями.

Въ свою очередь, нетрудно и на ней найти инволюцію, исходя изъ какихъ-нибудь сопряженныхъ паръ c съ γ и b съ β на данныхъ прямыхъ. Для этого каждую изъ этихъ точекъ соединяемъ лучами съ обѣими точками другой пары, а соотвѣтственныя пары лучей c съ b и γ съ β, также c съ β и γ съ b дадутъ на прямой A двѣ пары сопряженныхъ точекъ, а этого, какъ извѣстно [1]), достаточно и для полнаго опредѣленія инволюціи на прямой A то есть нахожденія двойныхъ точекъ на ней.

Въ частномъ случаѣ, если обѣ инволюціи на прямыхъ B и C съ вещественными двойными точками, то и инволюція на A тоже съ вещественными двойными точками, которыя есть не что иное, какъ остальныя двѣ вершины g и h полнаго четырехсторонника $g'\ h'\ g''\ h''$ [2]).

Способъ Штейнера построенія кривыхъ данной линейной примы состоитъ въ томъ, что на прямой A берется пара сопряженныхъ точекъ, которыя соединяются лучами послѣдовательно со всѣми парами сопряженныхъ точекъ на одной изъ прямыхъ B или C, и соотвѣтственными пересѣченіями (перекрестными) полученныхъ четырехъ лучей опредѣляются пары точекъ, принадлежащихъ искомой кривой примы.

Тѣ двѣ сопряженныя точки на прямой A, которыя кладутся въ основаніе этого построенія (засѣчками), какъ извѣстно, принадлежатъ самой кривой (самой прямой A въ этомъ случаѣ будутъ сопряжены двѣ касательныя къ кривой въ этихъ точкахъ). Поэтому способъ этотъ примѣнимъ только въ томъ случаѣ, если кривая пересѣкаетъ прямую A.

---

[1]) Ссылаясь на Штейнера, я имѣю въ виду его классическое сочиненіе Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften, 1867, Leipzig.

[1]) Достаточно эти двѣ пары принять за діаметры двухъ круговъ, и тогда однозначно опредѣлена линейная прима круговъ, концы діаметровъ которыхъ и есть сопряженныя пары точекъ искомой инволюціи; точечные круги, если имѣются, есть вещественныя двойныя точки, а концы діаметра мнимаго ортогональнаго круга есть двойныя мнимыя точки инволюціи.

[2]) На фиг. 1 взятъ случай съ мнимыми двойными точками на лучахъ B и C.

Это необходимо имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда инволюція на A имѣетъ двѣ мнимыя двойныя точки, такъ какъ въ такой инволюціи всѣ сопряженныя пары точекъ вещественны. Но если въ этой инволюціи двѣ вещественныя двойныя точки (точечные отрѣзки, образуемые сопряженными парами), то не всѣ пары вещественны, а есть и мнимыя [1]) и тогда очевидно этотъ способъ построенія непримѣнимъ.

Замѣтимъ, что, какъ показалъ Штейнеръ, мы легко по даннымъ двумъ инволюціямъ B и C получимъ инволюціи на всѣхъ прямыхъ плоскости; онѣ необходимо имѣются, такъ какъ линейная прима коническихъ сѣченій пересѣкается всѣми прямыми плоскости въ инволюціи, сопряженныя пары точекъ которой есть точки пересѣченія одной изъ кривыхъ примы.

Для опредѣленія этой инволюціи тотъ же Штейнеръ даетъ слѣдующій способъ.

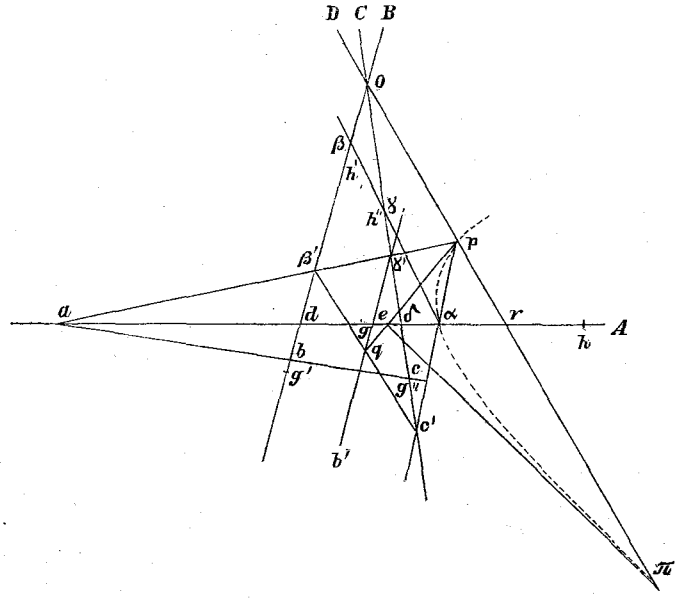
Пусть данная сѣкущая (трансверсаль) пересѣкаетъ B въ точкѣ b, C въ точкѣ c и A въ точкѣ a; тогда этой сѣкущей сопряжена сѣкущая $\alpha\ \beta\ \gamma$, коей точки пересѣченія съ тѣми же прямыми есть точки сопряженныя. Такъ какъ прямыя B и C, по условіямъ построенія, всегда есть сопряженныя прямыя по отношенію ко всѣмъ кривымъ примы эти двѣ прямыя составляютъ одну изъ кривыхъ примы, то значитъ точки b и c есть точки сопряженныя на данной сѣкущей. Кромѣ того, такъ какъ сѣкущая $b\ c$ проходитъ чрезъ точку a, а сопряженная ей сѣкущая $\beta\ \gamma$ чрезъ точку α, то точки a и s (пересѣченія обѣихъ) есть также точки сопряженныя.

