

26. Изображеніе структуры кристалла векторіальными кругами.

Діаграмма структуры. Опредѣленіе плотности сѣтокъ. Усовершенствованіе критерія правильной установки. Діаграмма полярной рѣшетки.

Е. С. Федорова.

(Доложено 21-го апрѣля 1908 г.)

Въ статьѣ „Точное изображеніе точекъ пространства на плоскости" рѣшена задача такого изображенія въ трехъ различныхъ элементахъ: кругахъ векторіальныхъ и обыкновенныхъ, и въ параллельныхъ векторахъ. Тамъже дано практическое примѣненіе изображеній въ параллельныхъ векторахъ системы рудниковъ.

Теперь я покажу существенное примѣненіе теоріи для изображеній векторіальными кругами пространственныхъ рѣшетокъ каждаго изученнаго въ структурномъ отношеніи кристалла.

Ознакомившемуся съ упомянутой статьей такое примѣненіе не составитъ никакихъ затрудненій, если дѣло идетъ объ изображеніи какого-нибудь небольшого числа точекъ пространственной рѣшетки. Однако для большого числа точекъ чертежъ получится (хотя и весьма изящный) очень запутаннымъ, и конечно въ изображеніи одного и того же кристалла разными лицами могло бы получится большое различіе въ зависимости отъ того, какія точки каждый пожелаетъ изобразить.

Съ самаго начала замѣчу, что есть простѣйшій пріемъ такого изображенія, устраняющій всѣ упомянутые недостатки и неудобства, и въ то же время достигающій другой важной цѣли: вовлеченіе въ изображеніе нетолько точекъ пространственной рѣшетки, но одновременно и главнаго вида структуры кристалла, опредѣляемаго элементарнымъ параллелоэдромъ системы.

Съ этою цѣлью, представивъ въ системѣ соотвѣтствующій параллелоэдръ, центръ котораго составляетъ одна изъ точекъ системы, нужно изобразить, кромѣ этой точки, еще центры сосѣднихъ или прилегающихъ данному параллелоэдру.

Присоединивъ сюда нѣкоторыя понятныя условія, получимъ вполнѣ опредѣленное изображеніе, дающее въ руки средство графическимъ путемъ рѣшать самыя разнообразныя задачи, относящіяся къ данному кристаллу.

Число изображенныхъ точекъ опредѣляется вслѣдствіе этого числомъ граней параллелоэдра, не считая центральной точки; всего гексаэдрическая структура (трипараллелоэдръ) для изображенія потребуетъ семи, призматическая (тетрапараллелоэдръ) девяти, додекаэдрическая (гексапараллелоэдръ) тринадцати и октаэдрическая (гептапараллелоэдръ) пятнадцати точекъ.

Каждыя двѣ противоположныя точки, какъ входящія съ центромъ въ составъ одной линейной примы, для коей эта центральныя точка и есть центръ, изобразятся равными кругами противоположныхъ направленій, а отрѣзокъ, образуемый ихъ центрами, будто дѣлиться пополамъ центральною точкою. Сами равные круги могутъ быть отличены другъ отъ друга стрѣлками.

Условимся обозначать направленіемъ часовой стрѣлки точки, находящіяся ниже плоскости чертежа а слѣдовательно точки, находящіяся выше плоскости, чертежа, выразятся кругами съ направленіемъ, обратнымъ движенію часовой стрѣлки [1]).

Ради однозначности изображенія условимся принимать въ вертикальномъ (то есть перпендикулярномъ къ плоскости чертежа) направленіи то кристаллографическое ребро, которое съ сопряженною (то есть выражающеюся тѣмъ же символомъ) плоскостью

[1]) Если въ изображеніи два круга, верхній и нижній, совпадаютъ, то можно стрѣлокъ не показывать.

дѣлаетъ уголъ, наименѣе отличающійся отъ прямого. Данное условіе изображенія въ вертикальномъ положеніи именно одной изъ осей кристалла существенно въ томъ отношеніи, что при немъ конгруэнтные ряды точекъ по этой оси выразятся рядами концентрическихъ круговъ, а это конечно для выполненія чертежа наиболѣе просто и наглядно.

Почему именно слѣдуетъ выбирать ось, будетъ видно изъ нижеслѣдующаго; но непосредственно понятно, что при этомъ условіи сама плоскость чертежа ближе всего будетъ къ одной изъ важнѣйшихъ плоскостей кристалла.

Это условіе относится собственно къ триклиннымъ кристалламъ, которые по опыту почти сплошь представляются псеводомоноклинными то есть всегда имѣются почти перпендикулярные другъ къ другу плоскость и сопряженная ось.

Уже въ моноклинныхъ эта перпендикулярность становится точною, а, начиная съ ромбическихъ, въ изображеніи является неопредѣленность, такъ какъ имѣется нѣсколько такихъ сопряженныхъ паръ. Однако эта неопредѣленность вполнѣ устраняется тѣмъ соображеніемъ, что въ числѣ этихъ направленій непремѣнно имѣются и главныя оси, которыя и слѣдуетъ ставить въ вертикальное положеніе.

Соблюденіемъ сказанныхъ условій достигается опредѣленность въ изображеніи структуры каждаго даннаго кристалла, такъ какъ при нихъ каждый авторъ всегда изобразитъ эту структуру вполнѣ одинаково съ каждымъ другимъ; и все различіе сведется лишь къ тому, какъ будетъ повернуто изображеніе около главной оси.

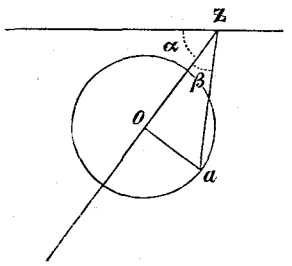
Вслѣдствіе второстепенности вопроса о наилучшимъ поворотѣ я не буду на немъ останавливаться; упомяну только, что здѣсь мы можемъ руководствоваться тѣми же соображеніями, что и при обыкновенныхъ изображеніяхъ.

Какъ увидимъ ниже, искомое изображеніе очень легко получается изъ стереографической проекціи; но также легко и отъ него перейти къ стереографической проекціи кристалла. Оно мало уступаетъ послѣдней какъ основа для разрѣшенія обыкновенныхъ угловыхъ задачъ кристаллографіи, но имѣетъ свои незамѣнимыя преимущества при разрѣшеніи такихъ задачъ первенствующаго значенія, которыя не могутъ быть рѣшены никакими другими имѣющимися способами, а именно задачъ по опредѣленію плотности сѣтки каждой данной грани, не говоря уже объ опредѣленіи плотности конгруэнтныхъ рядовъ.

Для составленія этого изображенія—назовемъ его для краткости *діаграммою структуры*—мы должны имѣть на стереографической проекціи изображенія тѣхъ реберъ, которыя соотвѣтствуютъ конгруэнтнымъ рядамъ параллелоэдра 1).

Если желаемъ изобразить конгруэнтный рядъ ZO (фиг. 1), то понятно, что направленіе этой пря-

Фиг. 1.



мой, какъ ортогональной проекціи прямой же, исходящей изъ общаго центра Z, непосредственно опредѣляется угломъ α, заимствуемымъ изъ стереографической проекціи. Теперь, чтобы получить радіусъ круга, изображающій данную точку, нужно отложить уголъ β между направленіемъ прямой и ортогональною ея проекціею на плоскости чертежа и найти точку пересѣченія a этой прямой съ перпендикуляромъ Oa къ ZO; ясно, что Oa и есть искомый радіусъ круга.

И обратно, если дана діаграмма структуры и на ней опредѣлено ребро, выражаемое кругомъ O (предполагая всякую точку соединяемою съ общимъ центромъ Z), стоитъ провести перпендикуляръ Oa и найти точку a на окружности круга, то получимъ уголъ β, какъ уголъ OZa, а по этому углу прямо отложимъ граммастереографическую проекцію даннаго ребра.

Такова тѣсная связь между діаграммою структуры и стереографическою проекцію, позволяющая легко переходить отъ одного изображенію къ другому.

Теперь познакомимся съ замѣчательными свойствами діаграммы структуры; сначала займемся діаграммами изотропныхъ комплексовъ; операціи построенія для нихъ и для всѣхъ другихъ кристалловъ существенно одинаковы, такъ какъ всѣ остальные комплексы связаны съ ними сродствомъ.

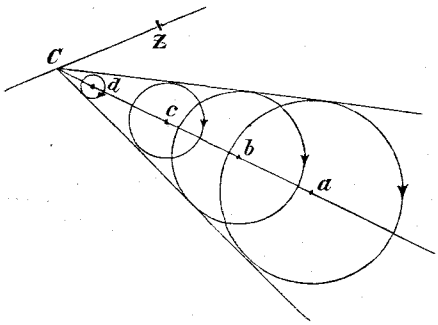
Прежде всего ясно, что каждыя двѣ точки системы опредѣляютъ собою конгруэнтный рядъ точекъ, принадлежащій ихъ примѣ. Тутъ конечно встрѣчаются

1) По этой причинѣ весьма желательно на каждой діаграммѣ кристалла наносить въ граммастереографической проекціи эти точки, какъ это и сдѣлано мною на всѣхъ новѣйшихъ діаграммахъ.

различные случаи, смотря по относительному положенію и знаку (то есть направленію стрѣлки) круговъ, выражающихъ данныя точки.

Если оба круга одного знака и находятся, хотя отчасти, одинъ внѣ другого, напр. круги a, b фиг. 2,

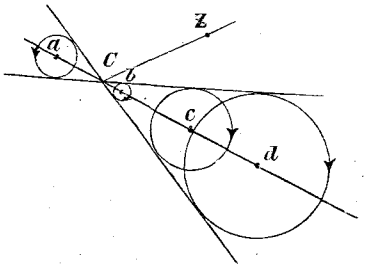
Фиг. 2.



