28. Построеніе кривой поверхности 2-го порядка (коносекунды) по мнимымъ парамъ точекъ или мнимому коническому сѣченію.

Е. С. Федорова.

Мы знаемъ, что по двумъ даннымъ точкамъ e съ e' и коническому сѣченію K на плоскости мы можемъ воспроизвести кривую поверхность 2-го порядка, если изъ этихъ точекъ одну e примемъ за центръ секунды лучей, а вторую e' за центръ секунды плоскостей и приведемъ эти двѣ секунды въ коррелятивное отношеніе тѣмъ, что лучу ea (a точка на плоскости коническаго сѣченія) будемъ считать коррелятивнымъ плоскость $e'A$, гдѣ A поляра точки a по отношенію къ коническому сѣченію K. Извѣстно именно, что въ такой поверхности пересѣчется совокупность лучей и коррелятивныхъ имъ плоскостей [1]).

Въ частности, лучъ ee' пересѣкаетъ плоскость P коническаго сѣченія въ нѣкоторой точкѣ m, которая можетъ находиться какъ внутри, такъ и внѣ кривой K (также [2]) быть точкою этой кривой); точкѣ m въ обоихъ случаяхъ соотвѣтствуетъ поляра M, и слѣдовательно лучу ee' коррелятивна плоскость, которую мы можемъ отмѣтить тою же буквою M въ виду ихъ однозначной связи, такъ же какъ всякій лучъ отмѣтить тою же буквою, что точка на плоскости, чрезъ которую онъ проходитъ, и тогда лучъ ee' отмѣтится иначе точкою m. Конечно и обратно, полярѣ и плоскости M коррелятивны точка и лучъ m.

Мы знаемъ дальше, что полученная такимъ образомъ поверхность S останется тождественною, если кривую K замѣнимъ другимъ плоскимъ сѣченіемъ K_1 той же поверхности, проведеннымъ чрезъ поляру M, оставляя тѣ же точки e и e', какъ центры образующихъ секундъ. Полярѣ M во всѣхъ этихъ сѣченіяхъ коррелятивна совокупность точекъ m на лучѣ, проведенномъ изъ e. Лучъ m и поляра M есть взаимныя поляры, и какую бы плоскость мы ни провели чрезъ одну изъ нихъ, ея полюсъ будетъ точка на другой, и обратно, каждой точкѣ на одной коррелятивна полярная плоскость, проходящая чрезъ другую. Отсюда прежде всего заключаемъ, что роль обоихъ центровъ e и e' тождественна, и мы получимъ ту же поверхность, если e' примемъ за центръ лучей, а e за центръ коррелятивныхъ плоскостей.

Изъ двухъ взаимныхъ поляръ m и M одна непремѣнно пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ, а другая находится внѣ поверхности то есть не имѣетъ съ нею общихъ вещественныхъ точекъ. Если проведемъ чрезъ послѣднюю какую-нибудь плоскость Q, пересѣкающую поверхность, то получимъ коническое сѣченіе, по отношенію къ которому на ней опредѣлится инволюція 2-го вида съ двумя мнимыми двойными точками, которыя мы условно называемъ мнимыми точками пересѣченія данной кривой этою прямою. Теперь докажемъ, что эта инволюція одна и та же для всѣхъ плоскостей, чрезъ нее проходящихъ, а слѣдовательно можно выраженіе „прямая пересѣкаетъ кривую въ двухъ мнимыхъ точкахъ“ распространить и на поверхность второго порядка, такъ какъ таковыми будутъ всегда однѣ и тѣ же точки, какъ это очевидно для прямой, вещественно пересѣкающей поверхность въ двухъ точкахъ, которыя есть двѣ двойныя точки инволюціи 1-го вида.

Пусть внѣшняя взаимная поляра есть прямая M. Возьмемъ на ней точку f и опредѣлимъ полярную ей плоскость F по отношенію къ кривой поверхности. Эта плоскость пересѣчетъ прямую M въ нѣкоторой точкѣ f', которая, какъ находящаяся на полярной плоскости, будетъ сопряженною точкѣ f и нисколько

---

1) Новая Геометрія, V, 24.