Такимъ образомъ опредѣляемъ инволюцію на произвольной сѣкущей.

Въ частности, если проведемъ сѣкущую D чрезъ точку O, то въ этой точкѣ сливаются обѣ точки b и c общей сѣкущей, а въ точкѣ r обѣ точки α и s. Поэтому точки O и r и есть вещественныя двойныя точки инволюціи на такомъ лучѣ, чѣмъ инволюція и опредѣляется.

Чтобы опредѣлить кривую примы, нужно имѣть еще точку, ее опредѣляющую, напр. p. Сама кривая есть не что иное какъ совокупность точекъ, сопряженныхъ точкѣ p на всѣхъ лучахъ, изъ нея проведенныхъ. Въ частности, на лучѣ Op получимъ сопряженную точку π, которая будетъ принадлежать искомой кривой. Понятно, что операція построенія такихъ сопряженныхъ точекъ для каждаго луча очень сложна и кропотлива; она весьма сократится, если удастся найти точки на прямой A, принадлежащей этой кривой, такъ какъ по такимъ двумъ сопряженнымъ точкамъ однозначно составляется вся кривая примы (фиг. 1).

Фиг. 1.



Эти точки легко находятся, если примемъ во вниманіе, что оба луча изъ p, проведенные чрезъ эти точки, есть лучи сопряженные: они должны пересѣчь нетолько прямую A, но и прямыя B и C въ сопряженныхъ точкахъ. Но такихъ лучей, проходящихъ чрезъ произвольную точку плоскости, имѣется вообще всего пара, такъ какъ въ двухъ концентрическихъ инволюціяхъ лучей изъ p, проведенныхъ къ инволюціямъ точекъ на B и на C, съ которыми они находятся въ перспективномъ положеніи, общими сопряженными лучами являются всего два, которые и легко опредѣлить [1]).

Замѣчу, что построеніе кривой можно произвести еще иначе, основываясь на слѣдующемъ.

[1]) Если вещественныя двойныя точки примемъ за діаметры вещественнаго ортогональнаго круга, то получаемъ линейную приму круговъ съ двумя точечными кругами, и если за средину отрѣзка возьмемъ точку внутри этого круга, то всякой такой точкѣ какъ центру соотвѣтствуетъ мнимый кругъ примы, и концы его діаметра есть пара мнимыхъ сопряженныхъ точекъ. (*Н. Г. IV 10*).

[1]) Перспективно перенеся на прямую C двѣ пары сопряженныхъ точекъ на B, получимъ на C двѣ инволюціи, а слѣдовательно (принявъ отрѣзки за діаметры круговъ) двѣ примы круговъ, пересѣкающіяся въ одномъ единственномъ кругѣ. Лучи изъ p къ концамъ діаметра этого круга и есть искомая пара общихъ для кривыхъ примы сопряженныхъ лучей (ср. Записки Г. И. стр. 54).

Въ примѣ кривыхъ чрезъ каждую точку p проходитъ вообще только одна кривая, и эта кривая не имѣетъ ни съ какою другою кривою примы общихъ вещественныхъ точекъ, если таковыхъ не задано для опредѣленія самой примы. Въ каждой же точкѣ кривой можно провести къ ней лишь одну касательную. Поэтому одною изъ важнѣйшихъ задачъ является задача опредѣленія для каждой данной точки единственной, проходящей чрезъ нея, касательной. Чтобы понять способъ нахожденія этой касательной, представимъ себѣ, что по отношенію къ каждой кривой примы мы построимъ поляру точки p. Всѣ эти поляры, какъ извѣстно, пройдутъ чрезъ одну общую точку q, сопряженную съ p по отношенію къ всей примѣ. Эта точка только въ исключительныхъ случаяхъ (общихъ точекъ пересѣченія кривыхъ примы) совпадаетъ съ p, а всегда вообще есть точка отъ нея отличная. Поэтому на касательной чрезъ p, какъ полярѣ точки p по отношеніи къ искомой кривой, точка q находилась бы какъ сопряженная. Но именно для касательной къ кривой мы имѣемъ точечную инволюцію, въ которой всѣ вообще точки сопряжены съ точкою касанія. Съ другой стороны, эта касательная есть единственная поляра точки p, проходящая чрезъ нее самое. Слѣдовательно, прямая pq и есть искомая касательная.