то конгруэнтный рядъ выразится кругами a, b, c, d... съ равно отстоящими другъ отъ друга центрами на одной прямой и имѣющими двѣ общія касательныя, пересѣкающіяся въ центрѣ C примы, то есть той точкѣ примы, которая находится на плоскости чертежа. Такъ какъ сама плоскость чертежа можетъ и не быть плоскостью сѣтки, то и точка C можетъ и не принадлежать конгруэнтному ряду, но тогда ее правильно называть *ирраціональной*, то есть не принадлежащею системѣ, невозможною для нея.

Если оба данные круга разнаго знака, напр. a и b фиг. 3, то центръ примы C находится между

Фиг. 3.

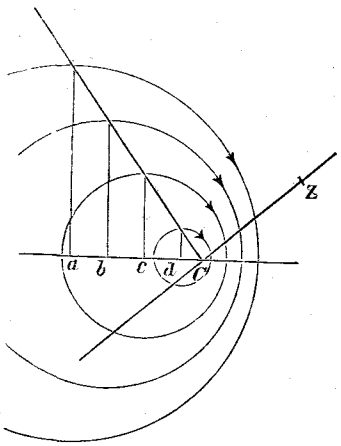


кругами (составляя такъ называемый центръ обратнаго подобія); но все-таки всѣ точки a, b, c, d ... конгруэнтнаго ряда выражаются кругами, имѣющими двѣ общія касательныя, пересѣкающіяся въ центрѣ C.

Если оба круга a и b (фиг. 4) одного знака, но одинъ изъ нихъ находится внутри другого, то общихъ касательныхъ уже не имѣется, хотя всѣ круги имѣютъ общій центръ подобія C, также представляющій точку, находящуюся на плоскости чертежа.

Если, наконецъ, оба данные круга разнаго знака и находятся одинъ внутри другого, то опять таки

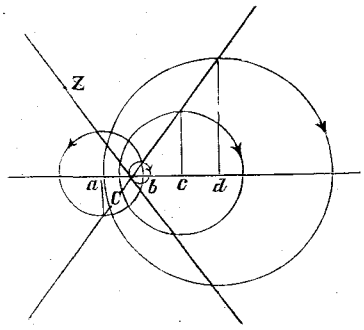
Фиг. 4.



круги не имѣютъ общихъ касательныхъ, но имѣютъ общій центръ подобія C.

Два послѣдніе случая также не отличаются по существу другъ отъ друга, какъ и два первые случая. Такимъ образомъ всѣ эти случаи сводятся къ двумъ: 1) когда каждые два круга ряда находятся, хотя отчасти, одинъ внѣ другого, и 2) когда всѣ круги одного знака непремѣнно находятся каждый внутри или внѣ каждаго другого, а пересѣкаться могутъ лишь круги разнаго знака, какъ показано на фиг. 5.

Фиг. 5.



Наконецъ, промежуточный случай, когда всѣ круги касаются въ одной точкѣ. Ясно, что онъ относится къ прямой, наклоненной къ плоскости чертежа подъ угломъ 45°.

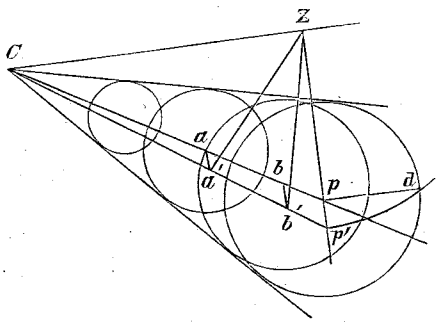
Къ этому добавлю, что во всѣхъ случаяхъ, если соединимъ центръ подобія C съ центромъ системы Z, то прямая CZ выразитъ слѣдъ плоскости

на чертежѣ [1]), опредѣляемой конкруэнтнымъ рядомъ съ центромъ Z. Каждой точкѣ этого ряда коррелятивенъ лучъ или возможное ребро системы, проводимое изъ одного общаго ея центра.

Замѣчу еще, что каждые три сосѣдніе луча системы совмѣстно съ лучемъ, параллельнымъ централи примы (линіи центровъ круговъ), составляетъ четыре гармоническихъ луча, также какъ сами три точки ряда совмѣстно съ безконечно-удаленною точкою составляютъ четыре гармоническія точки.

Теперь покажемъ важнѣйшее преимущество этихъ діаграммъ — возможность опредѣлять площадь параллелограмма любой сѣтки простою графическою операціей. Пусть круги a и b (фиг. 6) двѣ

Фиг. 6.

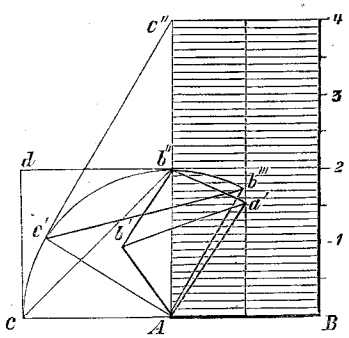


точки пространственной рѣшетки, Z—центръ системы и слѣдовательно Za и Zb двѣ стороны нѣкотораго параллелограма сѣтки, площадь коего требуется опредѣлить.

Находимъ по двумъ кругамъ центръ C примы; прямая CZ есть слѣдъ плоскости сѣтки; вращая около этого слѣда, можемъ плоскость сѣтки совмѣстить съ плоскостью чертежа. При этомъ вращеніи точки a и b опишутъ круги въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ прямой CZ, а потому слѣды этихъ траекторій, какъ самихъ плоскостей, будутъ прямыя aa', bb', перпендикулярныя къ CZ. Если проведемъ еще къ CZ перпендикуляръ Zp, и опредѣлимъ точку p той же примы ab въ видѣ круга и еще проведемъ pd перпендикулярно Zp, то гипотенуза Zd трехугольника съ катетомъ pd, равнымъ радіусу круга, выразитъ истинное разстояніе точки p отъ Z; а потому, если изъ Z, какъ изъ центра, проведемъ дугу круга dp' до пересѣченія въ точкѣ p' съ прямою Zp и соединимъ прямою p' съ C, то трехугольникъ CZp' и есть совмѣщенный съ плоскостью чертежа трехугольникъ CZp, а трехугольникъ $Za'b'$ и есть искомый, совмѣщенный съ плоскостью чертежа, полупараллелограмъ Zab. Его именно площадь и требуется опредѣлить.

Съ этою цѣлью проводимъ на единичномъ разстояніи два перпендикуляра къ прямой AB (фиг. 7),

Фиг. 7.



и на нихъ отмѣчаемъ дѣленія на части, служащія для измѣренія. Беремъ треножный циркуль; устанавливаемъ его ножки въ трехъ точкахъ Z,a',b' (фиг. 6) и накладываемъ его на чертежъ 7 такъ, чтобы одна изъ его ножекъ, напр. Z, пришла въ точку A, другая a' на перпендикуляръ къ AB. Пусть третья точка b' попадетъ и отмѣтитъ точку b', тогда проводимъ прямую $b'b''$ параллельно Aa'; длина Ab'' и выразитъ искомую площадь параллелограма.

Столь простое рѣшеніе этого вопроса совершенно измѣняетъ постановку вопроса о наиболѣе совершенномъ критеріи для правильной установки кристалла.

До сихъ поръ, и именно въ виду сложности рѣшенія задачи по опредѣленію площади параллелограмовъ сѣтокъ, при вычисленіяхъ, по этому опредѣленію, числа наблюдавшихся граней дѣлились не на истинный квадратъ площади, а на квадратъ нѣкоторой воображаемой площади, которая была бы свойственна данной грани, если бы кристаллъ былъ изотропнымъ. Поэтому практиковавшійся донынѣ мною способъ удовлетворителенъ только для такихъ среднихъ кристалловъ, близкихъ къ изотропнымъ, но очень неудовлетворителенъ для сильно положительныхъ и отрицательныхъ кристалловъ.

Вотъ почему теперь за строгое научное изслѣдованіе кристалла можно признать лишь такое, которое сопровождается построеніемъ діаграммы структуры, и именно на основаніи ея опредѣляется правильная установка кристалла.

[1]) Въ новой Геометріи эта прямая называется *осью подобія линейной секунды*, представленной совокупностью точекъ на одной плоскости.

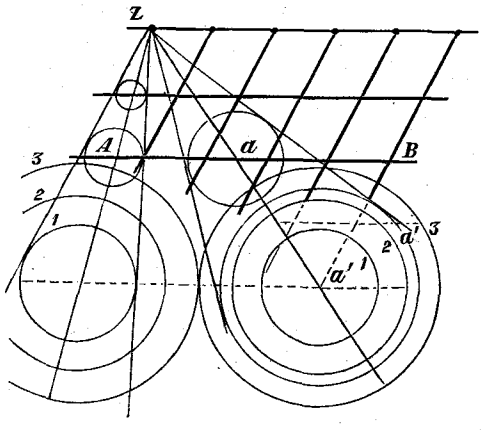
Конечно, черезъ это дѣло научнаго изслѣдованія кристалла нѣсколько усложняется, но несомнѣнно становится на болѣе прочную опору.

Только что изложеннымъ методомъ опредѣленія площади параллелограма сѣтки дѣло опредѣленія ея плотности еще не кончается, такъ какъ нужно убѣдиться, что обѣ конечныя точки реберъ принадлежатъ двумъ смежнымъ рядамъ (по Браве такія ребра, какъ извѣстно, называются сопряженными). Поэтому весьма важное значеніе получаетъ рѣшеніе задачи опредѣленія ближайшихъ точекъ системы въ каждомъ данномъ рядѣ.

Прежде всего ясно, что, какъ бы ни былъ расположенъ въ пространствѣ данный рядъ, мы можемъ замѣнить его рядомъ центральнымъ, то есть однимъ изъ реберъ связки, имѣющей своимъ центромъ точку Z.