2) И тогда каждой точкѣ, касательной къ кривой въ точкѣ m коррелятивна прямая, проходящая чрезъ m; и опять коррелятивные лучъ и плоскость пересѣкаются на той же прямой (въ точкѣ e). Такъ какъ въ составъ поверхности входитъ прямая (ee'), то значитъ поверхность есть линейчатая.

не зависитъ отъ положенія сѣкущей поверхность плоскости, проведенной чрезъ M. Во всѣхъ этихъ плоскостяхъ въ сѣченіи поверхности получится коническое сѣченіе, и по отношенію къ нему поляра точки f есть прямая пересѣченія этой плоскости съ плоскостью, полярною точкѣ f по отношенію къ кривой поверхности; это и требовалось доказать, такъ какъ такимъ образомъ опредѣляется инволюція (2-го вида) на прямой M, а вмѣстѣ съ тѣмъ и двойныя мнимыя точки этой инволюціи.

Возьмемъ еще на M произвольную точку g и построимъ полярную плоскость G. Тогда въ каждой плоскости чрезъ M получимъ двѣ точки, въ которыхъ плоскость G пересѣчетъ коническое сѣченіе, и это будутъ точки касанія g_1 g_2 къ этой кривой изъ точки g. По двумъ точкамъ g_1 и g_2 мы можемъ воспроизвести все это коническое сѣченіе, если опредѣлимъ его лучами, проведенными изъ сопряженныхъ точекъ инволюціи на M и чрезъ эти постоянныя двѣ точки. Отсюда слѣдуетъ, что ту же кривую поверхность мы можемъ опредѣлить тою же инволюціей (то есть ея двойными точками) и еще нѣкоторымъ коническимъ сѣченіемъ въ плоскости G, полярной точкѣ g на прямой M.

Такъ какъ точка g есть нѣкоторая точка на полярѣ M, то значитъ полярная ей плоскость должна проходить чрезъ взаимную поляру ee'.

Слѣдовательно, для опредѣленія той же кривой поверхности мы можемъ взять двѣ мнимыя двойныя точки инволюціи на M и любую кривую сѣченія поверхности плоскостью, проходящею чрезъ ee'. Другими словами, мы можемъ опредѣлить кривую поверхность 2-го порядка нѣкоторымъ коническимъ сѣченіемъ и двумя точками, принадлежащими этой поверхности нетолько вещественно, но и представляющими мнимыя двойныя точки инволюціи на прямой.

Если эти данныя точки есть точки мнимыя, то онѣ находятся на прямой, находящейся внѣ поверхности и представляютъ мнимыя точки пересѣченія поверхности этою прямою.

Теперь возьмемъ какую нибудь точку o на прямой ee' внутри кривой поверхности и найдемъ ея полярную плоскость O, которая будетъ находиться внѣ поверхности. Такъ какъ точка o находится на прямой ee', то ея полярная плоскость должна пройти чрезъ взаимную поляру M.

Проведемъ чрезъ o какую-нибудь прямую, которая пересѣчетъ поверхность въ двухъ точкахъ e_1 и e_1'.

Ясно, что ту же кривую поверхность мы можемъ опредѣлить и кривою сѣченія поверхности чрезъ эти двѣ точки и тѣми двумя мнимыми двойными точками инволюціи n_1 и n_1', которыя находятся на полярѣ, взаимной по отношенію къ e_1 e_1'. Какъ таковыя, онѣ должны находиться въ полярной плоскости O.