Прямая pq пересѣчетъ прямую A въ нѣкоторой точкѣ e; и если e соединимъ прямою съ точкою π, то ясно, что прямая πe есть касательная къ искомой кривой въ точкѣ π. Это слѣдуетъ изъ того, что полюсъ прямой $p\pi$ долженъ находиться на прямой A и есть не что иное, какъ пересѣченіе одной изъ двухъ касательныхъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и обѣихъ, съ этою прямою, а точка e и есть пересѣченіе касательной къ p съ этою прямою.

Точка q получается попутно при опредѣленіи сопряженныхъ лучей, исходящихъ изъ p. Въ самомъ дѣлѣ, если эти лучи пересѣкаются съ прямыми A, B и C соотвѣтственно въ точкахъ a и α, b' [1]) и β', c' и γ', то точка пересѣченія прямыхъ $b'\gamma'$ съ $\beta'c'$ и есть сопряженная съ p точка q, а a и α искомыя точки пересѣченія кривой съ прямою A.

Прямая ae сопряжена съ прямою Or (ибо проходитъ чрезъ полюсъ e послѣдней) по отношенію къ искомой кривой, а потому, если опредѣлимъ на ней инволюціи (2-го вида) по отношенію къ этой кривой, то легко будетъ воспроизвести и самое кривую по парамъ инволюціи и двумъ постояннымъ точкамъ кривой p и π. Инволюція же легко опредѣляется по двумъ парамъ лучей da съ $\delta\alpha$ и $d\alpha$ съ δa.

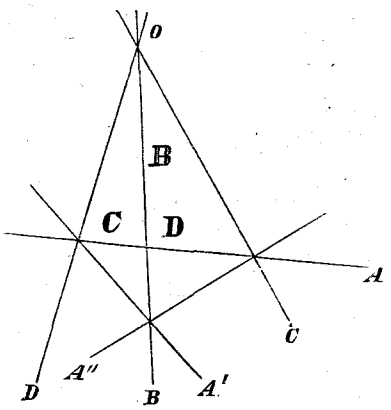
[1]) На чертежѣ точка b' предполагается безконечно-удаленною.

Этимъ завершается циклъ необходимыхъ построеній для воспроизведенія любой кривой примы, опредѣляемой двумя инволюціями на прямыхъ B и C.

Теперь расширимъ эти соображенія въ примѣненіи къ пространству.

Пусть даны три луча B, C и D (фиг. 2), исходящіе изъ точки O и на нихъ даны инволюціи точекъ (или, что все равно, по парѣ вещественныхъ или мнимыхъ двойныхъ точекъ). Означимъ плоскость COD чрезъ **B**, DOB чрезъ **C** и BOC чрезъ **D**. Мы увидимъ далѣе, что этими условіями опредѣляется линейная прима кривыхъ поверхностей второго порядка (коносекундъ); въ частности же, на каждой изъ этихъ плоскостей имѣются всѣ данныя для опредѣленія линейныхъ примъ коническихъ сѣченій (конопримъ).

Фиг. 2.



Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что даны двѣ какія либо коносекунды и произвольно точка O. Проведемъ чрезъ нея три произвольныя плоскости **B**, **C** и **D**. Онѣ пересѣкутся съ коносекундами въ конопримахъ (вещественныхъ или мнимыхъ коническихъ сѣченіяхъ). Въ пересѣченіи каждаго изъ трехъ данныхъ лучей мы дѣйствительно получимъ на каждомъ изъ нихъ опредѣленную инволюцію точекъ какъ инволюцію, опредѣляемую всякою сѣкущею двухъ конопримъ, вещественныхъ или мнимыхъ.

Такъ какъ при данныхъ двухъ коносекундахъ всѣ три инволюціи опредѣляются однозначно, то остается рѣшить только обратный вопросъ, нельзя ли однозначною операціею по нѣкоторымъ тремъ инволюціямъ и напр. еще по одной изъ точекъ этихъ коносекундъ, воспроизвести ихъ цѣликомъ?

