25. Объ одномъ классѣ приводимыхъ гиперэлиптическихъ интегралов.

И. П. Долбни.

(Доложено 12 мая 1908 г.).

Возьмемъ интегралъ

$$(1)\quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x(x^2+a_1x+a_2)(x^2+b_1x+b_2)}} = u.$$

Изыщемъ подстановку

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda \wp\,(u,\ g_2,\ g_3)$$

наинизшей степени, при посредствѣ которой достигается приведеніе даннаго интеграла (1) къ эллиптическому. Вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ условія, которымъ должны удовлетворять коефиціенты

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$$

для того, чтобы упомянутое приведеніе было возможно. Ясно, что степень $f(x)$ должна быть на единицу выше степени $\varphi(x)$. При $x=\infty$ имѣемъ для x разложеніе съ преобладающимъ членомъ

$$4u^{-2}.$$

Поэтому полагая, что коэфиціенты при высшихъ членахъ полиномовъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны каждый единицѣ, видимъ, что

$$\lambda = 4.$$

Въ смежности съ

$$x = o$$

имѣемъ разложеніе съ преобладающимъ членомъ

$$u^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что, называя чрезъ

$$e_1,\ e_2,\ e_3$$

корни уравненія

$$\wp' u = o,$$

мы должны имѣть

$$\frac{x^3}{\varphi(x)} = \lambda(\wp u - e_1),$$

гдѣ $\wp\,(x)$ есть полиномъ второй степени либо формы

$$\wp(x) = (x-p)^2,$$

гдѣ p неизвѣстное постоянное; либо формы

$$\wp(x) = x^2 + a_1\,x + a_2$$

Имѣя въ виду простѣйшій случай приведенія, полагаемъ

$$\frac{x^3}{x^2+a_1\,x+a_2} = 4(\wp u - e_1).$$

Обозначая

$$4(e_1-e_2) = \mu,\ 4(e_1-e_3) = \nu,$$

Изъ уравненій

$$\frac{x^3+\mu(x^2+a_1\,x+a_2)}{x^2+a_1\,x+a_2} = 4(\wp u - e_2),$$

$$\frac{x^3+\nu\,(x^2+a_1\,x+a_2)}{x^2+a_1\,x+a_2} = 4(\wp u - e_3).$$

Заключаемъ, что

$$x^3+\mu(x^2+a_1\ x+a_2)=(x-x_1)\ (x-\alpha)^2,$$

$$x^3+\nu(x^2+a_1\ x+a_2)=(x-x_2)\ (x-\beta)^2,$$

гдѣ

$$(x-x_1)\ (x-x_2)=x^2+b_1\ x+b_2.$$

Что касается до α и β, то количества эти суть корни уравненія

$$\frac{1}{x^2}\quad\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2+a_1\ x+a_2}\right)=0,$$

т. е. уравненія

$$x^2+2a_1x+3a_2=0.$$

Поэтому имѣемъ тождество

$$[x^3+\mu(x^2+a_1x+a_2)]\ [x^3+\nu(x^2+a_1x+a)_2]=$$

$$(x^2+b_1x+b_2)[x^4+4a_1x^3+(4a_1{}^2+6a_2)x^2+12a_1a_2x+9a_2{}^2].$$

Отсюда находимъ:

1) $\mu+\nu=4a_1+b_1$; 2) $\mu\nu=6a_2+3a_1b_1+b_2$.

Кромѣ того, послѣ небольшихъ преобразованій получимъ два соотношенія между коефиціентами:

1) $2a_1a_2-4a_2b_1+a_1{}^2b_1=0$,

2) $6a_2+3a_1b_1-8b_2=0$.

Отсюда

$$b_1=\frac{2a_1a_2}{4a_2-a_1{}^2},$$

$$b_2=-\frac{3a_2{}^2}{4a_2-a_1{}^2},$$

μ и ν суть корни уравненія

$$t^2-\frac{18a_1a_2-4a_1{}^3}{4a_2-a_1{}^2}\ t+\frac{27a_2{}^2}{4a_2-a_1{}^2}=0.$$

Инваріанты g_2 и g_3 выразятся раціонально чрезъ a_1, a_2, и приводимый интегралъ будетъ

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x(x^2+a_1x+a_2)(x^2+\frac{2a_1a_2}{4a_2-a_1{}^2}\ x+\frac{3a_2{}^2}{4a_2-a_1{}^2})}}$$

§ 2. Дается интегралъ

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^3+ax^2+2abx+2bca)(x+d)x}}=u,$$

Употребимъ подстановку

$$\varphi(x)=\frac{x^3}{(x-\alpha)^2}=4(\rho u-e_1);$$

$$\varphi'(x)=\frac{3x^2(x-\alpha)^2-2(x-\alpha)x^3}{(x-\alpha)^4};$$

уравненіе

$$\varphi'(x)=0,$$

по освобожденіи отъ множителей, даетъ

$$x=3\alpha.$$

Имѣемъ

$$x^3+\mu\ (x-\alpha)^2=x^3+ax^2+2abx+b^2ca,$$

$$x^3+\nu\ (x-\alpha)^2=(x-3\alpha)^2\ (x+d).$$

Отсюда

$$\mu=a,\ \alpha=-b;\ c=1.$$

$$\nu=6b+d,\ 3b=4d.$$

Приводимый интегралъ будетъ

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(x^3+ax^2+2abx+ab^2)(x+\frac{3}{4}\ b)x}}$$