Съ цѣлью облегчить рѣшеніе задачи на діаграммѣ структуры проводятся два или три ряда параллельныхъ прямыхъ, всѣ точки пересѣченія которыхъ есть проекціи всѣхъ возможныхъ вертикальныхъ рядовъ. Поэтому, если вообще рядъ въ направленіи даннаго центральнаго ряда возможенъ, то изображающая его прямая необходимо пройдетъ, кромѣ центра, еще черезъ рядъ вершинъ параллелограмовъ сѣтки модели. Чтобы найти, въ какой вершинѣ пересѣчетъ сѣтку данный рядъ, вовсе нѣтъ необходимости фактически продолжать прямую до этого пересѣченія: объ этомъ можно заключить и по положенію точки пересѣченія a данной прямой съ какимъ нибудь рядомъ сѣтки (фиг. 8). Напр.,

Фиг. 8.



если мы видимъ, что прямая Za пересѣкла второй рядъ AB посреди между двумя смежными вершинами, то отсюда непосредственно и логически заключаемъ, что она фактически пересѣчетъ сѣтку въ вершинѣ a', принадлежащей четвертому ряду.

Но такое пересѣченіе въ проекціи еще не обозначаетъ непремѣнно, что оно произойдетъ въ вершинѣ: оно можетъ происходить по вертикали въ промежуткѣ между нѣкоторыми двумя вершинами. Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, конечно, должно быть дано пространственное положеніе ребра, то есть хоть одинъ кругъ, выражающій положеніе одной изъ точекъ луча.

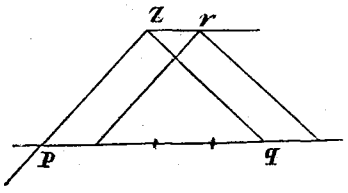
Пусть этотъ данный кругъ есть кругъ a во второмъ ряду; по немъ строимъ кругъ a' въ четвертомъ ряду, а, согласно діаграммѣ строимъ круги, принадлежащіе той же вертикали.

Мы видимъ, что кругъ a' находится между 2-мъ и 3-мъ кругами вертикали, занимая третью часть между первымъ и вторымъ изъ послѣднихъ. Отсюда заключаемъ, что, продолжая тотъ же лучъ, второй разъ онъ пересѣчетъ сѣтку въ 8-мъ ряду на двѣ трети между 2-мъ и 3-мъ кругами, а слѣдовательно въ 12-мъ ряду пересѣчетъ ту же сѣткѣ уже въ 3-мъ кругѣ; итакъ ближайшая точка сѣтки на данномъ лучѣ находится въ 12-мъ ряду; этимъ вполнѣ опредѣляется плотность точекъ даннаго конгруэнтнаго ряда.

Во всякомъ случаѣ, этотъ пріемъ даетъ возможность для каждаго даннаго ряда опредѣлить ближайшую къ центру точку.

Сдѣлавъ это для двухъ лучей, мы уже легко опредѣлимъ плоскую сѣтку данной этими лучами плоскости, а вмѣстѣ съ тѣмъ и найдемъ ближайшія къ центру точки сѣтки. Пусть два данные центральные луча p и q, гдѣ эти буквы (фиг. 9) выражаютъ

Фиг. 9.



въ то же время ближайшія къ центру точки въ каждомъ изъ рядовъ. Этимъ опредѣляется рядъ pq; лучъ, параллельный этому ряду, назовемъ r и опредѣлимъ на немъ ближайшую точку, выражаемую тою же буквою; тогда ясно, что рядъ r будетъ въ этой сѣткѣ сопряженнымъ и ряду p, и ряду q; поэтому какъ трехугольникъ rZp, такъ равно и трехугольникъ rZq будутъ равномѣрными и выражать площадь полупаллелограмма данной сѣтки.

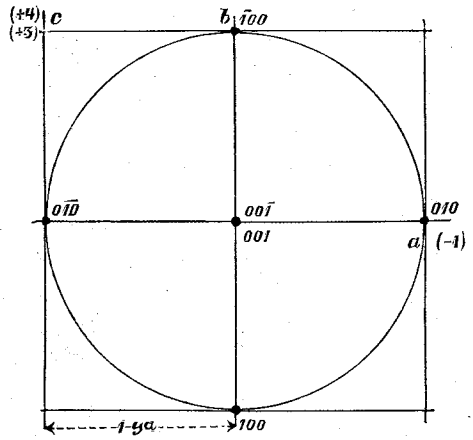
Что касается изображенія ребра по данному символу, то соотвѣтственное построеніе діагонали

параллелепипеда столь элементарно, что полагаю излишнимъ входить здѣсь въ какія либо подробности. Замѣчу лишь, что мы можемъ условиться подъ символомъ ребра подразумѣвать даже опредѣленную точку системы, а именно ближайшую къ центру точку на ребрѣ. Такою условностью одновременно достигались бы двѣ цѣли: нетолько давалось бы пространственное положеніе самаго луча, но также и промежутокъ ряда на немъ, каковымъ является разстояніе ближайшей точки отъ центра.

Теперь перейдемъ къ изображенію главнѣйшихъ структуръ, начиная съ изотропныхъ комплексовъ.

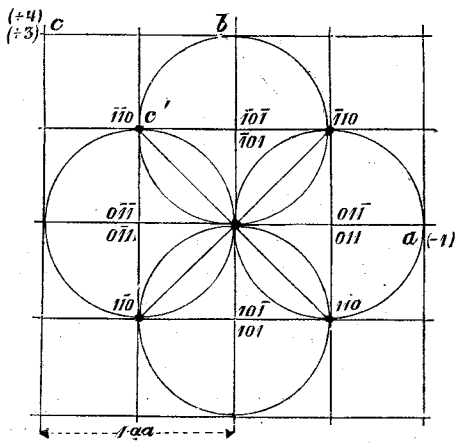
На фигурахъ 10—13 изображены эти четыре

Фиг. 10.



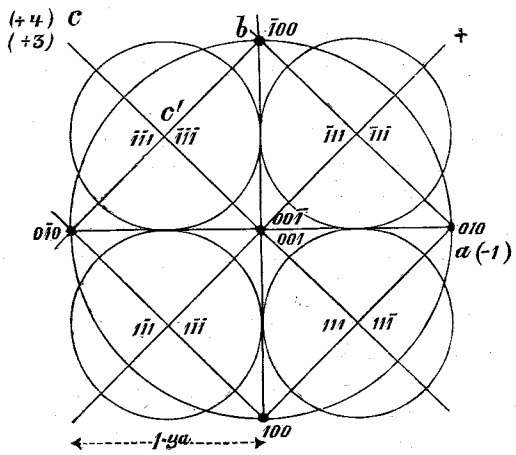
структуры, а именно фиг. 10 представляетъ діаграмму гексаэдрической, фиг. 11—додекаэдрической, фиг. 12—октаэдрической, фиг. 13—призматической структуры.

Фиг. 11.



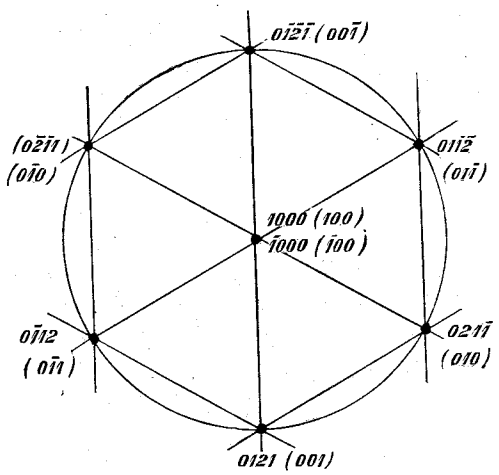
Въ изображеніяхъ этихъ я имѣлъ въ виду нетолько расположеніе частей, но и самое величину изображенія, чтобы во всѣхъ изображеніяхъ площадь сѣтки, принимаемая за единицу, имѣла одинаковую величину (25 мм. въ квадратѣ).

Фиг. 12.



Съ этою цѣлью я на всѣхъ фигурахъ отмѣтилъ длину единицы какъ стороны квадрата, составляющаго параллелограмъ сѣтки въ граняхъ {001}.

Фиг. 13.



Чтобы показать на примѣрахъ этихъ простѣйшихъ моделей способы рѣшать кристаллографическія задачи и особенно задачу опредѣленія плотности сѣтокъ, я выбираю для такого опредѣленія кристаллическія плоскости {211} и {311}.

Согласно изложенному, нужно сначала найти два ребра (луча), которые находились бы въ этой плоскости.

Съ этою цѣлью прежде всего нужно опредѣлить пояса:

$\begin{vmatrix}211\\100\end{vmatrix} = 01\bar{1}$ и $\begin{vmatrix}211\\010\end{vmatrix} = \bar{1}02$, а также $\begin{vmatrix}311\\100\end{vmatrix} = 01\bar{1}$ и $\begin{vmatrix}311\\010\end{vmatrix} = \bar{1}03$.

Какъ видимъ, для обѣихъ задачъ одинъ лучъ, а именно $[01\bar{1}]$, получается общимъ и отмѣченъ на чертежахъ буквою a, при которой поставлена цифра—1, чтобы показать, что точка находится ниже плоскости чертежа на разстояніи 1—цы.

Также лучи $[\bar{1}02]$ и $[\bar{1}03]$ проектируются въ одну и ту же точку b, но находятся выше плоскости чертежа, первый на $+2$, второй на $+3$. Соединяемъ ближайшія точки этихъ лучей прямою, и проводимъ изъ центра параллельный ей лучъ. Этотъ лучъ, какъ видѣли выше, будетъ сопряженнымъ по отношенію къ обоимъ предыдущимъ; его ближайшая точка при гексаэдрической структурѣ будетъ проектироваться въ точкѣ c, но выше плоскости чертежа на разстояніи $+3$ для первой и $+4$ для второй задачи.

Полупараллелограмы, опредѣляющіе плотности данныхъ сѣтокъ, уже получены, и остается только, по вышеописанному способу, привести ихъ въ совмѣщеніе съ плоскостью чертежа.