На каждомъ изъ лучей мы легко опредѣлимъ точки, сопряженныя центру лучей O; пусть эти

точки будутъ: для луча OB a, для луча OC α и для луча OD **a**. Этими тремя точками опредѣляется плоскость **A**; кромѣ того въ каждой изъ плоскостей **B**, **C** и **D** также опредѣляется инволюція точекъ съ двойными точками (вещественными или мнимыми).

Какъ на каждой изъ плоскостей **B**, **C** и **D** двумя имѣющимися парами опредѣляется вся *инволюція паръ точекъ на плоскости* цѣликомъ, такъ такую же инволюцію мы легко получимъ и на плоскости **A**.

Если прямыя пересѣченія этой плоскости съ тремя первыми мы означимъ соотвѣтственно чрезъ A, A' и A'', то по двумъ изъ нихъ напр. A' и A'' мы легко опредѣлимъ инволюціи и на прямой A, и на всѣхъ прямыхъ плоскости **A**.

Теперь легко составить инволюцію паръ точекъ на любой плоскости **P** пространства, потому что эта плоскость пересѣкаетъ предъидущія четыре въ четырехъ прямыхъ, и на каждой изъ нихъ инволюція опредѣлена, согласно только-что сказанному. Достаточно же двухъ такихъ, чтобы однозначно опредѣлилась инволюція и на всей плоскости.

Такимъ образомъ мы получили *инволюцію паръ точекъ въ пространствѣ*. Каждой точкѣ пространства на произвольной, проведенной чрезъ нея, прямой и на произвольной, проходящей чрезъ нея, плоскости, сопряжена одна опредѣленная точка, и совокупность, то есть секунда, всѣхъ этихъ сопряженныхъ съ нею точекъ составитъ коносекунду, входящую въ составъ примы, опредѣленной двумя данными коносекундами.

Изъ этого же слѣдуетъ, что черезъ каждую данную въ пространствѣ точку можно провести одну, и только одну коносекунду примы (конечно, за исключеніемъ особыхъ, общихъ точекъ примы, если таковыя имѣются).

Такъ какъ чрезъ каждую точку пространства вообще проходитъ только одна коносекунда примы, и къ ней въ этой точкѣ можно провести только одну касательную плоскость, то значитъ каждой точкѣ пространства сопряжена только одна единственная, проходящая чрезъ нея, плоскость.

Однако предварительно разсмотримъ операцію построенія какой нибудь коносекунды.

Для плоскости **A** мы имѣемъ данными двѣ пары лучей A' и A'' съ инволюціями паръ точекъ на нихъ; по этимъ инволюціямъ легко опредѣляемъ инволюцію на прямой A, а, принявъ пару точекъ a и α этой инволюціи за принадлежащую нѣкоторой кривой примы, мы легко воспроизведемъ эту кривую по перекрестному пересѣченію лучей, проходящихъ чрезъ эту постоянную пару и чрезъ всевозможныя пары на одной изъ прямыхъ A' или A'', все равно на какой. Полученная кривая будетъ плоскимъ сѣченіемъ одной изъ поверхностей примы; а теперь, чтобы получить эту поверхность, намъ достаточно чрезъ одинъ изъ лучей C или D проводить плоскости, каждая изъ которыхъ пересѣчетъ только что полученную кривую въ двухъ точкахъ, а по этимъ двумъ точкамъ и перемѣннымъ парамъ инволюціи напр. на прямой C, мы снова воспроизведемъ кривую, которая представляетъ плоское сѣченіе той же поверхности. Такъ какъ плоскость A, по условіямъ построенія, есть полярная плоскость точки O, какъ ея полюса, по отношенію ко всѣмъ поверхностямъ примы, то ту же поверхность мы можемъ получить изъ постоянныхъ вещественныхъ двойныхъ точекъ $g'h'$ на лучѣ C, если только на немъ имѣются такія (а не мнимыя) двойныя точки. Для этого нужно только принять изъ этой пары точекъ одну за центръ секунды лучей, а другую за центръ секунды плоскостей, причемъ, если лучъ проходитъ чрезъ какую-нибудь точку плоскости A, то сопряженная плоскость проходитъ чрезъ поляру точки на той же плоскости по отношенію къ полученной кривой.

Если за сопряженныя на прямой A возьмемъ точки на лучахъ C и D, то кривая въ плоскости A станетъ двумя прямыми A' съ A'', а такъ какъ всѣмъ точкамъ плоскости A сопряжена точка O какъ полюсъ, то ясно, что поверхность станетъ двумя пересѣкающимися плоскостями C и D. И такъ какъ эта пара плоскостей есть одна изъ поверхностей примы, то значитъ на всякой прямой въ пространствѣ двѣ точки пересѣченія съ этими плоскостями есть точки сопряженныя.