Мѣняя положеніе прямой e_1e_1' въ одной и той же плоскости R, которая пройдетъ и чрезъ ee', и чрезъ e_1e_1', мы вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ мѣнять положеніе примы вещественныхъ кривыхъ сѣченій поверхности плоскостями чрезъ e_1e_1' и положеніе двухъ мнимыхъ точекъ n_1n_1' въ плоскости O, и эта плоскость необходимо пройдетъ чрезъ полюсъ r плоскости R, и какъ всякая прямая e_1e_1' находится въ плоскости R, такъ всякая прямая nn' необходимо пройдетъ чрезъ точку r. Совокупность паръ точекъ e_1e_1' составитъ вещественное коническое сѣченіе данной поверхности плоскостью R, въ которомъ постоянною точкою (центромъ лучей) для всѣхъ паръ является точка o. Соотвѣтствующую совокупность паръ точекъ nn' въ плоскости O, лежащей внѣ кривой поверхности и имѣющихъ постоянную общую точку r, мы можемъ означить *мнимою кривою пересѣченія поверхности плоскостью* O.

Благодаря гомологичности паръ точекъ e_1e_1' и точки o на плоскости R съ парами точекъ nn' и точки r на плоскости O мы можемъ установить гомологичность всѣхъ вообще точекъ на данныхъ двухъ плоскостяхъ. Какъ извѣстно[1]), для установленія этой гомологичности достаточно связать гомологичностью четыре точки то есть всего двѣ пары, и тогда само собою слѣдуетъ, что всякому коническому сѣченію, проходящему чрезъ двѣ пары одной системы будетъ гомологично опредѣленное коническое сѣченіе другой системы; слѣдовательно и коническому сѣченію въ плоскости R, представляющему плоское сѣченіе данной поверхности гомологично мнимое коническое сѣченіе на плоскости O. И такъ какъ каждая пара мнимыхъ точекъ (на прямой которой находится точка r) есть пара мнимыхъ точекъ пересѣченія поверхности прямою, находящеюся въ плоскости O, то вся мнимая кривая, какъ совокупность такихъ паръ, есть мнимое сѣченіе поверхности плоскостью O, находящеюся внѣ поверхности.

Теперь мы покажемъ, что ту же поверхность мы можемъ воспроизвести по данному мнимому сѣченію ея какою-нибудь внѣшнею плоскостью O и какой либо парѣ точекъ вещественнаго сѣченія той же поверхности плоскостью R; при этомъ, такъ какъ полюсъ r находится въ плоскости O, и притомъ пара вещественныхъ точекъ проходитъ чрезъ

[1]) Новая Геометрія, II, 24.

o—полюсъ плоскости O, можно сказать, что эта пара и плоскость O мнимой кривой находятся въ особенномъ соотношеніи, которыя мы можемъ отмѣтить какъ сопряженное, принявъ для этого слѣдующее опредѣленіе: прямая и плоскость сопряжены относительно кривой поверхности второго порядка, если прямая проходитъ чрезъ полюсъ плоскости; отсюда само собою слѣдуетъ, что плоскость содержитъ полюсъ плоскости, проходящей чрезъ прямую. Поэтому съ равнымъ правомъ и этотъ полюсъ мы можемъ означить, какъ сопряженный съ прямою.

Теперь посмотримъ, какъ опредѣлить мнимую кривую пересѣченія поверхности плоскостью O то есть совокупность мнимыхъ двойныхъ точекъ nn' инволюціи на этой плоскости.

Полярная плоскость точки o есть O, точки r есть R; слѣдовательно прямыя or и OR есть взнимныя поляры. Плоскости чрезъ OR имѣютъ полюсами точки на or, и въ частности, полюсы двухъ касательныхъ плоскостей этой линейной примы есть точки t и t_1, находящіяся въ самихъ касательныхъ плоскостяхъ, а, слѣдовательно, есть точки пересѣченія этихъ двухъ плоскостей съ прямою or.

Каждая пара лучей, проведенная изъ какой-либо точки поверхности чрезъ эти двѣ точки, отмѣтитъ на плоскости O пару сопряженныхъ точекъ инволюціи на плоскости. Въ частности, точки кривой сѣченія плоскостью R опредѣляютъ на O мнимую кривую изъ паръ двойныхъ точекъ инволюціи на лучахъ изъ r.