Произведя фактически эту операцію, мы конечно получаемъ скопленіе небольшихъ погрѣшностей, да и самый отсчетъ почти невозможно производить до сотыхъ частей единицы; я прочелъ на діаграммѣ ок. 2, 4 (теоретически $\sqrt{6} = 2{,}45$).

Перенеся то же построеніе на фиг. 11, мы замѣчаемъ, что точка c не есть ближайшая къ центру; настоящая ближайшая для второй задачи $(+4)$ будетъ точка c' вдвое болѣе близкая, почему ей принадлежитъ отсчетъ $(+2)$, а точка съ таковымъ отсчетомъ дѣйствительно входитъ въ составъ системы, такъ какъ уже число 1 выражаетъ промежутокъ вертикальнаго ряда. Итакъ, площадь параллелограма для {311} и додекаэдрической структуры меньше и значитъ плотность сѣтки вдвое больше, чѣмъ для гексаэдрической структуры.

Также для первой задачи точка c $(+3)$ не есть ближайшая къ центру, а ближайшею является точка c', вдвое болѣе близкая, которой принадлежитъ поэтому отсчетъ $(+\frac{3}{2})$; таковая же точка дѣйствительно входитъ въ составъ системы, такъ какъ на чертежѣ показаны по данной вертикали отсчеты $(\pm {}^1/_2)$ (фиг. 12).

Итакъ площадь параллелограма для {211} и октаэдрической структуры вдвое меньше и значитъ плотность сѣтки вдвое больше, чѣмъ для гексаэдрической структуры.

Конечно, этотъ результатъ, полученный графическимъ путемъ съ помощью новой проекціи, намъ хорошо знакомъ, такъ какъ въ грани {211} два нечетныхъ, а въ грани {311} три нечетныхъ индекса; и не для провѣрки этой точно установленной теоремы я производилъ эти графическія операціи, а наоборотъ, для провѣрки самихъ графическихъ операцій. Теперь важна для насъ простота этихъ операцій, позволяющая съ дѣйствительнымъ удобствомъ пользоваться ими для практическихъ разсчетовъ.

А вѣдь мы въ сущности взяли довольно сложные примѣры, такъ какъ фактически на кристаллахъ вообще рѣдко встрѣчаются грани съ символами, болѣе сложными, чѣмъ взятые нами; и когда таковые встрѣчаются, онѣ бываютъ такъ рѣдки, что фактически ихъ можно игнорировать.

Вотъ почему показанный здѣсь способъ опредѣленія плотности сѣтокъ имѣетъ чрезвычайно большое значеніе въ дѣлѣ разсчета вѣроятности всякой данной принятой установки.

Этимъ, можно сказать, фактически разрѣшается вопросъ, бывшій въ кристаллографіи долгое время больнымъ мѣстомъ.

Указаннымъ выше способомъ при помощи треножнаго циркуля опредѣляется площадь параллелограма каждой данной сѣтки. При вычисленіи же вѣроятности установки нужна не эта величина, а ея квадратъ.

Конечно, изъ числа очень просто получить и квадратъ. Однако, мнѣ представляется удобнѣе даже эту операцію замѣнить графическою при помощи того же циркуля. Эта операція показана на фиг. 7. Мы получили на ней площадь параллелограма въ видѣ отрѣзка Ab''. Ясно, что квадратъ $Ab''dc$ и есть тотъ, площадь котораго нужно опредѣлить. Для этого ножки циркуля можно установить на упомянутыхъ двухъ точкахъ и еще точкѣ c, а затѣмъ повернуть циркуль около точки A, какъ около центра, пока точка b'' не придетъ на ту же среднюю вертикаль въ точку b'''; точка c перемѣстится при этомъ въ точку c'; проведя $c'c''$ параллельно Ab''', мы получимъ отрѣзокъ Ac'', длина котораго и выразитъ искомую площадь квадрата.

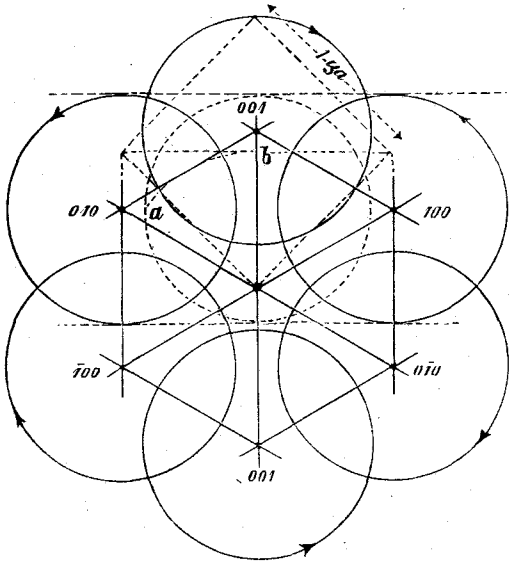
Ради наглядности, на чертежѣ показанъ случай, когда площадь параллелограма равна двумъ единицамъ; и мы видимъ, что величина квадрата этой площади дѣйствительно получилась равна четыремъ.

Этотъ пріемъ имѣетъ еще и нѣкоторое преимущество въ точности, такъ какъ при выраженіи длины

Ab'' въ видѣ числа мы дѣлаемъ все-таки нѣкоторую ошибку въ чтеніи отчета, а графически пользуемся истинною длиною.

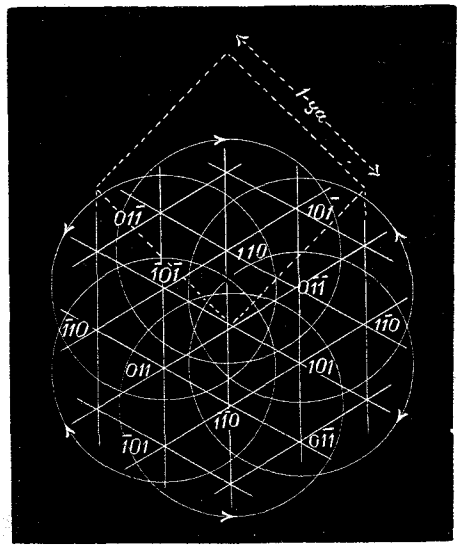
Такъ какъ изотропные комплексы кубическаго типа могутъ разсматриваться нетолько какъ тетрагоналоидные, но и какъ тригоналоидные, то ясно, что діаграммы ихъ структуры могутъ быть составлены въ иномъ видѣ, какъ это и сдѣлано на фиг. 14—16, а

Фиг. 14.



именно на фиг. 14 изображена гексаэдрическая, на

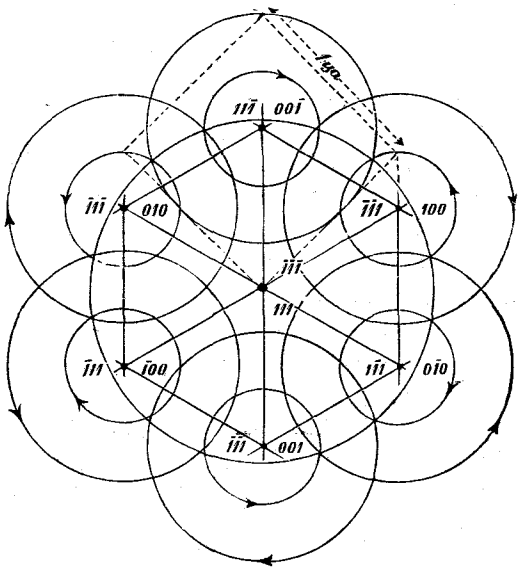
Фиг. 15.



фиг. 15 додекаэдрическая, и на фиг. 16 октаэдрическая структуры.

Едва ли есть надобность, послѣ объясненнаго выше, входить въ детали составленія этихъ діаграммъ [1]). Но, какъ сказано, важно для всѣхъ при-

Фиг. 16.



нять постоянную единицу площади, и вотъ слѣдуетъ объяснить, какъ здѣсь получается эта единица.

Для этого достаточно остановиться на фиг. 14.

Ясно что параллелограмъ, построенный на лучахъ [100] и [010], представляетъ ортогональную проекцію квадрата, имѣющаго единичную площадь. Чтобы получить эту площадь нужно, значить найти ось подобія секунды и повернуть около нее, пока этотъ квадратъ не совмѣстится съ плоскостью чертежа.

Для этого строимъ приму круговъ [100] и [010], въ данномъ случаѣ равныхъ, а потому равными будутъ и всѣ круги примы вообще. Центръ подобія будетъ на безконечности, а потому ось подобія есть прямая параллельная централи примы и обѣимъ двумъ касательнымъ къ кругамъ примы, проходящая чрезъ центръ системы; строимъ кругъ примы, коего центръ находится на перпендикулярномъ къ этой оси лучѣ, и проводимъ въ немъ діаметръ, параллельный этой оси. Если точка a есть одинъ изъ концовъ этого діаметра, то изъ центра системы чрезъ эту точку проводимъ кругъ до пересѣченія въ точкѣ b съ перпендикуляромъ; такимъ образомъ точка діаметра, при упомянутомъ вращеніи перемѣстится по направленію перпендикуляра,

[1]) Ниже будетъ приведенъ самый простой видъ этого способа.

такъ что діаметръ перемѣстится въ параллельную прямую проходящую чрезъ точку b.

Мы видимъ, что полученный отъ совмѣщенія съ плоскостью чертежа параллелограммъ есть дѣйствительно квадратъ, и вотъ сторона его и есть искомая линейная единица, какъ это отмѣчено на чертежѣ.

Такъ же получена эта единица и на фигурахъ 15 и 16. Какъ упомянуто, такіе размѣры (въ натуральную величину на всѣхъ фигурахъ) придаются по той причинѣ, чтобы во всѣхъ случаяхъ можно было пользоваться одною общею скалою дѣленій (фиг. 7).