Итакъ, если проведемъ произвольную сѣкущую P въ пространствѣ, которая пересѣчетъ **C** въ точкѣ c' **D** въ точкѣ d' и **A** въ точкѣ a', то въ плоскости PO найдемъ три сопряженныя точки: двѣ на лучахъ изъ $O\gamma'$ и δ', и на прямой пересѣченія этой плоскости съ **A** точку α', и всѣ три точки α', γ' и δ' находятся на одной прямой, которая пересѣчетъ данную сѣкущую въ точкѣ s, и сопряженныя пары γ' съ δ' и α' съ s опредѣлятъ на сѣкущей искомую инволюцію.

Пусть даны двѣ поверхности (коносекунды) $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, по которымъ мы желаемъ составить ихъ линейную приму. Возьмемъ въ пространствѣ произвольную точку p и построимъ по отношенію къ обѣимъ поверхностямъ полярныя плоскости, которыя пересѣкутся въ прямой P. Тогда P будетъ одновременно сопряжена съ точкой p по отношенію къ

обѣимъ поверхностямъ, и точка q ея пересѣченія съ произвольною плоскостью, проведенною чрезъ точку p есть та единственная въ такой плоскости точка, сопряженная съ p нетолько относительно тѣхъ двухъ кривыхъ, которыя есть пересѣченіе поверхностей этою плоскостью, но и относительно кривыхъ линейной примы, выводимыхъ изъ этихъ двухъ. Словомъ, эта будетъ единственная сопряженная съ p точка въ данной плоскости, а прямая pq есть касательная въ точкѣ p къ той кривой примы, которая опредѣляется этою точкою. Мы видѣли выше, какъ въ каждой плоскости съ данною инволюціей точекъ опредѣлить единственную точку q сопряженную съ p. Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видѣли, что для этого полученія нужно принять p за центръ двухъ примъ лучей, находящихся въ перспективномъ положеніи съ точками на лучахъ B и C, и тогда прежде всего опредѣляются тѣ два особые луча, которые одновременно являются сопряженными въ обѣихъ примахъ. Эти два луча пересѣкаютъ прямую A въ той же парѣ точекъ, что и кривая, опредѣляемая точкою p.

Переходя къ нашему случаю, мы можемъ чрезъ произвольно данную въ пространствѣ точку p и чрезъ точку O провести приму плоскостей, и во всѣхъ этихъ плоскостяхъ получимъ двѣ инволюціи точекъ на лучахъ изъ O, которыя представлены прямыми пересѣченія каждой плоскости примы съ двумя постоянными плоскостями **C** и **D**; въ нихъ всегда двойными вещественными точками являются точка O и точки пересѣченія лучей съ плоскостью **A**. Проводя изъ p двѣ примы лучей въ перспективахъ положеніи съ этими двумя примами точекъ, мы легко находимъ два особыхъ луча, которые будутъ общими сопряженными для обѣихъ примъ. Эти два луча отмѣтятъ на плоскости **A** пару сопряженныхъ точекъ, принадлежащихъ сѣченію плоскостью поверхности, опредѣляемой точкою p. Побочно получаемъ при этомъ единственную сопряженную по отношенію ко всѣмъ кривымъ сѣченіямъ въ данной плоскости точку q, сопряженную съ точкою p, и прямая pq есть касательная къ кривой сѣченія, а слѣдовательно и самой поверхности въ точкѣ p.

Повторивъ ту же операцію для другой сѣкущей плоскости чрезъ Op, мы также найдемъ другую пару точекъ на плоскости **A**, принадлежащую кривой сѣченія поверхности съ этою плоскостью, и еще получили бы другую, единственную для этой плоскости точку q_1, сопряженную съ p по отношенію ко всей инволюціи точекъ въ плоскости, а прямая pq_1 будетъ другая касательная къ поверхности въ точкѣ p; этимъ опредѣляется и касательная плоскость въ этой точкѣ, чѣмъ поставленная выше задача и разрѣшается.

Замѣтимъ, что прямая чрезъ q и q_1 должна быть тождественна съ прямою пересѣченія двухъ полярныхъ плоскостей точки p по отношенію къ двумъ произвольно взятымъ кривымъ поверхностямъ **K** и $\mathbf{K}_1$ примы, потому что двѣ ея точки, также какъ и прямая пересѣченія двухъ полярныхъ плоскостей и каждыя двѣ точки на ней есть единственныя сопряженныя съ p точки въ соотвѣтственныхъ плоскостяхъ, и qq_1 есть полная совокупность такихъ точекъ; итакъ прямая qq_1 и есть сопряженная съ точкой p по отношенію ко всей инволюціи въ пространствѣ.