Ясно, что по этой кривой и точкѣ r и еще двумъ вещественнымъ точкамъ поверхности t и t_1 можно построить поверхность. Мы видимъ, что кромѣ мнимой кривой и двухъ вещественныхъ точекъ, нужно еще имѣть точку r то есть полюсъ прямой OR относительно кривой.

Если прямая OR безконечно-удалена, то есть плоскости O и R параллельны, то точка r есть центръ кривой, и тогда для опредѣленія поверхности давать точки r не нужно, а достаточно полученной мнимой кривой, которая и есть мнимая кривая пересѣченія поверхности плоскостью O и двухъ точекъ t и t_1.

Такъ какъ полюсъ плоскости O есть точка o, то для опредѣленія поверхности пару точекъ t съ t_1 можно замѣнить какою-угодно другою парою точекъ e съ e' поверхности на прямой, проходящей чрезъ точку o; поверхность воспроизведемъ, если изъ этихъ двухъ точекъ одну, все равно какую, примемъ за центръ секунды лучей, а другую за центръ секунды плоскостей, причемъ послѣднія проходятъ чрезъ поляры точекъ, означаемыхъ на плоскости O первыми по отношеніи къ мнимой кривой пересѣченія поверхности внѣшнею плоскостью O.

Какъ извѣстно [1]), въ такомъ случаѣ точкѣ на плоскости O мы можемъ построить обыкновенною поляру (принимая кривую за вещественную), но затѣмъ эту поляру нужно замѣнить противоположною ей прямой, т. е. параллельною, равностоящею отъ центра, но находящеюся съ другой стороны.

Проведемъ черезъ пару ee' какую-нибудь плоскость, которая въ сѣченіи съ поверхностью даетъ коническое сѣченіе K. Тогда каждая пара лучей изъ какой-либо точки этой кривой чрезъ пару точекъ ee' отмѣтитъ на плоскости O пару точекъ, инволюціи на прямой, проходящей чрезъ пару точекъ nn', гомологичную данной парѣ точекъ; въ частности, тѣ двѣ пары лучей, которыя будутъ имѣть центрами точки e и e', отмѣтятъ двѣ сопряженныя точки. Эти пары лучей будутъ имѣть общимъ лучъ ee', а два другіе луча, касательныя къ вещественной кривой въ точкахъ e и e', пересѣкутся въ точкахъ поляры M точки m относительно мнимой кривой.

Имѣя на плоскости O коническое сѣченіе, вещественное или мнимое, мы вмѣстѣ съ тѣмъ на каждой прямой плоскости получаемъ опредѣленную инволюцію точекъ, которую можемъ замѣнить парою двойныхъ точекъ, и эти точки есть точки пересѣченія кривой, вещественныя или мнимыя. Какъ точки сопряженныя, одна изъ нихъ находится на полярѣ другой по отношенію къ коническому сѣченію.

Отсюда видимъ, что если даны двѣ точки ee' и нѣкоторое коническое сѣченіе въ плоскости O, то, для построенія кривой поверхности, вмѣсто того, чтобы изъ e проводить лучи, а чрезъ e' сопряженныя плоскости, мы можемъ воспроизвести ту же поверхность по частямъ, проводя кривыя въ плоскостяхъ чрезъ ee'. Къ каждой такой плоскости намъ нужно чрезъ обѣ эти точки, какъ центры лучей, проводить пары лучей къ двумъ сопряженнымъ точкамъ на прямой въ этой плоскости, и тогда перекрестное пересѣченіе такихъ двухъ паръ даетъ двѣ точки кривой, а совокупность всѣхъ пересѣченій воспроизведетъ всю кривую пересѣченія поверхности взятою плоскостью.

Итакъ, кривую поверхность второго порядка мы можемъ воспроизвести по данному коническому сѣченію и двумъ точкамъ ee', и проводя изъ этихъ точекъ пары лучей къ сопряженнымъ парамъ точекъ на каждой прямой, проведенной въ плоскости коническаго сѣченія чрезъ точку m (пересѣченія прямой ee' съ плоскостью).

1 августа 1908.

[1]) Новая Геометрія II 6 и IX 10.