Наконецъ въ поясненіе фиг. 13 укажемъ, что и здѣсь противъ каждой ближайшей точки системы поставленъ символъ соотвѣтственнаго луча; но кромѣ индексовъ символа здѣсь же въ скобкахъ приведены и субъиндексы 1), которыми особенно удобно пользоваться для построеній и вычисленій, такъ какъ символы граней, проходящихъ чрезъ данныя ребра, какъ извѣстно, вычисляются не по индексамъ, а по субъиндексамъ напр. грань $\left|\begin{smallmatrix}0121\\1000\end{smallmatrix}\right|$ вычисляется по $\left|\begin{smallmatrix}001\\100\end{smallmatrix}\right| = 0\bar{1}01$.

Теперь разсмотримъ на нѣсколькихъ примѣрахъ преимущества, какія даетъ вычисленіе вѣроятности установки на новыхъ основаніяхъ, пользуясь діаграммою структуры и опредѣляя дѣйствительныя величины плоскости сѣтокъ.

Какъ первый примѣръ разсмотримъ кристаллы м.-нитранилина. Правильная установка этихъ кристалловъ была мною разсмотрѣна въ спеціальной статьѣ 2).

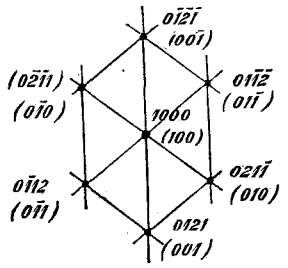
Эти кристаллы, въ числѣ другихъ семи, составляли, по моему мнѣнію, больное мѣсто въ современной кристаллографіи, такъ какъ ихъ развитіе формъ, какъ оно было раньше описано, противорѣчило выяснившимся теперь законамъ. Поэтому, доставши кристаллы, я произвелъ спеціальное изслѣдованіе. И дѣйствительность оказалась не противорѣчащею этимъ законамъ вслѣдствіе открывшейся неполноты въ описаніи этихъ кристалловъ.

Но ихъ комплексъ оказался сильно положительнымъ, почему, несмотря на сдѣланное пополненіе прежнихъ наблюденій, цѣна установки все-таки мала, а именно лишь около 0,70, хотя новая гипогексагональная, установка, ни какихъ сомнѣній не возбуждала.

Теперь, имѣя болѣе совершенный критерій, я имѣю возможность получить болѣе высокую цѣну установки, вслѣдствіе чего увѣренность въ ея правильности весьма возрастаетъ.

Прежде всего конечно нужно было составить діаграмму структуры, что и приведено на фиг. 17.

Фиг. 17.



Эта діаграмма, какъ описано, составляется на основаніи стереографической проекціи кристалла.

Въ виду того, что наблюденная комбинація есть.

H 1000; D 110$\bar{1}$, 1110; A 210$\bar{1}$, 2110,

и потому заключаетъ въ себѣ всего 13 (паръ) граней, нужно опредѣлить квадрата площади сѣтокъ главнѣйшихъ граней и собрать ихъ въ числѣ тѣхъ же 13. Понятно, что теперь послѣдовательность формъ по плотности получится иная, и вотъ въ этой то послѣдовательности и составлена ниже слѣдующая табличка, причемъ, въ первой строчкѣ означены числа граней соотвѣтствующей формы, во второй—графически опредѣленныя величины квадратовъ площадей параллелограмовъ, а въ третьей—частныя отъ дѣленія первыхъ чиселъ на вторыя.

Символы	1000	0110	1110	2110	0101	1101	2101	
число граней	1	2	4	4	1	1		
квадратъ площ.	0,025	0,17	0,21	0,26	0,27	0,38		
	40	12	19	15	4	3	—	93
число граней	1	—	4	4	—	2	2	
квадратъ площ.	0,025	—	0,21	0,26	—	0,38	0,45	
	40	—	19	15		6	4,5	84,5

Итакъ, теперь вмѣсто цѣны установки 0,70 получилось число 845 : 930 = 0,91 то есть уклоненіе отъ достовѣрности 1) съ 30 сокращается до 9.

Такимъ образомъ, и для случая сильно положительнаго кристалла получаемъ столь же крупное число для цѣны установки, какъ въ случаѣ кристалловъ, близкихъ къ изотропнымъ, какъ это и нужно было впередъ ожидать.

---

1) Изъ элементовъ кристаллографіи извѣстно, что если $0, p_1, p_2, p_3$ индексы а q_0, q_1, q_2, субъиндексы, то

$q_0 : q_1 : q_2 = 3p_0 : 4p_1 - 2p_2 : 2p_1 - 4p_2$ и

$p_0 : p^1 : p_2 : p_3 = p_0 : 2p^1 + p_2 : p^1 + 2p_2 : -p^1 + p_2$.

2) Specielle Erprobung des krystallographischen Limitgesetzes въ Zeitschrift für Krystallographie XLII 8.

4) Ср. замѣтку „Усовершенствованіе критерія правильной установки стр. 234.

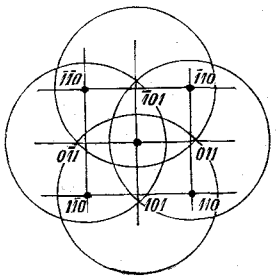
Какъ второй примѣръ разсмотримъ кристаллы брукита, для которыхъ на стр. 197 оказались столь нерѣшительные результаты, колеблющіеся между додекаэдрическою структурою кубическаго типа и структурою призматическою. Соотвѣтствующія цѣны установокъ получились 0,71 и 0,67.

Для сравненія этихъ двухъ допущеній теперь нужно было бы составить двѣ діаграммы структуры; но такъ какъ именно для послѣдняго (гипогексагональнаго) комплексъ получился бы весьма близкимъ къ изотропному (а именно символъ $\overset{51}{+1}$), то примѣненіе усовершенствованнаго пріема не привело бы къ новымъ числамъ цѣны; поэтому достаточно примѣнить этотъ пріемъ для второго допущенія.

Діаграмма структуры для этой установки показана на фиг. 18.

Произведя тотъ же рядъ операцій, что и для

Фиг. 18.



предъидущаго случая, и аналогично составивъ таблички, найдемъ [1]):

Символы	001	111	100	010	101	011	110	102	210	104	—
Число граней	1	4	1	1	2	2	1	—	—	—	—
Квадратъ площ.	0,10	0,17	0,32	0,31	0,54	0,56	0,64	—	—	—	—
	10	23,5	3,1	3,2	3,7	3,6	1,5	—	—	—	48,6
Число граней	1	4	—	1	—	—	—	2	2	2	—
Квадратъ площ.	0,10	0,17	—	0,31	—	—	—	0,81	1,50	2,00	—
	10	23,5	—	3,2	—	—	—	2,5	1,3	1,0	41,5

И такъ, теперь цѣна установки получается 415 : 486 = 0,85 вмѣсто прежней 0,71 то есть уклоненіе отъ достовѣрности сокращается съ 29 до 15.

Въ виду того, что послѣдовательность символовъ вызываетъ сомнѣніе въ принадлежности кристалла къ гексаэдрической структурѣ, можно его разсѣять посредствомъ слѣдующихъ табличекъ:

Символы	001	010	101	011	110	111	102	210	014	—
Число граней	1	1	2	2	2	4	—	—	—	—
Квадратъ площ.	0,10	0,31	0,56	0,56	0,64	0,66	—	—	—	—
	10	3	3,5	3,5	3	6	—	—	—	29
Число граней	1	1	—	—	—	4	2	2	2	—
Квадратъ площ.	0,10	0,31	—	—	—	0,66	0,81	1,50	2,00	—
	10	3	—	—	—	6	2,5	1,3	1	24

Для гексаэдрической структуры цѣна установки получается 24:29=0,81, все таки чувствительно меньшая, чѣмъ для структуры додекаэдрической.

Мы видѣли (стр. 197), что символы комплекса брукита и анатаза такъ близки другъ къ другу, что сами комплексы можно считать гомоморфными.

По этой причинѣ, опредѣленныя величины площадей (и ихъ квадратовъ) для брукита можно непосредственно перенести и на анатазъ.

Такимъ образомъ составили бы таблички для вычисленія цѣны установки анатаза, если бы и оказалось, что формъ, появляющихся въ болѣе, чѣмъ половинѣ всѣхъ кристалловъ въ анатазѣ всего двѣ, а именно {001} и {111}, и какъ разъ эти формы и соотвѣтствуютъ наиболѣе плотнымъ сѣткамъ въ комплексѣ; въ этомъ случаѣ, слѣдовательно, примѣняя новый критерій, мы получимъ для цѣны установки 1-цу то есть полную достовѣрность.

Какъ слѣдующій примѣръ разсмотримъ эпидотъ (пушкинитъ), діаграмма структуры котораго изображена на фиг. 19. Изъ нея видно, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ комплексомъ отрицательнымъ; радіусъ круга, выражающій промежутокъ рядъ въ вертикальномъ направленіи, уменьшенъ вдвое сравнительно съ предъидущими фигурами.

Изъ діаграммы пушкинита видно, что больше чѣмъ въ половинѣ всѣхъ кристалловъ встрѣчается

1) Я ограничиваюсь формами, представленными въ кристаллахъ, не менѣе, чѣмъ въ половинѣ всѣхъ кристалловъ.

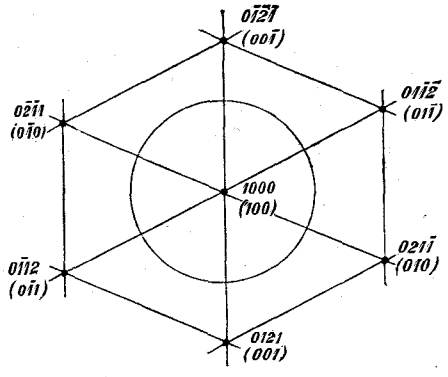
лишь комбинація: {0101}, {0110}, {0011} {0121}, {0211}, {1110}, (это тѣ формы, что встрѣчены почти во всѣхъ кристаллахъ); число граней 7.

Составивъ послѣдовательность граней по плотности сѣтки, найдемъ [1]).