Замѣтимъ еще, что именно изъ того обстоятельства, что всѣ точки прямой qq_1 находятся въ плоскости, касательной къ поверхности въ точкѣ p, слѣдуетъ, что мы могли бы провести черезъ p нетолько приму плоскостей съ общею осью pO, но и полную секунду плоскостей, и всегда получили бы въ каждой плоскости этой секунды одну изъ точекъ этой же прямой, какъ единственную съ p сопряженную точку инволюціи.

Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы провели чрезъ p и одну изъ точекъ qq_1 прямую и приняли ее за общую ось примы плоскостей, то сопряженною съ p для всѣхъ плоскостей была бы одна и та же точка такъ какъ вообще на всякой прямой имѣется только одна точка, сопряженная съ данной.

Такимъ образомъ получаемъ болѣе совершенную характеристику и приходимъ къ болѣе удобному построенію инволюціи паръ точекъ на любой плоскости. Прежде всего находимъ на плоскости точку p, которая въ инволюціи въ пространствѣ есть полюсъ плоскости, находящійся въ ней самой; затѣмъ находимъ въ ней прямую qq_1, сопряженную съ p; тогда на каждомъ лучѣ изъ p имѣемъ двѣ готовыя пары сопряженныхъ точекъ инволюціи: кромѣ точки p и точки на qq_1 имѣемъ еще точки пересѣченія съ плоскостями **C** и **D**.

Какую бы плоскость мы ни провели черезъ точку p, всегда въ примѣ кривыхъ, составляющей плоское сѣченіе ею примы поверхностей, точка прямой qq_1 будетъ точкою касанія одной изъ кривыхъ примы. Если чрезъ эту кривую проведемъ поверхность примы, то она вообще пересѣчетъ прямую qq_1 еще въ одной точкѣ за исключеніемъ двойной точки инволюціи на этой прямой, которая будетъ точкою касанія одной поверхности примы къ данной плоскости.

Прямая qq_1 должна пересѣчь плоскости **C** и **D** въ ихъ общемъ ребрѣ B, потому что всякій лучъ изъ p пересѣкаетъ **C** и **D** въ парѣ сопряженныхъ точекъ, а самой точкѣ p сопряжена точка на пря-

мой qq_1. Эта особая точка q' на этой прямой и есть одна изъ двухъ вещественныхъ двойныхъ точекъ, такъ какъ поверхность **C D**, какъ линейчатая, пересѣкается касательною плоскостью въ двухъ прямыхъ, и точка ихъ пересѣченія играетъ роль точки касанія плоскости къ поверхности. Слѣдовательно, инволюція на прямой qq_1 необходимо 1-го вида, и единственною касательною поверхностью примы къ данной плоскости является та, для которой вторая двойная точка есть точка касанія.

Такъ какъ инволюція паръ точекъ на плоскости съ приведенною характеристикою можетъ имѣть мѣсто только на касательныхъ плоскостяхъ, то на такихъ, которыя пересѣкаютъ всѣ поверхности примы, выведенное непримѣнимо.

Ясно, что на данной плоскости (касательной) точкамъ p и q' принадлежитъ одинаковая роль. Если бы мы искали прямую, сопряженную точкѣ q', то получили бы прямую, проходящую чрезъ p и точку пересѣченія плоскости лучемъ B; и на этой прямой послѣдняя точка и p были бы вещественными двойными точками инволюціи. Такимъ образомъ получаемъ тройню (Tripel) сопряженныхъ точекъ по отношенію ко всѣмъ поверхностямъ примы, а потому прямую pq' можно разсматривать какъ сопряженную съ нѣкоторою точкою на лучѣ B.

Возникаетъ кажущееся противорѣчіе, состоящее въ томъ, что полная совокупность такихъ прямыхъ какъ p, той же ступени, что и точекъ въ пространствѣ то есть терція, такъ какъ вообще въ каждой точкѣ можно провести къ одной изъ поверхностей примы касательную плоскость, а въ ней прямую pq'; полная же совокупность точекъ на лучѣ B есть прима.

Это противорѣчіе разъясняется замѣчаніемъ, что точки прямой B (также C) являются исключительными въ системѣ; сопряженныя имъ прямыя неопредѣленны.

Прежде чѣмъ перейти къ разсмотрѣнію того частнаго случая, когда пары двойныхъ точекъ на лучахъ, опредѣляющихъ приму поверхностей, вещественны, мы, чтобы придать дальнѣйшему изложенію полную наглядность, разсмотримъ отношеніе къ этой примѣ полнаго шестигранника. Какъ примѣръ такового мы можемъ взять прямоугольную призму. Мы называемъ полными шестигранниками тѣ образованія, которыя получаются изъ этой призмы, считая ея вершинами, кромѣ перенумерованныхъ восьми точекъ еще три точки x, y и z, находящіяся на безконечности и являющіяся точками пересѣченія трехъ поясовъ этой призмы.