Число граней	1	1	1	1	1	1	1	—	—
Символы	0101	0011	0110	1000	0211	0112	0121	1110	—
Квадратъ площ.	2,6	3,4	3,4	7,2	7,5	8,7	11,4	—	—
	0,4	0,3	0,3	0,14	0,13	0,12	0,09	—	1,48
Число граней	1	1	1	—	1	—	1	2	—
Квадратъ площ.	2,6	3,4	3,4	—	7,5	—	11,4	10,9	—
	0,4	0,3	0,3	—	0,13	—	0,09	0,18	1,40

Итакъ для эпидота получаемъ цѣну установки $\frac{140}{148} = 0{,}95$ то есть для уклоненія отъ достовѣрности всего 5%.

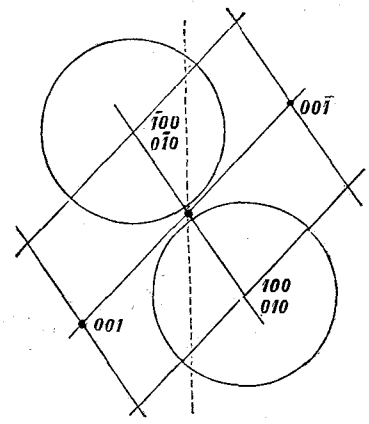
Фиг. 19.



Слѣдующій примѣръ относится къ баритокальциту, діаграмма структуры котораго приведена на фиг. 20.

Формы, встрѣчающіяся болѣе, чѣмъ въ половинѣ кристалловъ, составляютъ комбинацію: {100}, {101}, {210}, {112}, всего 7 (паръ) граней.

Фиг. 20.



Поэтому, опредѣливъ на ней квадраты площадей сѣтокъ въ порядкѣ ихъ величины, получимъ таблички:

Символы	001	100	110	110	101	210	112	—
Число граней	1	2	1	1	2	—	—	—
Квадратъ площ.	0,27	0,32	0,67	0,69	0,71	1,8	2,1	—
	3,7	6,2	1,5	1,5	2,8	—	—	15,7
	—	2	—	—	2	2	1	—
	—	6,2	—	—	2,8	1,1	0,5	10,6

Въ результатѣ получимъ для цѣны установки $\frac{106}{157} = 0{,}68$.

Присмотрѣвшись къ кристаллизаціи баритокальцита, мы замѣчаемъ ту странную особенность, что изъ формъ, выражающихся совокупностью тѣхъ же индексовъ, проявляются въ кристаллѣ преимущественно тѣ, плотность сѣтки которыхъ нѣсколько меньше другихъ. Вотъ почему въ такомъ исключительномъ случаѣ даже примѣненіе новаго критерія не повышаетъ цѣны установки.

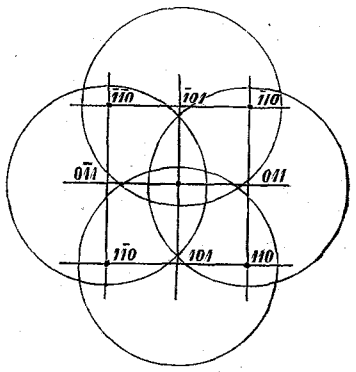
Для баритокальцита структура выводится гексаэдрическая структура, тогда какъ для близкаго ему по комплексу кальцита структура была опредѣлена какъ октаэдрическая.

При изслѣдованіи колумбита (стр. 205) найдены почти равнозначными двѣ установки: гипогек-

[1]) Въ почти микроскопическомъ кристалликѣ изъ Obersulzbachthal на корочкѣ чудныхъ игольчатыхъ кристалловъ эпидота на одномъ изъ нихъ опредѣлена комбинація: {1000}, {0101}, {0110}, {0011}, {1110}, {1101}, {1011}, {0211}, {0121}*, {0112}*, {1202}, {1022}, {1112}, {0321}*. Измѣреніе могло быть произведено съ замѣчательною точностью.

сагональная и кубическая додекаэдрической структуры. При этомъ цѣна первой установки (0,87); оказалось даже большею, чѣмъ второй (0,80); но для

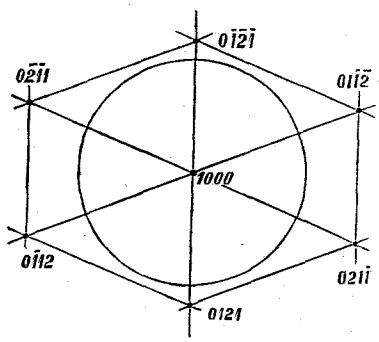
Фиг. 21.



получения вѣроятности установки первое число пришлось еще умножить на $\cos^2(16)$, и тогда вѣроятности почти точно совпали.

Въ виду такой неопредѣленности результата весьма важно примѣнить къ этому случаю новый критерій, для чего и составлены діаграммы структуры для обѣихъ установокъ (фиг. 21 и 22).

Фиг. 22.



Всего (паръ) граней этого комплекса, повторяющихся болѣе чѣмъ въ половинѣ случаевъ, оказалось 10, а потому для полученія окончательнаго результата составляемъ двѣ слѣдующія таблички.

Гипогексагональная установка.

Число граней	1	2	1	2	4	—	—
Символы	$01\bar{0}1$	$01\bar{1}0$	1000	$1\bar{1}01$	$1\bar{1}10$	$02\bar{1}1$	—
Квадратъ площ.	1,4	2,3	2,8	4,2	4,5	5,1	—
	0,7	0,9	0,36	0,48	0,9	—	3,34
	1	2	1	—	4	2	—
	0,7	0,9	0,36	—	0,9	0,39	3,25

Итакъ, цѣна этой установки получается $\frac{325}{334} = 0.97$.

Додекаэдрическая установка.

Число граней	1	4	2	1	2	—	—	—
Символы	001	111	101	100	011	010	103	—
Квадратъ площ.	0,02	0,06	0,16	0,14	0,17	0,17	0,32	—
	50	67	12,5	7	11,8	—	—	148,3
	1	4	2	—	—	1	2	—
	50	67	12,5	—	—	6	6,2	141,7

Итакъ, цѣна этой установки получается $\frac{142}{148} = 0{,}96$. Она имѣетъ почти ту же величину, что и предъидущей, тогда какъ примѣняя прежній критерій, мы получили разницу въ числахъ 0,87 и 0,80. Понятно, что множитель $\cos^2(16)$ окончательно рѣшаетъ вопросъ объ установкѣ въ пользу додекаэдрической.

Такая разница обоихъ случаевъ произошла именно потому, что при употребленіи прежняго критерія всѣ комплексы предполагались изотропными, тогда какъ при додекаэдрической установкѣ комплексъ колумбита весьма рѣзко положителенъ (символъ $\frac{75}{4}$).

Однако, какъ ни просто опредѣленіе площадей параллелограмовъ по данной діаграммѣ структуры, но это дѣло можно еще значительно упростить, если воспользоваться понятіемъ о полярныхъ сѣткахъ (réseaux polaires), введеннымъ еще Браве [1]).

Изъ элементовъ кристаллографіи мы знаемъ, что если три перпендикуляра къ пинакоидамъ комплекса примемъ за кристаллографическія оси и придадимъ имъ такое значеніе отрѣзковъ, чтобы діагональ парал-

[1]) Mémoire sur les systèmes formés par de points distribués régulièrement sur le plan ou dans l'éspace (Journ. de l'école polytechn. 1850).

леленипеда стала перпендикуляромъ къ грани (111), то вообще всѣ діагонали параллелепипедовъ, построенныхъ на тѣхъ же осяхъ по отрѣзкамъ, раціональнымъ къ принятымъ единичнымъ, будутъ перпендикулярами къ соотвѣтственнымъ гранямъ комплекса. Такая система параллелепипедовъ и есть полярная пространственная рѣшетка.

Въ обыкновенной пространственной рѣшеткѣ, каждой точкѣ рѣшетки, ближайшей къ принятому центру, мы можемъ приписать символъ того именно ребра, которое образуется прямою, соединяющею центръ съ данною точкою. Въ полярной рѣшеткѣ аналогично мы можемъ придать каждой ближайшей точкѣ символъ грани, для которой данная прямая будетъ перпендикуляромъ.

Легко доказать, что каждое изъ такихъ ближайшихъ разстояній точекъ отъ центра въ данномъ направленіи, выражаетъ величину площади параллелограма сѣтки той грани, для которой эта ближайшая точка даетъ символъ.

Въ самомъ дѣлѣ, означимъ три кристаллографическія оси буквами x_1, x_2, x_3, перпендикуляры къ плоскостямъ x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2 соотвѣтственно чрезъ X_1, X_2, X_3, а перпендикуляръ къ плоскости, проходящій чрезъ концы осей, черезъ P.

Ясно, что величина площади p параллелограма сѣтки (въ этой плоскости) выразится

$$p=x_2x_3\sin(x_2x_3)\cos(PX_1)+x_3x_1\sin(x_3x_1)\cos(PX_2)+ +x_1x_2\sin(x_1x_2)\cos(PX_3) \quad . \quad . \quad . \quad a)$$

Теперь отложимъ на перпендикулярахъ X_1, X_2, X_3 величины, измѣряющія площади параллелограмовъ перпендикулярныхъ къ нимъ сѣтокъ, и, принявъ эти длины за ребра парраллелепипеда, опредѣлимъ величину его (центральной) діагонали D, которая, по только что объясненному, будетъ совпадать съ перпендикуляромъ.

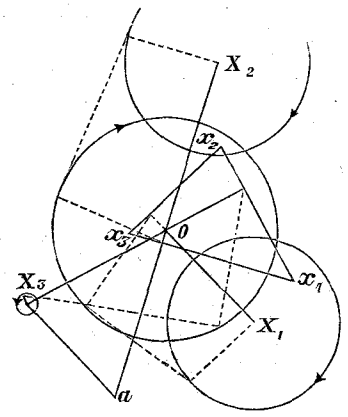
Ясно, что

$$D=x_2x_3\sin(x_2x_3)\cos(PX_1)+x_3x_1\sin(x_3x_1)\cos(PX_2)+ +x_1x_2\sin(x_1x_2)\cos(PX_3). \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

Сравнивая съ a), видимъ, что $D=p$, что и требовалось доказать.

Для поясненія этого вывода разсмотримъ фиг. 23. Пусть O центръ, а x_1, x_2, x_3 конечныя точки трехъ кристаллографическихъ осей, то есть ближайшія къ центру точки въ пространственной рѣшеткѣ на данныхъ прямыхъ, представляющихъ конгруэнтные ряды. Точка O совмѣстно съ каждою парою изъ трехъ остальныхъ точекъ опредѣляютъ трехугольникъ какъ полупараллелограмъ соотвѣтствующей сѣтки. Опредѣлимъ величины площадей этихъ параллелограмовъ и отложимъ ихъ на перпендикулярахъ X_1, X_2, X_3 къ соотвѣтственнымъ сѣткамъ (соотвѣтствующія построенія показаны пунктирными прямыми). Получимъ какъ конечныя точки этихъ перпендикуляровъ, тѣ, которыя выражаются кругами X_1, X_2, X_3.

Фиг. 23.



По смыслу теоремы, если изъ одной изъ этихъ точекъ, напр. X_3, проведемъ прямую X_3a, параллельную прямой X_1 и затѣмъ, отложивъ $X_3a=OX_1$, изъ a проведемъ прямую aO параллельную оси X_2 и еще отложимъ на ней отрѣзокъ, равный OX_2, то конечная точка, замыкающая діагональ параллелепипеда, должна прійтись на вертикали въ O. Величина же этой діагонали въ точности равна площади параллелограма сѣтки, опредѣленной точками x_1, x_2, x_3 на плоскости чертежа.

Эти построенія могутъ наглядно показать степень точности графическихъ операцій (въ дѣйствительности, при неособенно тщательномъ черченіи получается замѣтное расхожденіе).

Ясно, что правильное примѣненіе этой теоремы даетъ возможность опредѣлять величины площади сѣтокъ непосредственно линейными отрѣзками, то есть простѣйшимъ изъ возможныхъ способовъ. Къ тому же теперь нужно проводить не ребра, а перпендикуляры къ гранямъ, то есть построеніе основывать непосредственно на гномостереографической или гномонической проекціи. Это обстоятельство еще болѣе сокращаетъ трудъ составленія діаграммы, необходимой для полученія площадей сѣтокъ, которую мы назовемъ діаграммою полярной рѣшетки.

Зная преимущества этой діаграммы, мы легко поймемъ, что теперь несущественно, чтобы была на ней вертикаль, конгруентный рядъ точекъ которой выражался бы концентрическими векторіальными кругами съ арифметическою прогрессіею радіусовъ. Зато теперь непремѣнно всѣ точки съ символами

граней вертикальнаго пояса будутъ находиться на плоскости чертежа, то есть выражаться точечными кругами; разстояніе этихъ точекъ отъ центра непосредственно выразитъ площади параллелограмовъ сѣтокъ соотвѣтственныхъ плоскостей. Для остальныхъ разстоянія получаются, согласно вышеобъясненному.

Ясно, что для составленія этой діаграммы въ самомъ общемъ случаѣ (триклинной сингоніи), достаточно имѣть, кромѣ центра Z, изображенія трехъ точекъ (001), (100) и (010) (въ случаѣ гипогексагональнаго кристалла соотвѣтственно 1000, $01\bar{0}1$, 0110). Понятно, что для опредѣленія этой діаграммы нѣтъ надобности всякій разъ ее изображать, а достаточно дать слѣдующіе ея элементы (ф. 24): точка (001) опредѣляется угломъ φ и отрѣзкомъ l; уголъ φ считается отъ прямой, соединяющей центръ Z съ точкою (010); поэтому для опредѣленія послѣдней достаточно дать лишь величину отрѣзка b, а для опредѣленія точки a нужны уголъ γ и длина отрѣзка a. Такъ какъ точка (001) находится не въ плоскости чертежа, а лежитъ выше въ первой ближайшей сѣткѣ, параллельной плоскости чертежа, то она выражается векторіальнымъ кругомъ, а потому къ приведеннымъ 5 элементамъ діаграммы слѣдуетъ присоединить еще радіусъ r этого круга.

Всѣ эти 6 элементовъ (изъ которыхъ одинъ произволенъ, такъ какъ зависитъ отъ длины принятой за 1-цу), нужны лишь для триклиннаго кристалла; для другихъ видовъ сингоніи элементы эти пріобрѣтаютъ напередъ предусматриваемое значеніе, почему число элементовъ уменьшается. Напр., если въ моноклинномъ кристаллѣ (001) находится на перпендикулярѣ къ плоскости чертежа, то конечно $l = O$, а вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ φ теряетъ всякій смыслъ и пріобрѣтаетъ неопредѣленное значеніе, и значитъ для опредѣленія остаются всего 4 элемента.

Едва ли нужно распространяться о другихъ постановкахъ моноклинныхъ кристалловъ, также какъ и о другихъ видахъ сингоніи; напередъ понятно, что по даннымъ элементамъ непосредственно видна и сингонія какъ для тетрагоналоидныхъ, такъ и для гексагоналоидныхъ кристалловъ, если только главной оси придадимъ вертикальное положеніе.

Но необходимо особо сказать о тригоналоидныхъ кристаллахъ, для которыхъ, конечно, удобнѣе всего вертикально ставить ось [111], а перпендикуляръ къ $(1\bar{1}0)$ горизонтально слѣва на право.

Ясно, что для изотропнаго кристалла и въ этомъ случаѣ діаграмма будетъ тождественна съ діаграммою структуры гексаэдрической. Въ общемъ же случаѣ (триклинной сингоніи) діаграмма будетъ состоять изъ точечнаго круга, представляющаго центръ, и трехъ равныхъ векторіальныхъ круговъ, изображающихъ точки (100), (010) и (001), причемъ прямая, соединяющая центры первыхъ двухъ круговъ, будетъ параллельна центральной прямой $(1\bar{1}0)$.

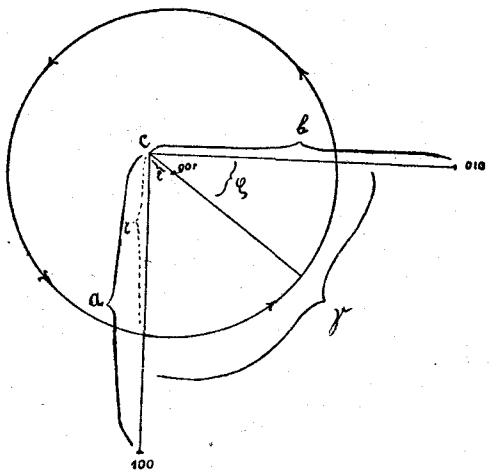
За элементы діаграммы можно принять два угла: γ_1 между прямыми $(1\bar{1}0)$ и (100) и γ_2 между прямыми $(1\bar{1}0)$ и (001), и еще три линейные отрѣзка a, b и c, опредѣляющіе положеніе трехъ упомянутыхъ центровъ.

Къ этому присоединяется еще радіусъ r трехъ равныхъ круговъ. Но можно сказать, что можетъ быть удобнѣе вообще принимать этотъ радіусъ за 1-цу.

Ясно, что въ случаѣ кристалловъ гексагональной сингоніи остается лишь одинъ элементъ для опредѣленія, а именно отрѣзокъ $a = b = c$.

Чтобы окончательно устранить всякую излишнюю работу, я составилъ діаграмму фиг. 27, въ которой проведена кривая по функціи $D = \frac{1}{d^2}$, гдѣ абсциссы d есть разстоянія изъ центра до по-

Фиг. 24.



лученныхъ точекъ (имѣющихъ символъ данной грани), а ординаты D, какъ понятно изъ выраженія, прямо представляютъ квадраты плотности соотвѣтственныхъ сѣтокъ. Ясно, что теперь числа граней каждой формы нужно не дѣлить на величину d^2, а просто умножить на величину D; такимъ образомъ дѣло составленія таблицъ для вывода правильной установки, упрощается до крайней степени.

Кромѣ того, имѣя діаграммы съ выраженіемъ

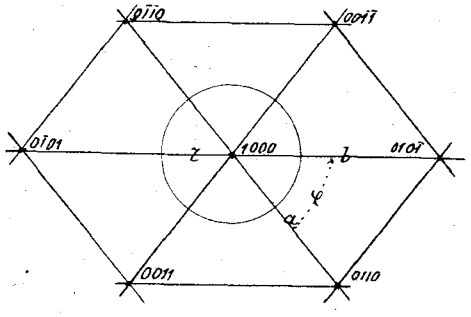
относительной важности граней комплекса (по процентному проявленію въ кристаллахъ), мы будемъ очень близки къ существенному реальному факту, если въ сдѣланномъ подсчетѣ будемъ принимать во вниманіе, какъ самыя важныя, только тѣ грани, которыя проявляются не менѣе, чѣмъ въ половинѣ всѣхъ случаевъ.

Если число такихъ важнѣйшихъ (паръ) граней есть n, то теперь, чтобы получить выраженіе вѣроятности правильности установки, мы сначала получимъ величины D для тѣхъ граней, которыя расположены въ комплексѣ въ порядкѣ плотности сѣтокъ въ числѣ n, а затѣмъ беремъ тѣ же величины для реально важнѣйшихъ граней. Частное отъ дѣленія второго числа на первое и выразитъ искомую вѣроятность.

Чтобы показать эти расчеты на примѣрахъ, мы разсмотримъ тѣ же примѣры, что приведены выше.

Діаграмма полярной рѣшетки для m — нитранилина приведена на фиг. 25.

Фиг. 25.