Изъ даннаго опредѣленія слѣдуетъ, что всякій полный шестигранникъ можетъ быть преобразованъ въ прямоугольную призму, если примемъ плоскость xyz за плоскость инволюціи, а центръ перспективы выберемъ, какъ было объяснено въ руководствѣ „Новая Геометрія“ IV 29.

Теперь покажемъ, что черезъ восемь перенумерованныхъ вершинъ полнаго шестигранника можно провести линейную приму коносекундъ. Для этого достаточно показать, что если проведемъ поверхность чрезъ три пары вершинъ, находящіяся на лучахъ, составляющихъ ребра одного пояса (то есть изъ точекъ x, y или z), то поверхность пройдетъ и чрезъ четвертую пару; а что можно провести линейную приму поверхностей чрезъ три такія пары, станетъ очевиднымъ, если принять во вниманіе, что эти три пары есть дѣйствительно пары сопряженныхъ точекъ на лучахъ изъ одной точки.

Возьмемъ, ради опредѣленности, пары точекъ на лучахъ изъ z; проведемъ плоскость чрезъ Oy и Oz, полярную по отношенію къ точкѣ z (въ призмѣ точка z безконечно удалена, какъ и x и y, а потому ихъ полярныя плоскости есть плоскости, проходящія чрезъ двѣ изъ этихъ точекъ и центръ призмы), и тогда сопряженность паръ точекъ по отношенію къ z и точкамъ полярной плоскости станетъ очевидною.

Но совершенно также очевидно, что пары точекъ, взятыя въ другомъ поясѣ напр. на лучахъ изъ y и на лучахъ изъ x, будутъ также сопряженными по отношенію къ тремъ центральнымъ, полярнымъ плоскостямъ.

Итакъ, двѣ остальныя точки не вводятъ новыхъ условій въ построенія, и присутствіе ихъ, какъ общихъ точекъ поверхностей примы, есть простое слѣдствіе присутствія шести изъ нихъ на трехъ лучахъ.

Понятно, что нетолько всѣ восемь, но и шесть изъ этихъ точекъ не могутъ считаться независимыми другъ отъ друга и взятыми произвольно въ пространствѣ. Поэтому возникаетъ вопросъ, сколько же изъ нихъ могутъ считаться независимыми и какъ изъ этихъ независимыхъ вывести остальныя точки?

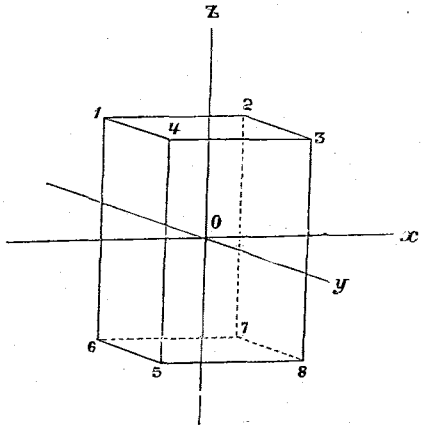
За независимыя можно принять лишь такія точки, которыя по четыре не находятся въ одной плоскости [1]). Поэтому нельзя допустить и двухъ паръ на лучахъ, такъ какъ эти четыре точки находятся въ одной плоскости. Мы можемъ принять за неза-

[1]) Конечно, при этомъ подразумѣвается соблюденіе и другихъ частныхъ условій напр. чтобы никакія точки по три не находились на одной прямой.

висимыя напр. четыре нечетныя точки 1, 3, 5, 7. Но ясно, что изъ нихъ ничего больше вывести нельзя, такъ какъ проведеніе чрезъ нихъ плоскостей чрезъ каждыя три дастъ только четырехгранникъ и ничего больше (фиг. 3).

Остается принять за независимыя только 5 точекъ, напр. кромѣ упомянутыхъ нечетныхъ еще точку 2, и дѣйствительно мы сейчасъ увидимъ, что ими опредѣляются и всѣ остальныя; а что ихъ можно принять за независимыя, видно изъ того, что никакія четыре изъ нихъ не находятся въ одной плоскости.

Фиг. 3.



Три грани призмы, сходящіяся въ вершинѣ 2, непосредственно опредѣляются по тремъ точкамъ въ каждой. Онѣ даютъ въ пересѣченія три направленія, опредѣляющія точки x, y и z въ безконечности.

Чтобы получить остальныя вершины призмы, достаточно изъ этихъ трехъ точекъ провести прямыя чрезъ опредѣленныя уже вершины призмы (то есть кромѣ вершины 2); въ пересѣченіи этихъ прямыхъ и получимъ точки 4, 6 и 8.