Такъ какъ въ данномъ случаѣ важность граней не строго установлена, то примемъ въ разсчетъ всѣ 13 наблюденныхъ граней. Имѣемъ

	1000	0110	1110	01$\bar{1}$0	2110	11$\bar{2}$0	21$\bar{3}$0	—
Число граней	1	2	4	1	4	1	—	—
Квадратъ плотности . .	4,0	0,67	0,56	0,44	0,40	0,38	0,30	—
	4,0	1,34	2,24	0,44	1,60	0,38	—	10,0
Число граней	1	—	4	—	4	2	2	—
	4,0	—	2,24	—	1,60	0,38	0,60	8,82

Итакъ, вѣроятность установки 0,88 то есть уклоненіе отъ достовѣрности есть 12 (ради краткости пишемъ вмѣсто 0,12).

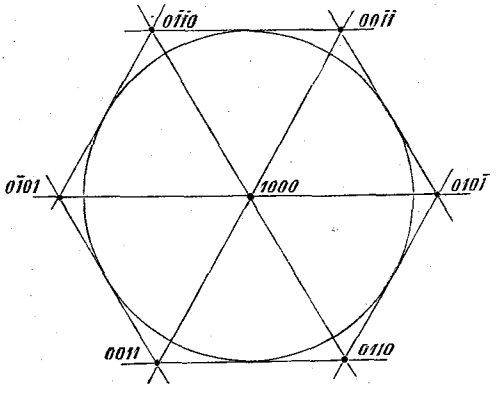
Какъ видимъ, несмотря на неточности, связанныя съ графическими операціями, результатъ отличается отъ полученнаго выше всего на 0,03. И конечно, послѣднее число, какъ полученное съ помощью простѣйшихъ операцій, связанныхъ съ меньшимъ накопленіемъ ошибокъ, точнѣе перваго.

Элементы діаграммы: $(l=0)$; $a=2{,}46$; $b=3{,}00$; $r=1{,}00$; $\gamma=52°$.

Замѣчу еще, что діаграмма полярной рѣшетки для изотропныхъ комплексовъ кубическаго типа вообще нисколько не отличается отъ обыкновенныхъ, вышеприведенныхъ діаграммъ, тогда какъ для гексагонально-изотропнаго комплекса она существенно отличается и принимаетъ видъ правильнаго шестиугольника, описаннаго (а не вписаннаго) около круга, какъ показано на фиг. 26.

Для брукита элементы діаграммы: $(l=0$; $a=1{,}71$; $b=1{,}82$; $r=1{,}00$.

Фиг. 26.



По этимъ числамъ и принимая во вниманіе додекаэдрическую структуру, составляемъ табличку:

Символы	001	111	100	010	101	011	110	102	210	104	—
Число граней	1	4	1	1	2	2	1	—	—	—	—
Квадратъ плотности . .	1,00	0,56	0,34	0,3	0,26	0,23	0,16	—	—	—	—
	1,0	2,24	0,34	0,3	0,52	0,46	0,16	—	—	—	5,02
Число граней	1	4	—	1	—	—	—	2	2	2	—
Квадратъ плотности . .	1,0	0,56	—	0,3	—	—	—	0,15	0,07	0,06	—
	1,0	2,24	—	0,3	—	—	—	0,3	0,14	0,12	4,10

Цѣна установки, слѣдовательно $\frac{410}{502} = 0{,}82$ то-есть уклоненіе отъ достовѣрности около 18% (опять разница съ прежнимъ числомъ 0,03).

Для эпидота элементы діаграммы: $(l = 0)$; $a = 0{,}70$; $b = 0{,}62$; $r = 1{,}0$; $\gamma = 63° \cdot {}^{\circ}$.

По этимъ числамъ составляемъ табличку:

Символы	$0\bar{1}01$	0011	0110	1000	$02\bar{1}1$	$01\bar{1}2$	1110	0121	—
Число граней	1	1	1	1	1	1	1	—	—
Квадратъ плотности . .	2,57	2,5	2,5	1,0	0,78	0,78	0,66	—	—
	2,57	2,5	2,5	1,0	0,78	0,78	0,66	—	10,79
Число граней	1	1	1	—	1	—	2	1	—
Квадратъ плотности . .	2,57	2,5	2,5	—	0,78	—	0,66	0,63	—
	2,57	2,5	2,5	—	0,78	—	1,32	0,63	10,3

Цѣна установки, слѣдовательно, $\frac{103}{108} = 0{,}95$ то есть уклоненіе отъ достовѣрности всего 5%.

Для баритокальцита элементы діаграммы: $a = 1{,}85$; $c = 1{,}50$; $r = 1{,}0$; $\gamma_1 = 32°$; $\gamma_2 = 90°$.

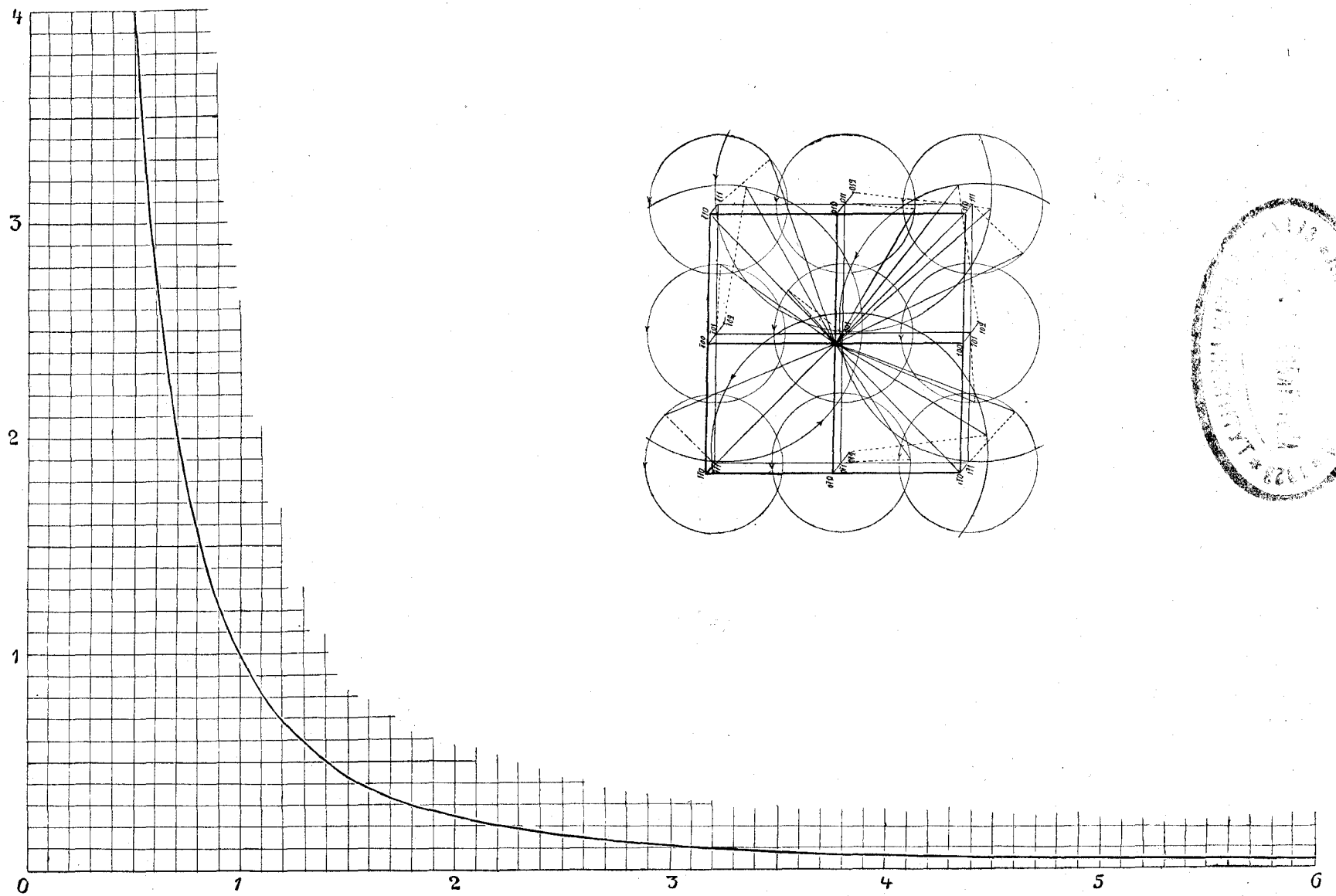
По этимъ числамъ составляемъ табличку:

Символы	001	100	110	101	$\bar{1}10$	$2\bar{1}0$	$11\bar{2}$	—
Число граней	1	2	1	2	1	—	—	—
Квадратъ плотности . .	0,29	0,24	0,13	0,11	0,10	—	—	—
	0,29	0,48	0,13	0,22	010	—	—	1,22
Число граней	—	2	—	2	—	2	1	—
Квадратъ плотности . .	—	0,24	—	0,11	—	0,05	0,03	—
	—	0,48	—	0,22	—	0,1	0,03	0,83

Цѣна установки, слѣдовательно, $\frac{83}{122} = 0{,}67$ то есть уклоненіе отъ достовѣрности достигаетъ 33%.

Чѣмъ обусловливается такое громадное уклоненіе, пока остается безъ слѣда разъясненія; но по имѣющемуся порядку важности формъ всякая другая установка дала бы еще большее уклоненіе.

Чтобы наглядно демонстрировать весь трудъ, связанный съ составленіемъ подобныхъ діаграммъ, и притомъ для самаго сложнаго случая триклинныхъ кристалловъ, я позволяю себѣ на фиг. 27 воспроизвести оригиналъ чертежа, составленный Д. Н. Артемьевымъ для изслѣдованной имъ двухромокаліевой соли, по которому имъ были произведены опредѣленія плотности сѣтокъ наблюдавшихся граней и произведенъ подсчетъ наиболѣе вѣроятной установки этого кристалла.



Фиг. 27.