Произведя произвольное коллинеарное преобразованіе, мы получимъ нѣкоторый полный шестигранникъ, имѣющій разнообразныя аналогіи съ полнымъ четырехсторонникомъ на плоскости въ отношеніи вывода гармоническихъ группъ точекъ и лучей. Это видно уже изъ того, что на всѣхъ его граняхъ мы имѣемъ полные четырехсторонники, причемъ въ число его вершинъ, кромѣ одной изъ точекъ x, y или z, входитъ еще та, которая преобразована изъ центра грани призмы (получаемая пересѣченіемъ двухъ діагоналей).

Полнымъ шестигранникомъ опредѣляется линейная прима поверхностей, и для того, чтобы получить одну изъ нихъ, нужно задаться еще произвольною точкою p въ пространствѣ.

Мы видѣли выше, какъ по данной точкѣ, проведя чрезъ нее какую-нибудь плоскость, получимъ въ ней два особыхъ сопряженныхъ луча, которыя на плоскости **A** отмѣтятъ двѣ сопряженныя точки a и α, *принадлежащія искомой поверхности:*

Понятно, что проведеніе этихъ двухъ лучей возможно только въ томъ случаѣ, если на плоскости **A** имѣются общія точки съ поверхностью; и получаются эти лучи какъ общіе два сопряженные въ двухъ концентрическихъ примахъ, перспективныхъ съ двумя инволюціями на лучахъ изъ O. Если обѣ эти инволюціи 1-го вида, то дѣйствительно можетъ случиться, что такихъ особыхъ двухъ лучей не имѣется ни въ одной плоскости (иначе эти особыя лучи есть мнимые. Ясно, что это имѣетъ мѣсто именно для тѣхъ плоскостей, которыя не пересѣкаютъ кривой пересѣченія плоскости **A** и искомой поверхности. Поэтому, если вообще такой вещественной кривой не имѣется, то не можетъ быть и вещественныхъ особыхъ лучей, о которыхъ идетъ рѣчь.

Но въ разсматриваемомъ нами случаѣ, когда всѣ восемь вершинъ полнаго шестигранника есть общія точки поверхностей примы, ту же роль, что O играютъ теперь три точки x, y, z, а ту же роль, что **A** играютъ полярныя плоскости трехъ точекъ **X**, **Y**, **Z**. Кромѣ того ясно, что если искомая поверхность есть эллипсоидъ, то она должна вещественно пересѣкать всѣ эти три плоскости; а если въ плоскомъ сѣченіи чрезъ точку O поверхности получается гипербола, то необходимо она пересѣкаетъ одну изъ этихъ плоскостей. А потому пріемъ полученія точекъ a и α примѣнимъ и въ этомъ случаѣ; только за плоскость **A** нужно принять ту изъ упомянутыхъ трехъ плоскостей, которая вещественно пересѣкается искомою поверхностью, о чемъ вообще можно наглядно судить по положенію данной точки p.

Въ частномъ случаѣ, если точка p попадаетъ въ одну изъ граней полнаго шестигранника, кривая поверхность представлена парою плоскостей, въ томъ числѣ тою, въ которой теперь находится пять точекъ этой поверхности (другая плоскость есть та, въ которой находятся точки, сопряженныя съ p по отношенію къ парамъ x и **X**, y и **Y**, z и **Z**). При переходѣ точки p черезъ такое положеніе мѣняется разрядъ кривой поверхности, ею опредѣляемой.

Итакъ, мы показали, какъ можно провести кривую поверхность второго порядка чрезъ произвольно взятыя въ пространствѣ 6 точекъ. Мы начинаемъ съ того, что по произвольно взятымъ 5 точкамъ строимъ полный шестигранникъ. Однако для этого

построенія намъ нужна еще плоскость, коллинеарная безконечно удаленной плоскости того частнаго случая, когда этотъ шестигранникъ представленъ прямоугольною призмою.

Такъ какъ эту плоскость мы можемъ взять въ пространствѣ произвольно, то ясно, что изъ избранныхъ 5 точекъ мы можемъ построить столько полныхъ шестигранниковъ, сколько различныхъ плоскостей въ пространствѣ то есть линейную терцію. Затѣмъ по данной шестой точкѣ поверхность опредѣляется уже однозначно.

Слѣдовательно, по даннымъ произвольно взятымъ 6 точкамъ мы можемъ построить не одну, а линейную совокупность кривыхъ поверхностей, такъ какъ можемъ установить однозначную проективность между каждою такою поверхностью и опредѣленною плоскостью пространства, а таковыхъ имѣется линейная терція.

1 августа 1908.